大域的な比較則と離散 HAMILTON–JACOBI 方程式に関して

北川 潤（ミシガン州立大学）

比較原理や最大値原理は楕円型方程式の解析には欠かせない道具であり，Hamilton–Jacobi 方程式や 2 階楕円型方程式の粘性解の定義に根幹的に関わってくる．逆に比較原理を持つような作用素がどのような形をしているかは非常に興味深い問題である．具体的に以下の定義を考える：

定義 0.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開領域, $\mathbb{R}^\Omega$ を Ω 上の実数値関数の集合, $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^\Omega$ とする．作用素 $I : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^\Omega$ が任意の $u \leq v \in \mathcal{F}$ に対して

$$\exists x_0 \in \Omega \ s.t. \ u(x_0) = v(x_0) \implies I(u)(x_0) \leq I(v)(x_0)$$

を満たす場合，I は大域的な比較則（global comparison property, GCP）をみたすと言う．

例えば線形楕円型作用素はすべて大域的な比較則をみたす．一部だけを述べるが，GCP をみたす I が様々な $\mathcal{F}$ と追加条件のもと，特定の形で書けることが Courrège ([Cou66]), Bony–Courrège–Priouret ([BCP66]), Guillen–Schwab ([GS19, GS20]) らの結果などで知られている．

一方離散空間上で「偏微分方程式」に対応するものを考えたい場合にはそもそも「微分」の代わりとなるようなものをどうするか熟考する必要がある．しかし上記の大域的な比較則は Ω を離散空間に置き換えるだけで変わらず考えることができる．本講演では離散空間上の作用素で GCP を持つものの性質をいくつか述べ，GCP をみたすような具体例をいくつか挙げる．それらの例の中には近年研究対象としてポピュラーなものも含まれており，特に「離散 Hamilton–Jacobi 方程式」として捉えてもよさそうなものもある．

本講演は Nicolo Forcillò と Russell Schwab（ミシガン州立大学）との共同研究に基づく．

参考文献

[BCP66] Jean-Michel Bony, Philippe Courrège, and Pierre Priouret. Sur la forme intégro-différentielle du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur une variété différentiable. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263:A207–A210, 1966.

[Cou66] Philippe Courrège. Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_k^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum. *Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, 10(1):1–38, 1965-1966. talk:2.

[GS19] Nestor Guillen and Russell W. Schwab. Min-max formulas for nonlocal elliptic operators. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 58(6):Paper No. 209, 79, 2019.

[GS20] Nestor Guillen and Russell W. Schwab. Min-max formulas for nonlocal elliptic operators on Euclidean space. *Nonlinear Anal.*, 193:111468, 51, 2020.

email: `kitagawa@math.msu.edu`.