THE BLASCHKE–SANTALÓ INEQUALITY FOR MULTIPLE EVEN FUNCTIONS

辻　寛（埼玉大学）

Abstract. 本講演の内容は中村昌平氏（大阪大学）との共同研究に基づく．Blaschke–Santaló 不等式は凸幾何学における基本的な不等式の一つとして知られている．一般に，対称な凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，その偏極体 $K^\circ \subset \mathbb{R}^n$ が自然に与えられる．本講演での興味の対象は対称な凸体 K と K° の体積の積 $|K||K^\circ|$ であり，これは volume product と呼ばれる．本講演で取り扱う具体的な問題は，volume product を最大化する凸体は何か，という問いである．この問いはすでに Blaschke[3] と Santaló[11] により解決されており，球体で最大化されることが知られている．またこの事実を表現する不等式は Blaschke–Santaló 不等式として呼ばれている．本講演ではこの問題を複数の対称な凸体に拡張した場合の問題を考える．実際，複数の凸体に対する同様の問いは Kolesnikov–Werner[7] によって提唱され部分的に解決されていたが，一般の場合は未解決問題として残されていた．本講演では特に Kolesnikov–Werner による予想が肯定的に解決されることを報告する．また時間が許す限り，最適輸送理論や情報理論で知られる Talagrand 不等式と呼ばれる不等式との関係についても言及する．

我々の証明のアプローチでは直接幾何学的な量である volume product を取り扱うのではなく，その解析版とみなされる volume product の関数不等式の問題を考える．すなわち我々の最終目標は，とある関数不等式を構成することに帰着される．この関数不等式を証明するために，我々は Brascamp–Lieb 不等式と呼ばれる，調和解析や凸幾何学において利用される関数不等式の理論を活用する．

1. Volume product and Blaschke–Santaló inequality

集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ が凸体であるとは，K が有界な凸閉集合であり，その内部が空であることを指す．また K が対称であるとは原点対称であること，すなわち $K = -K := \{-x : x \in K\}$ となることを指す．対称な凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，その偏極体[1]$K^\circ \subset \mathbb{R}^n$ は

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \le 1, \forall y \in K\}$$

として定義され，さらに定義から対称となる．たとえば $1 \le p \le \infty$ に対して，n 次元 ℓ^p 空間の単位球を $\mathrm{B}_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n : (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} \le 1\}$ とするとき，その偏極体は B_q^n（$q^{-1} + p^{-1} = 1$）となることがわかる．

対称な凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，volume product は $v(K) := |K||K^\circ|$ によって定義される．ここで $|\cdot|$ は n 次元 Lebesgue 測度を表す．volume product の重要な性質の一つは線形不変性である．すなわち任意の可逆な線形写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$v(TK) = v(K)$ であることが従う．この volume product に関して，次の不等式が Blaschke–Santaló 不等式として知られている．

[1] K° 自体は任意の集合 K に対して定義されるが，一般に K° が凸体とは限らない．とくに K が凸体かつ原点をその内部に含めば，K° も凸体となる．

Theorem 1.1 (Blaschke [3], Santaló [11])**.** 任意の対称[2]な凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

$$v(K) \le v(\mathrm{B}_2^n).$$

等号は K が対称な楕円体のときに成り立つ.

Blaschke–Santaló 不等式は volume product が球体で最大化されることを主張する.また本講演内容からは外れるので詳しく述べないが, volume product の最小化問題についても同様に考えれらており, 一般には Mahler 予想という未解決問題[3]として知られている.

2. Functional Blaschke–Santaló 不等式

幾何学的不等式の関数不等式版を考えることは, 不等式の理解を推し進めたり応用を展開するうえで重要である. Blaschke–Santaló 不等式についても同様であり, この方向性の研究は K. Ball[2], Artstein-Avidan–Klartag–Milman[1] によって始められた([4, 8, 9] も参照). 次の不等式は Blaschke–Santaló 不等式の解析版とみなされる.

Theorem 2.1 ([2])**.** 偶関数 $f_1, f_2 \in L^1_+(dx) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : f \ge 0\}$ が

$$f_1(x_1)f_2(x_2) \le e^{-\langle x_1, x_2\rangle}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n)^2 = \mathbb{R}^{2n}, \tag{2.1}$$

を満たすならば,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1\, dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2\, dx \le (2\pi)^n \tag{2.2}$$

が成り立つ.

この不等式がなぜ Blaschke–Santaló 不等式の解析版と解釈されるのかを見るために, Minkowski 汎関数を導入する. 対称な凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ が与えられたとき, $\mathbb{R}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|_K$ を

$$\|x\|_K := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$$

によって定める. これは K を単位球に持つノルムを考えることに同じである. このとき

$$\frac{1}{2}\|x_1\|_K^2 + \frac{1}{2}\|x_2\|_{K^\circ} \ge \langle x_1, x_2\rangle, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n)^2 = \mathbb{R}^{2n}$$

であることが知られている. 特に

$$f_1 := e^{-\frac{1}{2}\|\cdot\|_K^2}, \quad f_2 := e^{-\frac{1}{2}\|\cdot\|_{K^\circ}^2}$$

とすれば, (2.1) が成り立つ. 一方で直接計算から

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\|x\|_K^2}\, dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{|K|}{|\mathrm{B}_2^n|}$$

となることがわかる. ゆえに Theorem 2.1, 特に (2.2) から $v(K) \le v(\mathrm{B}_2^n)$ を得る.

---

[2] K が対称という仮定は重心が 0 という条件に弱められる.

[3] 興味のある方は [5] を参照.

3. Kolesnikov–Werner 予想と主結果

Kolesnikov–Werner[7] は Theorem 2.1 の複数の関数への拡張を考察し，次を示した．

Theorem 3.1 ([7])**.** $m \in \mathbb{N}$ を 2 以上の整数とし，関数 $f_1, \dots, f_m \in L^1_+(\mathbb{R}^n)$ は *unconditional*[4]かつ

$$\prod_{i=1}^{m} f_i(x_i) \le e^{-\frac{1}{m-1}\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^n)^m \tag{3.1}$$

を満たすとする．このとき

$$\prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, dx_i \le (2\pi)^{\frac{nm}{2}} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

とくに $m = 2$ の場合が Theorem 2.1 に対応する．Kolesnikov–Werner はさらに同様の結果が偶関数 $f_1, \dots, f_m \in L^1_+(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つと予想した．この予想に関して Kalantzopoulos–Saroglou [6] が部分的な進捗を与えている．本講演の主結果は Kolesnikov–Werner の予想を肯定的に解決したことである．すなわち，

Theorem 3.2 (Nakamura–T. [10])**.** $m \in \mathbb{N}$ を 2 以上の整数とする．偶関数 $f_1, \dots, f_m \in L^1_+(\mathbb{R}^n)$ が (3.1) を満たせば，(3.2) が成立する．

さらに我々は Kolesnikov–Werner による不等式の一般化を得ることもできた．この事実を述べるためにいくつかの記号を導入する．

- $m \in \mathbb{N}$ は 2 以上の整数，$n_1, \dots, n_m, N \in \mathbb{N}$ は $N = \sum_{i=1}^m n_i$ を満たすとし，$\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_m)$ とかく．
- $c_1, \dots, c_m > 0$ とし $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_m)$ とかく．
- $\mathcal{Q}$ を N 次対称行列とする．

以上の記号をまとめて $(\mathbf{n}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ と書くことにし，Brascamp–Lieb データと呼ぶことにする．我々の一般化した結果は次である．

Theorem 3.3 (Nakamura–T. [10])**.** $(\mathbf{n}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ は *Brascamp–Lieb* データとする．偶関数 $f_1, \dots, f_m \in L^1_+(\mathbb{R}^n)$ が

$$\prod_{i=1}^{m} f_i(x_i)^{c_i} \le e^{-\langle x, \mathcal{Q}x\rangle}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i} = \mathbb{R}^N \tag{3.3}$$

を満たせば，

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i \, dx_i \right)^{c_i} \le \sup_{A_1, \dots, A_m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} g_{A_i} \, dx_i \right)^{c_i} \tag{3.4}$$

[4] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が unconditional であるとは，$f(x_1, \dots, x_n) = f(|x_1|, \dots, |x_n|)$ となるときを指す．

が成り立つ．ここで正値対称行列 A に対して $g_A(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle}$ とし，sup は次を満たす n_i 次正値対称行列 A_i に関してとる：

$$\prod_{i=1}^{m} g_{A_i}(x_i)^{c_i} \le e^{-\langle x, \mathcal{Q}x\rangle}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i} = \mathbb{R}^N.$$

すべての $i = 1, \ldots, m$ に対して $n_i = n$, $c_i = 1$ とし，

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2(m-1)} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_n & \cdots & \mathrm{id}_n \\ \mathrm{id}_n & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathrm{id}_n \\ \mathrm{id}_n & \ldots & \mathrm{id}_n & 0 \end{pmatrix}$$

とした Brascamp–Lieb データ $(\mathbf{n}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を考えると，(3.3) は (3.1) に一致する．さらにこの場合 (3.4) の右辺は $(2\pi)^{\frac{nm}{2}}$ に一致することが直接計算から確かめられるので，特に Theorem 3.3 は Theorem 3.2 の一般化であることがわかる．Theorem 3.3 の証明には Brascamp–Lieb 不等式の理論を用いる．本講演内ではこれらの詳細についても時間の許す限り立ち入る予定である．

References

[1] S. Artstein-Avidan, B. Klartag, V. Milman, *The Santaló point of a function, and a functional form of the Santaló inequality*, Mathematika **51** (2004), 33–48.

[2] K. Ball, *Isometric problems in ℓ_p and sections of convex sets*, Doctoral thesis, University of Cambridge, 1986.

[3] W. Blaschke, *Über affine Geometrie VII. Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid*, Leipz. Ber. **69** (1917) 306–318.

[4] M. Fradelizi, M. Meyer, *Some functional forms of Blaschke–Santaló inequality*, Math. Z. **256** (2007) 379–395.

[5] M. Fradelizi, M. Meyer, A. Zvavitch, *Volume product*, Harmonic analysis and convexity, 163–222.

[6] P. Kalantzopoulos, C. Saroglou, *On a j-Santaló Conjecture*, arXiv:2203.14815v2.

[7] A. Kolesnikov, E.W. Werner, *Blaschke–Santaló inequality for many functions and geodesic barycenters of measures*, Adv. Math. **396** (2022).

[8] J. Lehec, *A direct proof of the functional Santaló inequality*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris. **347** (2009), 55–58.

[9] J. Lehec, *Partitions and functional Santaló inequalities*, Arch. Math. (Basel). **92** (2009), 89–94.

[10] S. Nakamura and H. Tsuji, *A generalized Legendre duality relation and Gaussian saturation*, arXiv:2409.13611.

[11] L.A. Santaló, *An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space*, Port. Math. **8** (1949) 155–161 (in Spanish).

(Hiroshi Tsuji) Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University, Saitama 338-8570, Japan

Email address: `tsujihiroshi@mail.saitama-u.ac.jp`