ハイパーグラフラプラシアンを主要項とする非線型多価発展方程式について *

内田　俊 (大分大学・理工学部)

E-mail: shunuchida@oita-u.ac.jp

1　序

ハイパーグラフとは, 有限集合 $V=\{1,\ldots,N\}$, V の部分集合族 $E\subset 2^V$ (但し各 $e\in E$ は２元以上の要素を含む), E 上の正値関数 $w:E\to(0,\infty)$ の３つ組 $G=(V,E,w)$ として定義され，１から N まで番号付けられた点が $e\in E$ で表される「グループ」により接続されたネットワーク構造を記述する（Figure 1 参照）.

G が通常のグラフの場合，グラフラプラシアン行列と呼ばれる N 次正方行列が定義され，これを用いてグラフの幾何的構造を調べる手法が確立している．本講演ではハイパーグラフの構造解析を目的として吉田悠一氏 [1] により提唱された,「ハイパーグラフラプラシアン」と呼ばれる非線型作用素の定義と基本的な性質，及びこれを主要項とする発展方程式（非線型多価常微分方程式）について得られた結果を紹介する.

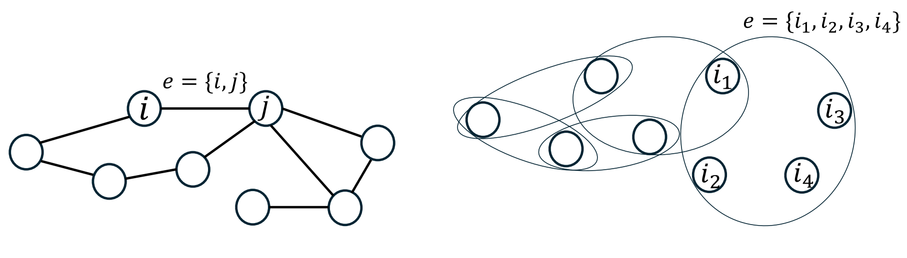

Figure 1　$e\in E$ が２元集合であるとき $e=\{i,j\}$ は２点 i,j を結ぶ線分を表す．そのため E が２元集合のみからなるとき，G は「通常の」グラフを表す．これに対しハイパーグラフでは $\#e\geq 3$ となる $e\in E$ が許され，これは複数の点の接続・交流・グループ化を表すと解釈される（右図）.

---

* 池田正弘氏（慶應義塾大学/理化学研究所）との共同研究に基づく.

2　ハイパーグラフラプラシアンの定義

$\mathbb{R}^N$ 上の実数値連続凸関数として，各 $e \in E$ に対し

$$f_e(x) := \max_{i,j\in e} |x_i - x_j|$$

を定義する．また $e \in E$ について和を取ったものを

$$\varphi_{G,p}(x) := \frac{1}{p}\sum_{e\in E} w(e)(f_e(x))^p$$

とする．$x = (x_1, \ldots, x_N)$ を各頂点における熱量・粒子数とみなすとき，f_e は接続 $e \in E$ 内の「熱勾配」を表すと解釈でき，この意味で $\varphi_{G,p}$ はハイパーグラフ上の「p-Dirichlet エネルギー」に相当する．$p = 2$ とし，G を通常のグラフとすれば，$\varphi_{G,p}$ の全微分はグラフラプラシアン行列に一致する．そのため $\varphi_{G,p}$ が可微分ならばこの微分をラプラシアンと定義すればよいが，$\#e \geq 3$ となる $e \in E$ が存在する（G が『本質的に』ハイパーグラフである）場合，$\varphi_{G,p}$ は微分可能とはならない．

一方で f_e，$\varphi_{G,p}$ は連続凸関数であるため，劣微分 ∂f_e，$\partial\varphi_{G,p}$ が定義できる．f_e の劣勾配は次のようになる：

$$\partial f_e(x) = \operatorname*{arg\,max}_{b\in B_e} b\cdot x = \left\{ b_e \in B_e;\quad b_e \cdot x = \max_{b\in B_e} b\cdot x \right\}$$
$$B_e := \mathrm{conv}\{\mathbf{1}_i - \mathbf{1}_j;\ i,j\in e\}.$$

ここで $\mathbf{1}_i$ は $\mathbb{R}^i$ の第 i 基本ベクトルとする．ハイパーグラフ (p-) ラプラシアン $L_{G,p} : \mathbb{R}^N \to 2^{\mathbb{R}^N}$ は，$\varphi_{G,p}$ の劣微分作用素として定義される．劣微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} L_{G,p}(x) := \partial\varphi_{G,p}(x) &= \sum_{e\in E} w(e)(f_e(x))^{p-1}\partial f_e(x) \\ &= \left\{ \sum_{e\in E} w(e)(f_e(x))^{p-1} b_e;\quad b_e \in \operatorname*{arg\,max}_{b\in B_e} b\cdot x \right\} \end{aligned}$$

と表現できる．ここで指数は $1 \leq p < \infty$ とする．定義から $b_e \in \partial f_e(x)$ ならば $b_e \cdot x = \max_{b\in B_e} b\cdot x = f_e(x)$ であるため，任意の $y \in L_{G,p}(x)$ に対し $x \cdot y = p\varphi_{G,p}(x)$ が成立することに注意する．

3　主結果

以下簡単のために，ハイパーグラフは連結であると仮定する．即ち任意の $i, j \in V$ に対しある $i_1, \dots i_{k-1} \in V$ 及び $e_1, \dots e_k \in E$ が存在，$i_{\mu-1}, i_\mu \in e_\mu$ $(\forall \mu = 1, 2, \dots, k$，但し $i_0 = i, i_k = j)$ を満たすとする．

ハイパーグラフラプラシアン $L_{G,p}$ を主要項とする発展方程式（非線型多価常微分方程式）の初期値問題

$$
\begin{cases} x'(t) + L_{G,p}(x(t)) \ni 0 & t \in (0, \infty), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}
$$

について考察する．$L_{G,p}$ は劣微分として定義されるため，(1) が一意的大域解 $x \in W^{1,\infty}(0, \infty; \mathbb{R}^V)$ を持つことは抽象理論から保証できる．一方 $L_{G,p}$ の構造の複雑さ（非線型性，多価性，接続 $e \in E$ が明示的ではない等）から抽象理論により導かれる結果以上の解の性質については詳細に調べられていなかった．

ここで $x \in \mathbb{R}^N$ の「平均値 $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$」を次で定義する：

$$
\overline{x} := \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right) \mathbf{1}_V \qquad \mathbf{1}_V := (1, \dots, 1).
$$

これに対し我々は次の不等式を導いた：

Theorem 1. p, $\min_{e \in E} w(e)$, N のみに依存する定数 $\gamma_{G,p}, \Gamma_{G,p} > 0$ が存在し，

$$
p\gamma_{G,p}\varphi_{G,p}(x) \le \|x - \overline{x}\|^p \le p\Gamma_{G,p}\varphi_{G,p}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^V. \tag{2}
$$

またこの不等式を用いることで，(1) の解が初期値の平均に漸近することが示された：

Theorem 2. 初期値 $x_0 \in \mathbb{R}^N$ に対する (1) の解を x とする．このとき $\|x(t) - \overline{x_0}\| \to 0$ $(t \to \infty)$ であり，減衰レートは以下の通りとなる：

$$
\|x(t) - \overline{x_0}\| \sim \begin{cases} \text{polynomial decay} & \text{if } p > 2, \\ \text{exponential decay} & \text{if } p = 2, \\ \text{extinction} & \text{if } p < 2. \end{cases}
$$

時間に余裕があれば最近の結果（池田正弘氏，深尾武史氏（龍谷大学）との共同研究 [3, 4]）として，複数の頂点での値が既知関数で与えられた場合（ネットワーク内部から系を制御する問題）について得られた結果も紹介する．

References

[1] Y. Yoshida, Cheeger inequalities for submodular transformations, Proc. 2019 Annu. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA) (2019), 2582–2601.

[2] M. Ikeda; S. Uchida, Nonlinear evolution equation associated with hypergraph Laplacian, Math. Meth. Appl. Sci 46(8) (2023), 9463–9476.

[3] T. Fukao; M. Ikeda; S. Uchida, Heat equation on the hypergraph containing vertices with given data, J. Math. Anal. Appl., 540 (2024), no.128675, 19 pp.

[4] T. Fukao; M. Ikeda; S. Uchida, Optimal control problem of evolution equation governed by hypergraph Laplacian, preprint, arXiv:2409.00370.