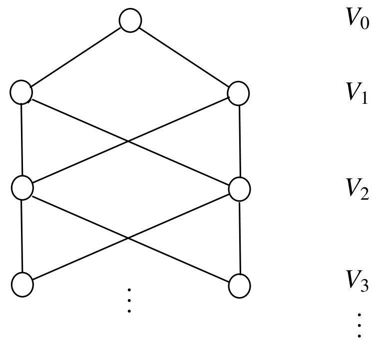
Bratteli 図形におけるエントロピー 0 の力学系と図形の様相について

坂井康太郎 (熊本大学大学院)

Abstract. 本講演における「(位相) 力学系」とは, あるコンパクト集合 X とその上の同相変換 $T : X \to X$ の二つ組み (X, T) を表すこととする. 今回は, Bratteli-Vershik system という力学系のエントロピーに関して, 異なる力学系間の conjugacy map, factor map を用いた計算手法及び, その値が 0 になるときの図形の様相に関する十分条件について証明のアウトラインについて紹介したい. また, 力学系研究全般において重要である shift space についても内容と関連させつつ言及する.

1 Bratteli-Vershik system

厳密な定義は講演の中で与えることとし, Bratteli 図形の一例を下図に示す.

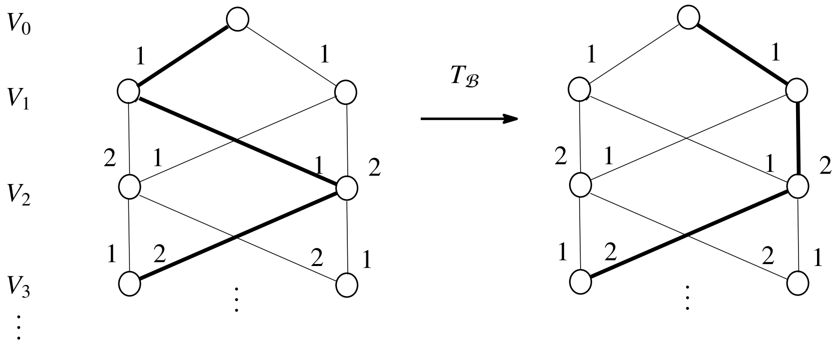


言葉による説明をすると, Bratteli 図形とは高さごと有限個に分割された無限頂点集合 V と, 隣り合った階層間を上から下へつなぐ無限辺集合 E からなる有向グラフ $\mathcal{B} = (V, E)$ のことである. 考えたい力学系の土台となる集合は Bratteli 図形内の無限の長さの path の集まり (infinite path space) であり, 下の式により与えられる.

$$X_{\mathcal{B}} := \left\{x = (x_n) \in \textstyle\prod_{n=1}^{\infty} E_n \mid \forall n \in \mathbb{N},\ r(x_n) = s(x_{n+1})\right\}$$

$$\text{where} \quad \begin{aligned} r : E \to V,\ r(E_n) = V_n (n \in \mathbb{N}) &\ :\ \text{range map} \\ s : E \to V,\ s(E_n) = V_{n-1} (n \in \mathbb{N}) &\ :\ \text{sorce map} \end{aligned}$$

辺集合 E 上に proper order と呼ばれる半順序が入ったときに, その半順序に誘導された Vershik map と呼ばれる同相変換 $T_{\mathcal{B}} :\ X_{\mathcal{B}} \to X_{\mathcal{B}}$ が定義され, 力学系 $(X_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{B}})$ を得る. この力学系のことを Bratteli-Vershik system という (以降 BV-system と呼ぶ).



2 n-th symbolic factor

A :finite set (alphabet と呼ばれる)
$\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$:shift map (直積の成分全体を一つ左の座標にずらす写像)

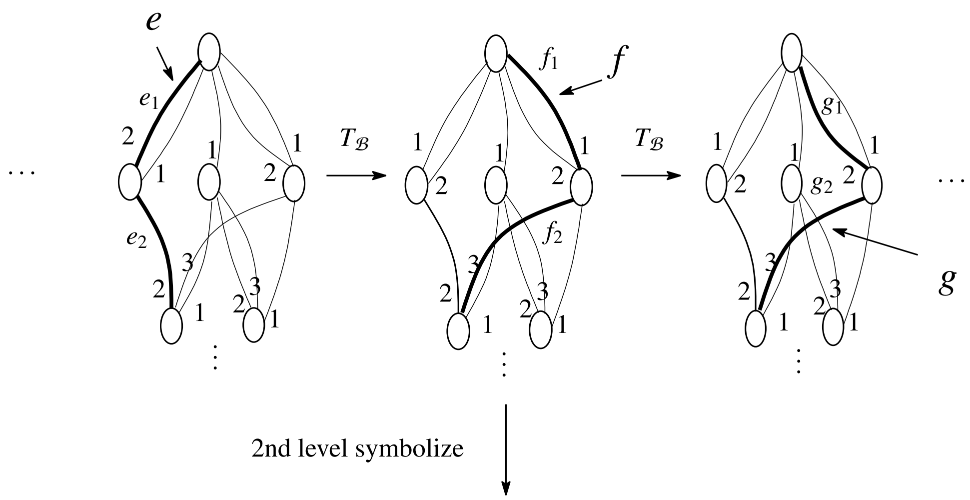
が与えられたとき $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ は力学系であり, full-shift と呼ばれる. また, Y を $A^{\mathbb{Z}}$ 内の shift 不変 (i.e. $\sigma Y = Y$) な閉集合とすると, (Y, σ_Y) もまた力学系であり, subshift(または shift space) と呼ばれる. ここで σ_Y は σ の Y への制限とする.

BV-system は, 力学系の土台となるグラフ自体が無限の長さを持つが故に, 全体像を掴みずらいところがある. そのため以降 BV-system を, 有限の長さの path の Vershik map による挙動だけを表した subshift の極限として捉えるということを考える. そのために次の力学系を定義する.

$$X_n := \left\{ (\tau_n T_{\mathcal{B}}^k x)_{k\in\mathbb{Z}} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n \mid x \in X_{\mathcal{B}} \right\}$$

ここで τ_n は Bratteli 図形の infinite path において, $n+1$ 本目以降の辺を切り捨てる写像, $\mathcal{P}_n$ は V_0 の頂点から V_n の頂点への path 全体とする. $n = 2$ の場合のイメージを下図に示した.

$n = 2$ の場合



$$(\tau_n T_{\mathcal{B}}^k f)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\cdots\cdots \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots \right) \in X_2$$

σ_n を X_n 上の shift map とすると, (X_n, σ_n) は $(\mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ の subshift であり, 次のことが成り立つ.

Fact 1

$$h(T_{\mathcal{B}}) = \lim_{n\to\infty} h(\sigma_n)$$

ここで一般に同相変換 $T : X \to X$ に対して, $h(T)$ は T のエントロピーを表すとする.

従って Vershik map のエントロピーを求めたければ, shift map σ_n のエントロピーの値を調べればよい.

3 Main theorem

(X, σ_X) :shift space
A:X の alphabet
このとき A によって生成される自由モノイドを A^* で表す. A^* の元で, X の記号列に出現するものを X の word と呼ぶ. X の word のうち, 長さ n のもの全体を $B_n(X)$ で表す. このとき, σ_X のエントロピーは次で計算される.

Definition 3.1

$$h(\sigma_X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#B_n(X)$$

即ち shift space のエントロピーは長さ n の word の個数の成長率を表している.

Vershik map のエントロピーに関する主結果を紹介する.

Theorem 3.2 $\mathcal{B} = (V, E, \leq)$: properly oredered Bratteli 図形
このとき

$$\exists s > 0 \text{ s.t. } \limsup_{n\to\infty} \frac{\#V_n}{n^s} < \infty$$

$\Rightarrow h(T_{\mathcal{B}}) = 0$

この定理から, Bratteli 図形における各階層の頂点の個数が上に有界ならば, 忽ち Vershik map のエントロピーは 0 に落ち着いてしまう. また $\lim_{n\to\infty} \#V_n = \infty$ であった場合でも, 発散スピードとして多項式のレベルを上回らなければエントロピーは 0 になってしまうことが分かる.

References

[1] Peter Walters *An introduction to Ergodic Theory* Springer, New York (1982)

[2] Herman,Richard H., Putnam,Ian F., and Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics*.Internat. J. Math., 3(6):827-864, (1992)

[3] F. Durand, and D. Perrin *Dimension Groups and Dynamical Systems - Substitutions, Bratteli Diagrams and Cantor Systems*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 196). Cambridge University Press, Cambridge, (2022)

[4] T. Downarowicz, *Entropy in Dynamical Systems*,volume 18 Cambridge University Press, New York (2011)

[5] T. Downarowicz, A. Maass, *Finite-rank Bratteli-Vershik diagrams are expansive.*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **28**(3) 739?747, (1976)