Accidental isogeny について

熊本大学大学院自然科学研究科　成田宏秋

1　古典型単純複素 Lie 群及び Lie 環の分類とその実型式

1. A_n-型：$SL(n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{s}l(n,\mathbb{C}))$

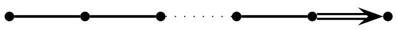
   Dynkin 図形：

   実形式 (以下 $\mathbb{H}$ は Hamilton の四元数環を表す)：

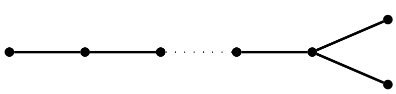
   $SL(l,\mathbb{R})$ $(\mathfrak{s}l(l,\mathbb{R}))$, $SL(m,\mathbb{H})$ $(\mathfrak{s}l(m,\mathbb{H}))$, $SU(p,q)$ $(\mathfrak{s}u(p,q))$.

2. B_n-型と D_n-型：$SO(2n+1,\mathbb{C})$, $SO(2n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{s}o(m,\mathbb{C}))$ $*$ $SO(4)$, $\mathfrak{s}o(4)$ は除く.

   Dynkin 図形, B 型：

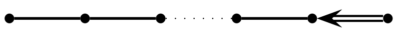
   

   Dynkin 図形, D 型：

   実形式：$SO(p,q)$ $(\mathfrak{s}o(p,q))$, $SO^*(2n)$ $(\mathfrak{s}o^*(2n))$.

3. C_n-型：$Sp(n,\mathbb{C})$ $(\mathfrak{s}p(n,\mathbb{C}))$
   Dynkin 図形：

   実形式：$Sp(n,\mathbb{R})$ $(\mathfrak{s}p(n,\mathbb{R}))$, $Sp(p,q)$ $(\mathfrak{s}p(p,q))$.

4. 実形式 ($N_{\mathbb{H}}$ と $\tau_{\mathbb{H}}$ はそれぞれ $M(m,\mathbb{H})$ の被約ノルムと被約トレースを表す)：

$SL(l,\mathbb{R}) := \{g \in M(l,\mathbb{R}) \mid \det(g) = 1\},\ SL(m,\mathbb{H}) := \{g \in M(m,\mathbb{H}) \mid N_{\mathbb{H}}(g) = 1\},$

$$SU(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SU^*(2n) := \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SL(2n,\mathbb{C}) \mid z_1,\ z_2 \in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq SL(n,\mathbb{H})),$$

$$SO(p,q) := \{g \in SL(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\},$$

$$SO^*(2n) := \{g \in SU(n,n) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(n,\mathbb{R}) := \{g \in SL(2n,\mathbb{R}) \mid {}^t g\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}\},$$

$$Sp(p,q) := \{g \in M(p+q,\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix}\}.$$

但し $Sp(p,0)$ は $Sp(p)$ と記す. 対応する Lie 環は以下で与えられる.

$\mathfrak{sl}(l,\mathbb{R}) := \{X \in M(l,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\},\ \mathfrak{sl}(m,\mathbb{H}) := \{X \in M(m,\mathbb{H}) \mid \tau_{\mathbb{H}}(X) = 0\},$

$$\mathfrak{su}(p,q) := \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\},$$

$$\mathfrak{su}^*(2n) := \{\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}) \mid z_1,\ z_2 \in M(n,\mathbb{C})\}(\simeq \mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})),$$

$$\mathfrak{so}(p,q) := \{X \in \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}) \mid {}^t X\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\},$$

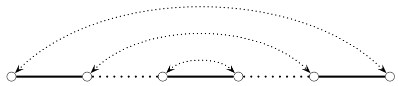
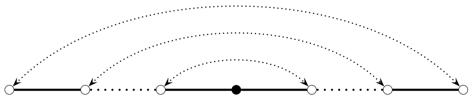
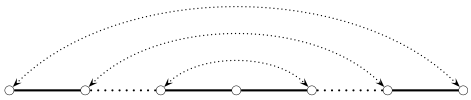
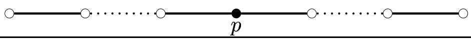
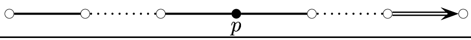
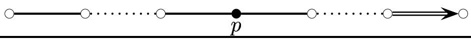
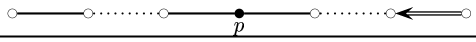
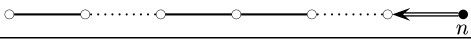
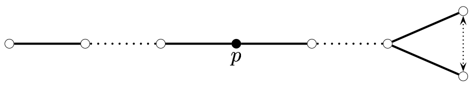
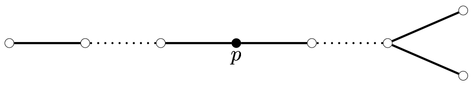
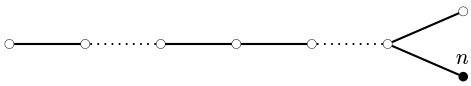
$$\mathfrak{so}^*(2n) := \{X \in \mathfrak{su}(n,n) \mid {}^t X\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix} X = 0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R}) \mid {}^t X\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} X = 0_{2n}\},$$

$$\mathfrak{sp}(p,q) := \{X \in M(p+q,\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{X}\begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & -1_q \end{pmatrix} X = 0_{p+q}\}.$$

但し $\mathfrak{sp}(p,0)$ は $\mathfrak{sp}(p)$ と記す.

5. Vogan 図形 (非コンパクト実単純 Lie 環の場合)：

Dynkin 図形	Lie 代数	Vogan 図形
A_{2n}	$\mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	
A_{2n-1}	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$ $(n \geq 2)$	
A_{p+q-1}	$\mathfrak{su}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(1 \leq p \leq q)$	
B_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q+1)$ $(p > q \geq 0)$	
C_{p+q}	$\mathfrak{sp}(p,q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
C_n	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	
D_{p+q+1}	$\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$	
D_{p+q}	$\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$	
D_n	$\mathfrak{so}^*(2n)$ $(n \geq 3)$	

注意：

- $\mathfrak{so}(2p+1,2q+1)$ $(0 \leq p \leq q)$ について, $\mathfrak{so}(1,1)$, $\mathfrak{so}(1,3)$ は除き, $p=0$ のときは黒丸なし.
- $\mathfrak{so}(2p,2q)$ $(1 \leq p \leq q)$ では $\mathfrak{so}(2,2)$ を除く.

2 低次元Lie環の同型の表 (参考:[Helgason, Ch.X, §6, 4])

$A_1 = B_1 = C_1$ の実型：

1. $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{sp}(1)$.
2. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{su}(1,1) \simeq \mathfrak{so}(2,1) \simeq \mathfrak{sp}(1,\mathbb{R})$.

$B_2 = C_2$ の実型：

1. $\mathfrak{so}(5) \simeq \mathfrak{sp}(2)$.
2. $\mathfrak{so}(3,2) \simeq \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$.
3. $\mathfrak{so}(4,1) \simeq \mathfrak{sp}(1,1)$.

$A_3 = D_3$ の実型：

1. $\mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6)$.
2. $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(3,3)$.
3. $\mathfrak{su}^*(4) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) \simeq \mathfrak{so}(5,1)$.
4. $\mathfrak{su}(2,2) \simeq \mathfrak{so}(4,2)$.
5. $\mathfrak{su}(3,1) \simeq \mathfrak{so}^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$の実型：

1. $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(1)$.
2. $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
3. $\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.
4. $\mathfrak{so}^*(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

その他：

1. $\mathfrak{so}^*(8) \simeq \mathfrak{so}(6,2)$.

3 低次元 Lie 群の同型 (Accidental isogeny) の表 (参考：[横田, 第１０節] など)

＊ G_0 は Lie 群 G の単位元の連結成分を表す.

$A_1 = B_1 = C_1$ の実型：

1. $SU(2) \simeq Sp(1) \simeq Spin(3),\ Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$.
2. $SU(1,1) \simeq SL(2,\mathbb{R})$.
3. $SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(2,1)$.

$B_2 = C_2$ の実型：

1. $Sp(2) \simeq Spin(5),\ Sp(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(5)$.
2. $Sp(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(2,3)$.
3. $Sp(1,1)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(4,1)$.

$A_3 = D_3$ の実型：

1. $SU(4)/\{\pm 1\} \simeq SO(6)$.
2. $SL(4,\mathbb{R})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(3,3)$.
3. $SU^*(4) \simeq SL(2,\mathbb{H}),\ SL(2,\mathbb{H})/\{\pm 1\} \simeq SO_0(5,1)$.
4. $SU(2,2)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(4,2)$.
5. $SU(3,1) \simeq SO^*(6)$.

$D_2 = A_1 \times A_1$ の実型：

1. $SO(4) \simeq (Sp(1) \times Sp(1))/\{\pm 1\}$.
2. $SO_0(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$.
3. $SO_0(2,2) \simeq (SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm 1\}$.
4. $SO^*(4) \simeq (Sp(1) \times SL(2,\mathbb{R}))/\{\pm 1\}$.

その他 I (上以外) :

1. $SO^*(8)/\{\pm 1\} \simeq SO_0(6,2)/\{\pm 1\}$.

その他 II (similitude 因子付きの場合)

1. $PGL(2,\mathbb{R})(:= GL(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,1)$.
2. $PGSp(2,\mathbb{R})(:= GSp(2,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(2,3)$.
3. $PGSp(1,1)(:= GSp(1,1)/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(4,1)$.
4. $PGL(2,\mathbb{H})(:= GL(2,\mathbb{H})/\mathbb{R}^\times) \simeq SO(5,1)$.
5. $(GL(4,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(3,3)$.
6. $(GL(2,\mathbb{H}) \times \mathbb{R}^\times)/\{(z, z^{-2}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(5,1)$.
7. $(GSp(1) \times GSp(1))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO(4)$.
8. $(GSp(1) \times GL(2,\mathbb{R}))/\{(z, z^{-1}) \mid z \in \mathbb{R}^\times\} \simeq GSO^*(4)$.

∗偶数次数 m の非退化対称行列 Q で定義される similitude 因子付き直交群 $GO(Q)$, $GSO(Q)$ は以下で実現できる.

$$
\begin{aligned}
GO(Q) &:= \{g \in GL(m,\mathbb{R}) \mid {}^t gQg = \nu(g)Q,\ \nu(g) \in \mathbb{R}^\times\},\\
GSO(Q) &:= \{g \in GO(Q) \mid \det(g) = \nu(g)^{\frac{m}{2}}\}.
\end{aligned}
$$

4　低次元 Lie 群上の保型形式のリフティングの表

	保型形式のレベルでの対応	テータ対応による解釈
志村 (丹羽) 対応	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(1)}_{2k}$	$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \to O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R}))$
新谷リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{2k} \to \mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}}$	$O(2,1)(\sim SL(2,\mathbb{R})) \to \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$
斉藤-黒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{(2)}_{k+1}$	$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \to O(3,2)(\sim Sp(2,\mathbb{R}))$
土井-長沼リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \to \mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(k,k)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2,2)(\sim SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}))$
吉田リフト	$\mathcal{A}_{k_1}(B^\times) \times \mathcal{A}_{k_2}(B^\times) \to \mathcal{M}^{(2)}_{(l_1,l_2)}$	$O(4)(\sim \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(2,\mathbb{R})$
織田リフト (even)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1} \to \mathcal{S}^{IV,2n}_{k}$	$SL(2,\mathbb{R}) \to O(2n,2)$
織田リフト (odd)	$\mathcal{S}^{(1)}_{k-n+1+\frac{1}{2}} \to \mathcal{S}^{IV,2n-1}_{k}$	$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \to O(2n-1,2)$
Kudla リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{\mu-\nu+1-q} \to M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$	$SL(2,\mathbb{R}) \simeq SU(1,1) \to SU(1,q)$
荒川リフト	$\mathcal{S}^{(1)}_{k} \times \mathcal{A}_k(B^\times) \to \mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0\ldots,0,k)}(Sp(1,q))$	$SO^*(4)(\simeq SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times/\mathbb{R}^\times) \to Sp(1,q)$

記号：

- $k,\ k_1,\ k_2,\ \mu$ は正の整数, ν は非負整数.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa}$ ：重さ整数 κ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{(1)}_{\kappa+\frac{1}{2}}$ ：重さ半整数 $\kappa+\frac{1}{2}$ の楕円カスプ形式の空間.
- $\mathcal{M}^{(2)}_{*}$:重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel 保型形式の空間 (吉田リフトにおいては $(l_1,l_2) = (k_1+k_2+2, k_1-k_2+2),\ k_1 \geq k_2$).
- $\mathcal{S}^{(2)}_{*}$ ：重さ $*$ の次数 2 の正則 Siegel カスプ形式の空間.
- $\mathcal{S}^{\mathrm{Hilb}}_{(\kappa,\kappa)}$ ：重さ (κ,κ) の (正則)Hilbert カスプ形式の空間.
- $\mathcal{A}_*(B^\times)$：重さ $*$ の定符号四元数環の乗法群 $B^\times$ 上の保型形式の空間.
- $M^{I,q}_{(\mu,\nu)}$: "重さ (μ,ν)" の q 次元複素超球 (I 型領域) 上の正則カスプ形式の空間 (Kudla リフトにおいては $\mu-\nu > 2q+1$).
- $\mathcal{S}^{IV,m}_{k}$ ：重さ k の m 次元 IV 型対称領域上の正則カスプ形式の空間 (織田リフトにおいては $k > 2n+2$(even の場合) または $k > 2n+1$(odd の場合)).
- $\mathcal{S}^{\mathrm{QDS}}_{(0,\ldots,0,k)}(Sp(1,q))$：重さ $(0,\ldots,0,k)$ の $Sp(1,q)$ の四元数離散系列表現を生成するカスプ形式の空間 (荒川リフトにおいては $k > 4q+2$, $q=1$ ならば $k > 4q = 4$ とできる).