高次元球面に値をとる調和写像流の
有限時間爆発に対する漸近解析について

関　行宏　(東京都立大学大学院理学研究科)

単位球面 $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ に値をとる調和写像流 $F_t = F(\cdot, t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d$ を考える:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta F + |\nabla F|^2 F, \qquad t > 0. \tag{1}$$

標的多様体が球面で断面曲率は正であるため, 時間大域可解性に関する Eells–Sampson (1964) の結果は一般には成り立たない. 実際に調和写像流は時間大域的に存在せず, エネルギー密度 $|\nabla F|^2$ が有限時間で爆発することがある. 本講演では

$$F(x,t) = \left(\frac{x}{r}\sin u(r,t),\, \cos u(r,t)\right) \qquad (r = |x|) \tag{2}$$

と表示される解 (equivariant map) を考察する. すると (1) はスカラー値の半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{d-1}{2r^2}\sin(2u), \qquad r > 0,\, t > 0 \tag{3}$$

に帰着される. $r = 0$ では Dirichlet 境界条件 $u(0,t) = 0$ $(t > 0)$ を課す. $3 \le d \le 4 + 2\sqrt{2}$ のとき, 可算無限個の自己相似解が存在する (Fan(1999), Biernat–Bizoń(2011)). 一方 $d \ge 7$ のとき, すべての爆発は非自己相似的であることが背理法により証明されている (Bizoń–Wesserman(2015)).

講演者は P. Biernat 氏との共同研究 (2019, 2020) で $d \ge 7$ に対して, 詳細な時空各点評価を持つ解 F_ℓ $(\ell = 1, 2, ...)$ を構成した. これらの解のもつ特徴が有限時間で爆発する任意の解に共通して成り立つかを考察することが本講演の主題である. 藤田方程式に対する Matano–Merle (2004), Mizoguchi (2007) 等の研究を参考にして得られたいくつかの成果を報告する.