

エントロピー法による等非局所拡散を 伴う反応拡散系の進行波の安定性

下條 昌彦 (東京都立大学)*

次の非局所拡散を伴う反応拡散系の進行波の安定性を論じる.

$$(u_i)_t(x, t) = d_i \mathcal{N}_i u_i + u_i(x, t) g_i(u(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (\text{P})$$

ここで $u(x, t) := (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $d_i > 0$, $g_i \in C^1([0, \infty)^m)$ であり,

$$\mathcal{N}_i u_i := \int_{\mathbb{R}} J_i(y) u_i(x - y, t) dy - u_i(x, t) = (J_i * u_i - u_i)(x, t).$$

また, 関数 J_i は次の性質を満たす.

$$(\text{J1}) \quad J_i \geq 0 \text{ は滑らかな偶関数}; \quad (\text{J2}) \quad \int_{\mathbb{R}} J_i(y) dy = 1;$$

$$(\text{J3}) \quad \text{ある } \hat{\lambda}_i \in (0, \infty] \text{ が存在して, 任意の } \lambda \in (0, \hat{\lambda}_i) \text{ に対して } \int_{\mathbb{R}} J_i(y) e^{\lambda y} dy < \infty \\ \text{であり, } \int_{\mathbb{R}} J_i(y) e^{\lambda y} dy \rightarrow \infty \text{ as } \lambda \uparrow \hat{\lambda}_i.$$

反応拡散系 (P) の異なる定常平衡点 $E^\pm$ を結ぶ進行波解 $\{c, \Phi\}$ とは, $\Phi := (\phi_1, \dots, \phi_m)$ に対して, $u_i(x, t) = \phi_i(x - ct)$ と表せる解のことである. ただし, $\Phi(-\infty) = E^-$, $\Phi(\infty) = E^+$ が成り立つとする. 非局所拡散を伴う反応拡散系の進行波の存在と非存在は広範に研究されている. 単独方程式 ([1]) や, 順序構造が利用できる協調系の場合には進行波の最小速度を導き出すことができる ([5]). 近年, 比較原理が成り立たない捕食被食系や感染症モデルに対しても進行波が構成されている ([10, 8, 2, 9, 7, 12, 6]).

本研究の目標は, (P) に対する進行波解の安定性を, 統一的な観点から証明することである. 非局所拡散を伴う協調系における進行波解の安定性は, 協調系の順序保存性を用いた一般的な方法によって導出できる ([11]). ところが, 非協調系においては, 比較原理が成り立たないため, 進行波の安定性に関する研究はほとんど行われていない. 本講演で紹介する Theorem 1 を応用すれば, 捕食被食系についての [2, 9, 7, 12, 6] や, 感染症モデルについての [10, 8] などに対して, 重み付き空間の意味での進行波の安定性を証明できる.

進行波の安定性を研究するために, 動座標 $z := x - ct$ を使用する. 以下, (P) の正值解 $u(x, t)$ に対して z 座標に関して対応する関数を $u_i = u_i(z, t)$ と書くことにする. さて, 進行波の安定性に関する主定理を述べる.

Theorem 1 (Stability Theorem [4]) $d_i = 1$ および $J_i = J$ を仮定する. また $\mathcal{N}[u_i] := J * u_i - u_i$ とする. すべての $c \geq c^*$ に対して (P) が正の進行波解 $\{c, \Phi\}$ をもつとする. ある正の定数 R に対して

$$c_R := \inf_{0 < \lambda < \hat{\lambda}} G(\lambda) \geq c^*, \quad G(\lambda) := \frac{\left[\int_{\mathbb{R}} J(y) e^{\lambda y} dy - 1 \right] + R}{\lambda}$$

This work was supported by KAKENHI (20K03708, 24K06817).

Keywords: Stability, traveling wave, nonlocal dispersal, non-cooperative model.

*web: <https://www.masahiko-shimojo.com/>

であると仮定する. $c \geq c_R$ に対する (P) の正の進行波解を $\{c, \Phi\}$ とする. 適当な正の定数 $\sigma_i (1 \leq i \leq m)$ が存在して, 相対エントロピー関数

$$W(z, t) := \sum_{i=1}^m \sigma_i \left(u_i(z, t) - \phi_i(z) - \phi_i(z) \ln \frac{u_i(z, t)}{\phi_i(z)} \right)$$

が以下を満たすとする.

$$W_t \leq \mathcal{N}[W] + cW_z + RW, \quad (z, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

さらに $\lambda_c < \hat{\lambda}$ は $G(\lambda) = c$ の最小の正の根とし, $e^{\lambda_c z} \mathcal{K}[u_0], \mathcal{F}[e^{\lambda_c z} \mathcal{K}[u_0]] \in L^1(\mathbb{R})$ を仮定する. このとき, 各 $z \in \mathbb{R}$ において $t \rightarrow \infty$ のとき, $u(z, t) \rightarrow \Phi(z)$.

我々は, 通常の (局所) 拡散に対する反応拡散方程式系における進行波の安定性に関する一般論 ([3]) を非局所拡散の場合に拡張して Theorem 1 を得た.

References

- [1] J. Coville, J. Dávila, S. Martinez, *Existence and uniqueness of solutions to a nonlocal equation with monostable nonlinearity*, SIAM J. Math. Anal., **39** (2008), 1693–1709.
- [2] A. Ducrot, J.-S. Guo, G. Lin, S. Pan, *The spreading speed and the minimal wave speed of a predator-prey system with nonlocal dispersal*, Z. Angew. Math. Phys., **70** (2019), Art. 146.
- [3] J.-S. Guo, M. Shimojo, *Convergence to traveling waves in reaction-diffusion systems with equal diffusivities*, J. Differential Equations, **375** (2023), 156–171.
- [4] J.-S. Guo, M. Shimojo, *Stability of traveling waves in non-cooperative systems with nonlocal dispersal of equal diffusivities*, Asymptotic Analysis, <https://doi.org/10.1177/09217134241308359>.
- [5] X. Liang, X.-Q. Zhao, *Asymptotic speeds of spread and traveling waves for monotone semiflows with applications*, Comm. Pure Appl. Math., **60** (2007) 1–40.
- [6] W.-Y. Tang, F.-Y. Yang, B.-E. Jiang, *Minimal wave speed for a predator-prey system with nonlocal dispersal*, preprint.
- [7] C.-C. Wu, *On the stable tail limit of traveling wave for a predator-prey system with nonlocal dispersal*, Appl. Math. Lett., **113** (2021), 5 pp.
- [8] F.-Y. Yang, W.-T. Li, *Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR model with critical wave speed*, J. Math. Anal. Appl. **458** (2018), 1131–1146.
- [9] F.-Y. Yang, W.-T. Li, R.-H. Wang, *Invasion waves for a nonlocal dispersal predator-prey model with two predators and one prey*, Commun. Pure. Appl. Anal., **20** (2021), 4083–4105.
- [10] F.-Y. Yang, Y. Li, W.-T. Li, Z.-C. Wang, *Traveling waves in a nonlocal dispersal Kermack-McKendrick epidemic model*, Discr. Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **18** (2013), 1969–1993.
- [11] Z. Yu, J. Pei, *Stability of traveling wave fronts for a cooperative system with nonlocal dispersal*, Japan J. Industrial Appl. Math., **35** (2018), 817–834.
- [12] X.-D. Zhao, F.-Y. Yang, W.-T. Li, *Traveling waves for a nonlocal dispersal predator-prey model with two preys and one predator*, Z. Angew. Math. Phys., **73** (2022), work No. 124, 29 pp.