半ラプラシアンによる消散効果を持つ対流拡散方程式の解の時間大域挙動について

澁谷 光祐　(東北大学 大学院理学研究科)*

1 導入

本発表では次の半ラプラシアンによる消散効果を持つ, 1 次元対流拡散方程式の初期値問題の解の時間大域挙動について考える:

$$
\text{(CD)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = \partial_x(u^2), & t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

ただし $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を未知函数, u_0 を初期値とし, $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} f := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|\hat{f}(\xi)]$ により半ラプラシアンを定める. 方程式 (CD) は Burgers 方程式とも呼ばれ, 流体モデルなどとの関連性からこれまで盛んに研究が行われてきた. 初期値問題 (CD) において通常のラプラシアンの場合には, Escobedo–Zuazua [3], Duro–Carpio [2] らをはじめとして多数の研究があるが, 解は線型の基本解である Gauss 函数に漸近することが知られている. 本発表で考察する半ラプラシアンによる消散項を備えた方程式 (CD) は, 解の適切性の観点では臨界の方程式であり, これまで多数の研究がなされている ([1, 4–7] 等を参照). 一方で時間大域挙動の観点から見れば, 初期値問題 (CD) は劣臨界の問題となるものの, Iwabuchi [4, 5], Yamamoto–Sugiyama [8] らにより漸近挙動の解析が試みられており, 半ラプラシアンの場合でも, 通常のラプラシアンの場合と同様に線型の基本解, すなわちこの場合は Poisson 核に漸近することが示されている. しかしながら, 初期値問題 (CD) は放物型の構造に加えて一階双曲型の構造を併せ持つため, 漸近展開のプロファイルには非線型波の伝播効果に由来する項が含まれることが想定される. 本発表ではこのような非線型項から現れるプロファイルを明らかにし, 初期値問題 (CD) の解の時間大域挙動をより詳細に明らかにする.

2 主結果と証明の概要

定理を述べるために記号を導入する.

定義 1 (Poisson 核)**.** 線型方程式 $\partial_t u + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = 0$ の基本解を

$$
P(t,x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2 + x^2}
$$

と書く. また, γ_q を $P(t)$ の減衰オーダーとする. すなわち, $1 \le q \le \infty$ に対し, $\gamma_q = 1 - 1/q$ であって,

$$
\|P(t)\|_{L^q(\mathbb{R})} \le C t^{-\gamma_q}.
$$

---

* e-mail: `kosuke.shibuya.q4@dc.tohoku.ac.jp`

本発表の内容は山本 征法 氏 (群馬大学) との共同研究に基づく.
また, 本研究は科研費 (課題番号: 25KJ0618) の助成を受けたものである.

さらに, 問題 (CD) の初期値 u_0 の平均値を $M_0 = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$, 一次モーメントを $M_1 = \int_{\mathbb{R}}(-x)u_0(x)dx$ とおく. このとき, 次の漸近展開が成り立つ.

定理 2. 初期値 u_0 は $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ を満たし, さらに $|x|^2 u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ を満たすとする. このとき, 任意の $1 \le q \le \infty$ に対し, 初期値問題 (CD) の解 $u(t)$ は次を満たす:

$$\begin{aligned}\Bigg\| u(t) - M_0 P(t) - \frac{M_0^2}{2\pi}\partial_x P(t)\log t - M_1 \partial_x P(t) \\ - \partial_x P(t) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u^2(s,y) - M_0^2 P^2(1+s,y))dyds \\ - \frac{M_0^2}{\pi^2}\frac{tx(x^2-3t^2)}{(t^2+x^2)^3} \Bigg\|_{L^q(\mathbb{R})} = O(t^{-\gamma_q - 2}(\log t)^2), \quad t \to \infty.\end{aligned}$$

初期値の仮定 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R})$ は解の適切性, および減衰を保証するものであり, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $|x|^2 u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ は高次漸近展開の減衰を保証するものである. また, 定理の最後の項

$$J(t) = \frac{M_0^2}{\pi^2}\frac{tx(x^2-3t^2)}{(t^2+x^2)^3} = -\frac{M_0^2}{2\pi} t \partial_t \partial_x P(t) \tag{1}$$

は消散波の効果を表す項で, 解の大域挙動に双曲型の構造が内包されることを明示するものである. さらに, 任意の $\lambda > 0$ に対して $\lambda^{1+1}(\partial_x P, J)(\lambda t, \lambda x) = (\partial_x P, J)(t,x)$, すなわち $J(t)$ は Poisson 核の 1 階微分と等しいスケーリングをもつ. もし $J(t)$ が線型のプロファイルであるならば, そのスケールは微分の階数と対応付けられるため, (1) と合わせて, $J(t)$ は非線型のプロファイルであることがわかる.

証明は, 積分方程式を繰り込み法により展開することで行う. 余剰項の減衰評価の導出には, 次の解の重み付き評価が重要となる.

命題 3. 初期値 u_0 は $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap \dot{B}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ を満たし, かつ $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ を満たすとする. この時初期値問題 (CD) の解 u に対し, 次の重み付き評価が成り立つ.

$$\| |x| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R})} \le C t^{-1/2}(1+t), \quad t > 0.$$

また, 非線型プロファイル $J(t)$ の導出には, 次の Poisson 核に関する関係式が重要となる.

補題 4. Poisson 核 $P(t)$ に対して次が成り立つ:

$$P^2(t,x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{t} - \partial_t\right) P(t,x).$$

参考文献

[1] Dong, H., Du, D., Li, D., Finite time singularities and global well-posedness for fractal Burgers equations, Indiana Univ. Math. J. **58** (2) (2009), 807–821.

[2] Duro, G., Carpio, A., Asymptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion, Nonlinear Anal., **45** (2001), 407–433.

[3] Escobedo, M., Zuazua, E., Large time behavior for convection-diffusion equation in $\mathbb{R}^n$, J. Funct. Anal. **100** (1991), 119–161.

[4] Iwabuchi, T., Global solutions for the critical Burgers equation in the Besov spaces and the large time behavior, Ann. Inst. H. Poincaré **32** (2015), 687–713.

[5] Iwabuchi, T., Analyticity and large time behavior for the Burgers equation and the quasi-geostrophic equation, the both with the critical dissipation, Ann. Inst. H. Poincaré **37** (2020), 855–876.

[6] Kiselev, A., Nazarov, F., Shterenberg, R., Blow up and regularity for fractal Burgers equation, Dyn. Partial Differ. Equ. **5** (3) (2008), 211–240.

[7] Miao, C., Wu, G., Global well-posedness of the critical Burgers equation in critical Besov spaces, J. Differ. Equ. **247** (6) (2009), 1673–1693.

[8] Yamamoto, M., Sugiyama, Y., Asymptotic behavior of solutions to the Drift-Diffusion equation with critical dissipation, Ann. H. Poincaré **17** (2016), 1331–1352.