はじめに

微分方程式と差分方程式は似ているところが多々あるとよくいわれる．実際, 微分方程式で得られた結果に類似的結果が多く散見される．というよりむしろ, 類似の結果を求めるほうが簡単であったというべきだろう．ある程度研究が進めば, 同様の手法が適用することが困難になってくる．実は逆に差分の綺麗な結果が微分に反映しているようにみえる．特別な変換

$$e^{d/dx}$$

が $+1$ 差分を表現していることから類推されるように, 微分から得られる差分に関してなんらかの結果があるなら, それは微分によって表現できることになる．しかし, 逆はうまくいかない．典型的な例は, Kolchin の意味の普遍微分拡大は差分においてはその存在を考えることができないという事実である．もっとも重大な違いが代数拡大を考察する場合にみられる．たとえば指数関数の定義式

$$De = e \neq 0$$

によって微分体 $\mathbf{C}(e)$ をつくり, その 2 次拡大を $K = \mathbf{C}(f),\ f^2 = e$ とする．K は微分体になる．微分が

$$Df = \frac{1}{2}f$$

によって決まる．実際 $f^2 = e$ を微分して $2fDf = De = e = f^2$ であるから．一方 τ を $\tau x = x + 1$ によって定義される変換とし, $\tau e = 2e$ によって定義される差分体 $\mathbf{C}(e)$ の 2 次拡大 $K = \mathbf{C}(f),\ f^2 = e$ には,

$$\tau f = \pm f$$

と 2 種の変換 の可能性がでてくる．変換の不定性が微分の場合と違って複雑な議論の必要性をもたらすのである．

　このように微分と差分との間の相違が一体どういうものなのかを知ることは大変興味あることがらではあるが, 似ているところはどこかを知ることも意義あると思われる．というより, むしろ似ているところの限界として特異性が出現するというべきだろう．類似の結果を予想し, 実際にその証明を考えることで, はじめて相違点をみつけることができる．今般わたしが筆をとった理由もそこにあり, ここで議論したことがらが, 学生のみなさんが相違点をどんどん見つける手助けになればと期待する．

さて, この論説では考察する環や体は可換であり, 有理数体 $\mathbf{Q}$ を部分環や部分体として含むものとする．すなわち標数 0 の可換体を考察の対象とする．環 R が微分環であるとは, 内部に作用する微分作用 $D: R \to R$ を議論において考慮に入れるときにいう．ここで

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = aDb + bDa \quad (a, b \in R)$$

環 R が差分環とは変換 $\tau: R \to R$ を考慮に入れた場合をいう．

$$\tau(a+b) = \tau a + \tau b, \quad \tau(ab) = \tau(a)\tau(b) \quad (a, b \in R)$$

すなわち τ は R の差分作用とよばれる内部準同型である．$\tau R = R$ のとき, R は inversive であるという．$[R:\tau R] < +\infty$ のとき, R は quasi-inversive (西岡斉治の用語) と称える．微分の場合, これに対応する用語はない．

基本概念

K は標数 0 の可換体とする．K が微分体 (微分環で体) のとき,

$$C_K = \{c \in K \mid Dc = 0\}$$

を K の constant field という．実際, これは K の部分体になる．C_K の元を K の constant という．

K が差分体 (差分環で体) のとき,

$$C_K = \{c \in K \mid \tau c = c\}$$

を K の invariant subfield という．実際, これは K の部分体になる．C_K の元を K の invariant という．$a \in K$ はある整数 $n > 0$ で $\tau^n a = a$ なるとき, K の periodic element とよばれる．periodic elements 全体は K における C_K の代数閉体になる．実際, $\tau^n a = a$ $(n > 0)$ とすると $a, \tau a, \ldots, \tau^{n-1} a$ の対称式は K の invariant になるから．逆に, $a \in K$ が C_K 上代数的ならば, それは periodic である．なぜなら, $\tau^k a$ は C_K 上すべて同じ代数方程式をみたすから, ある h で $\tau^h a = a$ が成り立つからである．

$[K:\ C_K] < +\infty$ のとき, K は periodic とよばれ, そうでないとき aperiodic とよばれる．前者の場合, $a \in K$ は C_K 上代数的であるから, K の各元は periodic である．

可算個の不定元 $Y_0, Y_1, \ldots$ による体 K 上の多項式環を $K[Y_0, Y_1, \ldots]$ と書く．K が差分体のとき, $Y = Y_0, Y_k = \tau^k Y$ とすることによって $K[Y_0, Y_1, \ldots]$ は差分環になる．これ

を $K\{Y\}$ と書き, K 上 Y に関する差分多項式環という. K 上代数的 (常) 差分方程式とは, ある $F \in K\{Y\}$ によって

$$F(y, \tau y, \ldots, \tau^n y) = 0$$

と表示される方程式である. Y_n が F に真に現れるが, Y_k $(k > n)$ は F に現れないとき, n を F の order といい, $n = \mathrm{ord}\, F$ と記述する. このとき, 代数的差分方程式 $F(y) = 0$ は n 階であるといわれる.

L/K を差分拡大とする. すなわち, L は K 上のそれに一致する差分作用 τ をもつとする. $y \in L$ を含む最少の差分拡大 M/K を $K\langle y\rangle$ と記し, y を生成元とする差分拡大という.

$$M = K\langle y\rangle = K(\tau^k y \mid 0 \leq k)$$

と書いても意味はわかると思う. いくつかの元を生成元とする差分拡大も考えることができる. 同様の記法を用いることにする.

$$K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle = K(\tau^h y_k \mid 0 \leq h, 1 \leq k \leq n)$$

$y \in L$ は非零な $A \in K\{Y\}$ で $A(y) = 0$ をみたすとき, K 上差分代数的であるという. このとき,

$$\mathrm{td}\ K\langle y\rangle/K \leq \mathrm{ord}\ A$$

である. ここで td は超越次数を示す. y が K 上差分代数的でないとき, それは K 上差分超越的であるといわれる. このとき $\mathrm{td}\ K\langle y\rangle/K = +\infty$ である.

L/K を差分拡大とする. $y_1, \ldots, y_n \in L$ は, 各 k に対して y_k が $K\langle y_1, \ldots, y_{k-1}\rangle$ 上差分超越的であるとき, K 上差分独立という. このとき L の各元が $K\langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ 上差分代数的ならば, $y_1, \ldots, y_n$ は L の K 上差分超越基底とよばれる.

文字 $Y_1, \ldots, Y_m$ を用いて多変数の差分多項式環 $K\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ を 1 変数の $K\{Y\}$ と同様に定義することができる. 差分拡大 L/K の元 $y_1, \ldots, y_m$ が K 上差分代数的に従属であるとは,

$$A(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

を満たす非零な $A \in K\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ が存在するということである.

$y_1, \ldots, y_m$ は K 上差分独立であるとする. このとき $z \in K\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$ が K 上差分代数的ならば $z \in K$ である. $n = 1$ のとき $z \notin K$ なら, z は $K\{y_1\}$ の 2 元の比で表わされ, 分母分子どちらかにある $\tau^k y_1$ が含まれる. y_1 はしたがって $K\langle z\rangle$ 上差分代数的である. z が K 上差分代数的であるから, y_1 もそうであり, 矛盾. あとは induction で証明を完了する.

Cyclic vectors

K を inversive difference field とし, V/K をベクトル空間, 加群準同型 を τ とする. これは $\tau(av) = \tau(a)\tau(v)$, $a \in K, v \in V$ をみたすものである.

命題　K を aperiodic とする. このとき, もし $n = \dim V < \infty$ ならば, cyclic vector $v_0 \in V$ が存在する. すなわち

$$V = \langle v_0, \tau v_0, \ldots, \tau^{n-1} v_0 \rangle = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K \tau^i v_0$$

証明　$0 \neq u \in V$ を任意にとり, $U = \langle u, \tau u, \ldots, \tau^{m-1} u \rangle$, $m = \dim U$ とし $\tau^m u \in U$ と仮定する. $m = n$ ならここで証明を終える. $m < n$ と仮定する. $v \notin \langle u, \tau u, \ldots, \tau^{m-1} u \rangle$ をとり, t を差分不定元として $z = u + tv$ とおく.

$$\omega_0 = u \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^{m-1} u \wedge \tau^m v$$

とする. すると $\omega_0 \neq 0$ である. なぜなら u は K 上線形差分方程式の解であることから U は inversive となり, もし, $\tau^m v \in U$ ならば $v \in U$ となる. これは仮定に反する. (ω) を ω_0 を含む K 上基底とし,

$$z \wedge \tau z \wedge \cdots \wedge \tau^m z = \sum_{\omega} F_\omega \omega$$

と表す. 各 F_ω は t に関する差分多項式である. その t に関する線形項は

$$tv \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^m u + u \wedge \tau(tv) \wedge \cdots \wedge \tau^m(u) + \cdots + u \wedge \tau u \wedge \cdots \wedge \tau^m(tv)$$

したがって F_{ω_0} は $\tau^m t$ を含み, 0 にならない. K は aperiodic であるから, つぎの節より, ある $a \in K$ で, $F_{\omega_0}(a) \neq 0$ が成り立つ. よって

$$z \wedge \tau z \wedge \cdots \wedge \tau^m z$$

は, $t = a$ のとき, 0 ではない. すなわち, $z, \tau z, \ldots, \tau^m z$ は K 上線形独立である. z の作り方を必要な回数実行すれば v_0 の存在がいえる.

線形従属性

K を標数 0 の差分体, C_K を K の不変元全体からなる部分体とし, L/K を差分拡大とする.

$0 \neq A \in K\{Y\}$ を $\deg A = 1$, $\mathrm{ord}\, A = n$ の斉次差分多項式であるとする．方程式 $A(y) = 0$ を n 階線形斉次差分方程式という．$A(y) = 0$ をみたす $y \in L$ 全体は高々 n 次元 C_L-vector 空間であることを示そう．

実際 $A = \sum_{k=0}^{n} a_k Y_k$, $a_n \neq 0$ とおく．いま $y_1, \ldots, y_{n+1} \in L$ が $A(y_i) = 0$ をみたし，C_L 上線形独立であるとする．

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k y_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

であるが，つぎに示すように Casoratian $\det(\tau^k y_i) \neq 0$ $(0 \leq k \leq n,\ 1 \leq i \leq n+1)$ であるから，$a_k = 0$ $(0 \leq k \leq n)$ を得て，矛盾になる．

命題　$y_1, \ldots, y_n \in L$ が C_L 上線形従属であるためには $\det(\tau^i y_j) = 0$ $(0 \leq i \leq n-1,$ $1 \leq j \leq n)$ であることが必要十分である．

証明　$y_1, \ldots, y_n \in L$ が C_L 上線形従属であると仮定する．非自明な C_L 上線形関係式

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j = 0$$

が成立する．$(c_j) \neq 0$ である．これより

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tau^i y_j = 0 \quad (0 \leq i)$$

よって $\det(\tau^i y_j) = 0$ を得る．逆に Casoratian が 0 と仮定する．

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \tau^i y_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

を満足する，すべてが 0 とは限らない $c_j \in L$ が存在する．たとえば $c_1 = 1$ としてよい．$\sum_j c_j \tau^{i-1} y_j = 0$ に τ を作用させて，上式との差をとれば

$$\sum_{j=2}^{n} (\tau c_2 - c_2)\tau^i y_2 + \cdots + (\tau^i c_n - c_n)\tau^i y_n = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

を得る．すべての c_j が C_L に属するならば話は終わる．もし $\tau^i c_j \neq c_j$ なる j が存在すれば $\det(\tau^i y_j)_{1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n} = 0$ となる．そして帰納法を使えば，すべてが 0 とは限らない $a_j \in C_L$ が存在して $\sum_{j=2}^{n} a_j \tau y_j = 0$ を得る．よって $\sum_{j=2}^{n} a_j y_j = 0$ を得る．

以下, K は aperiodic すなわち, C_K 上無限次元 vector 空間と仮定する.
$[K:\ C_K]=+\infty$ である.

K 上非自明な線形斉次差分多項式 $A\in K\{Y\}$ に対して, ある $u\in K$ で $A(u)\neq 0$ となるものがある. 実際, n を A の階数とすれば, $A(y)=0$ の解 $y\in K$ 全体は C_K 上有限次元線形空間である. したがって, $A(u)=0$ をみたさない $u\in K$ が存在する.

一般の $(0\neq)A\in K\{Y\}$ に対して, $A(u)\neq 0$ なる $u\in K$ が存在する. $n=\deg A$ に関する帰納法でこれを示す. $A\in K$ の場合明らか. あらたな差分不定元 Z を用いて

$$B=\frac{\partial A}{\partial Y}Z+\frac{\partial A}{\partial Y_1}Z_1+\cdots+\frac{\partial A}{\partial Y_n}Z_n\in K\{Y,Z\}$$

とおく. n は A の階数である. 帰納法の仮定により $\frac{\partial A}{\partial Y_n}(a)\neq 0$ なる $a\in K$ が存在する. また, $B(a,Z)$ は線形であるから $B(a,b)\neq 0$ なる $b\in K$ が存在することがわかる. 任意の整数 k に対して $A(a+kb)=0$ が成り立つならば, $B(a,b)=0$ でなければならないから, ある k で $A(a+kb)\neq 0$ が成立する.

この結果は微分体においても類似的に成立し, 同様に証明される.

命題 K を aperiodic すなわち $[K:C_K]=+\infty$ をみたす inversive 差分体, 差分拡大 L/K を inversive, そして体として有限生成とする. このとき, ある $\eta\in L$ で $L=K\langle\eta\rangle$ なるものが存在する.

証明 つぎを証明すればよい: $\alpha,\beta\in L$ とすれば, ある $e\in K$ で $K\langle\gamma\rangle=K\langle\alpha,\beta\rangle$ なるものが存在する. ただし $\gamma=\alpha+e\beta$ とした. さて t を差分不定元, $u=\alpha+t\beta$ とする. t,u は K 上差分代数的に従属であるから $0\neq A\in K\{y,z\}$ が存在し

$$A(t,u)=0$$

が成り立つ. $\frac{\partial A}{\partial z_r}(t,u)\neq 0$ と仮定してよい. ここで $r=\mathrm{ord}_z\ A$ とした. 上記の関係式を t_r で微分すれば

$$\frac{\partial A(t,u)}{\partial t_r}=\frac{\partial A}{\partial y_r}(t,u)+\frac{\partial A}{\partial z_r}(t,u)\tau^r\beta=0$$

を得る. K は aperiodic であるから $e\in K$ で

$$\frac{\partial A}{\partial z_r}(e,\gamma)\neq 0\quad(\gamma=\alpha+e\beta)$$

なるものがある. t に e を代入して

$$\frac{\partial A}{\partial y_r}(e,\gamma)+\frac{\partial A}{\partial z_r}(e,\gamma)\tau^r\beta=0$$

したがって $\tau^r\beta \in K\langle\gamma\rangle$ であるが, K, L は inversive であるから $K\langle\gamma\rangle$ も inversive である. したがって $\beta \in K\langle\gamma\rangle$, 故に $K\langle\gamma\rangle = K\langle\alpha,\beta\rangle$ となる.

微分加群

K を標数 0 の可換体, L/K を拡大体, M を L 加群とする. L から M への K 上微分とは

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = aDb + bDa \quad (a, b \in L)$$

をみたす $D : L \to M$ で, K 上自明なものである. それら全体を $\mathrm{Der}_K(L, M)$ と表す. $\mathrm{Der}_K(L, M)$ は L 加群になる. $M = L$ のとき, $\mathrm{Der}(L/K)$ と記す. それは交換子によって Lie 環になる. その双対加群を $\Omega_{L/K}$ と記し, L の K 上微分加群と称する. 加群準同型 $d_{L/K} : L \to \Omega_{L/K}$ が

$$dx(D) = Dx \quad (x \in L)$$

によって定義される. $\Omega_{L/K}$ は $d_{L/K}L = \{d_{L/K}x \mid x \in L\}$ によって生成される.

　M を L 加群とするとき, 任意の $D \in \mathrm{Der}_K(L, M)$ に対して, ある L 上線形写像 $\alpha : \Omega_{L/K} \to M$ で

$$D = \alpha \circ d_{L/K}$$

が L 上で成立するものがある. 実際 M は L 上ベクトル空間であるから, $M = L$ の場合を示せばよい.

$$\alpha(\omega) = \omega(D) \quad (\omega \in \Omega_{L/K})$$

がその定義である. $x \in L$ に対して

$$\alpha(d_{L/K}x) = d_{L/K}x(D) = D(x) \quad (x \in L)$$

であるから well-defined である.

　K は差分体, L/K は差分拡大であるとしよう. 変換 τ から微分加群 $\Omega_{L/K}$ はつぎによって, あらたな L 加群になる.

$$x \cdot \omega = \tau(x)\omega \quad (x \in L)$$

したがって, つぎの加群準同型 $\tau^* : \Omega_{L/K} \to \Omega_{L/K}$ が得られる.

$$\tau^*(ad_{L/K}b) = \tau(a)d_{L/K}\tau b \quad (a, b \in L)$$

たとえば, $g \in L$ が $f = \delta g = \tau g - g \in K$ をみたすとき

$$\tau^* d_{L/K}g = d_{L/K}\tau g = d_{L/K}(g + \delta g) = d_{L/K}g$$

また $a = \tau g/g \in K$ のとき

$$\tau^*(g^{-1}d_{L/K}g) = (\tau g)^{-1}d_{L/K}(\tau g) = (ag)^{-1}d_{L/K}(ag) = g^{-1}d_{L/K}g$$

が成り立つ.

Ore domain

出典は

S.A. Amitsur: Commutative linear differentail operators, Pacific J. Math. 8(1958), 1-10

K を差分体とする. τ に関する不変元全体を F で示す.

$$F = \{a \in K \mid \tau a = a\}$$

積を

$$\xi a = \delta a + \tau(a)\xi, \quad \delta(a), \tau(a) \in K$$

によって, 不定元 ξ に関する形式的和 $\sum_{i=0}^{n} a_i\xi^i$, $a_i \in K$ 全体からなる集合 $K[\xi]$ が結合法則と分配法則が成り立つ環になるようにする. すると, δ は微分ではないが,

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta b$$

が成り立つ. $K[\xi]$ を Ore domain という. deg は通常の多項式環と同様に定義される. Ore domain は零因子をもたない (だから, domain).

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

がなりたつ. もし $\delta = 0$ なら $K[\xi]$ は差分環となる.

$K[\xi]$ の元 $f = a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_n$ の中心化を

$$Z_f = \{g \in K[\xi] \mid fg = gf\}$$

によって表わす. Z_f は $K[\xi]$ の部分環である.

つぎの定理は与えられた微分作用素 f に可換な微分作用素は f と代数的関係をもつという周知の結果の類似である. 一般の Ore domain $K[\xi]$ において考えるため条件が強くなっている. 定理の証明は, Amitsur の議論そのままだ. だから Amitsur の定理というべきである.

定理（Amitsur）　F は K 内で代数的に閉じてい, $\delta F = \{0\}$ をみたすと仮定する．このとき, Z_f は自由 $F[f]$-加群である．その次元は n の約数である．そして Z_f は可換である．

証明　まず $a \in K$ が周期的, すなわち $\tau^k a = a$ が成立するとすると a は F 上代数的であるから, $a \in F$ そして $\delta a = 0$, $\xi a = a\xi$ であることに注意しよう．よって $F[f] \subset Z_f$ である．いま $g \in Z_f$, $m = \deg g$ の initial を g_0 とすれば τ^{m+n} の係数を比較して

$$a_0 \tau^n g_0 = g_0 \tau^m a_0$$

を得る．したがって, もし, $h \in Z_f$, $\deg h = m$ ならば h の initial h_0 も同様の関係式をみたす．よって, ある $c \in F$ で $g_0 = ch_0$ となるものが存在する (Amizur の Lemma 1. Amitsur の証明の本質)．これより Amitzur の Lemma 2 がいうところのつぎの結果が得られる：次数 m 以下の Z_f の元全体は F 上有限次元加群である．

$M_f = \{\deg g \mid g \in Z_f\}$ とし, $\pi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を canonical projection とする．M_f は和に関して閉じている．πM_f は $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の部分加群であるから, 位数 $\rho | n$ の cyclic submodule である．$\pi M_f = \{\pi m_1, \ldots, \pi m_d\}$ とする．ここで $m_1 = 0$ で, $m_i > 0$ は最少とする．（ここでは群論の基礎的事実を使用している．）

$g_i \in Z_f$ を $m_i = \deg g_i$ なるものとすれば, それらは $F[f]$ 上線形独立である．実際

$$g_1\phi_1 + \cdots + g_d\phi_d = 0, \quad \phi_i \in F[f]$$

で, ある $\phi_h \neq 0$ としよう．次数を考えれば $\deg g_i\phi_i = \deg g_j\phi_j$ なる $i \neq j$ が存在する．mod n でみれば $m_i \equiv m_j$ となり矛盾である．

任意の $g \in Z_f$ は

$$g = g_1\phi_1 + \cdots g_d\phi_d, \quad \phi_i \in F[f]$$

と表すことができることを示そう．$\deg g$ に関する帰納法によって証明する．$\deg g = 0$ は $g \in F$ を示すから主張は正しい．$m = \deg g > 0$ と仮定する．$m \in M_f$ であるから, ある i で $m \equiv m_i \bmod n$, したがって $m = m_i + nk$ と表せられる．$c \in F$ を

$$\deg(g - cg_i f^k) < m$$

なるように選ぶ．帰納法の仮定によってわれわれの主張が示される．

Z_f が可換であることを示す．$g \in Z_f$ を $\deg g$ が M_f を mod n で生成するものとする．各 $\deg g_i$ は mod n で, ある g のべきの次数と合同である．M_f に属する数は, ある m_i に合同であるから, Z_f の各元は有限個を除いて $F[f, g]$ のある元と同じ次数をもつ．除外される多項式の次数を N 以下としよう．すると任意の $h \in Z_f$ に対して, j を任意の非零正

数とするとき, $f^j h = u_j + v_j$ なる $u_j \in F[f,g]$, $v_j \in Z_f$, $\deg v_j \leq N$ が存在する．このような v_j 全体は F 上有限次元である．よって $p \in F[f], u \in F[f,g]$ で $ph = u$ なるものが存在する．さて $\phi, \psi \in Z_f$ とする．ある $p.q \in F[f]$ で $p\phi$, $q\psi \in F[f,g]$ なるものがある．

$$(pq)(\phi\psi) = (p\phi)(q\psi) = (q\psi)(p\phi) = (pq)(\psi\phi)$$

である．なぜなら $F[f,g]$ は可換であるから．よって $\phi\psi = \psi\phi$ すなわち, Z_f は可換である．

この Amitsur の定理によって, 次が得られる．Z_f は可換整域である．その商体を $\langle Z_f \rangle$ と書く．$F(f) \subset \langle Z_f \rangle$ である．上記の g は Z_f 上 d 次代数的である．よって

$$[\langle Z_f \rangle : F(f)] = d$$

を得る．

Harris-Sibuya の定理

出典は

W.A.Jr. Harris & Y. Sibuya: The reciprocals of solutions of linear ordinary differential equations, Adv. in Math. 58(1985), 119-132

K を inversive 差分体, L/K を差分拡大とする．$y \in L$ は K 上の線形斉次差分方程式

$$\tau^n y + a_1 \tau^{n-1} y + \cdots + a_n y = 0$$

の非自明解とする．このとき $K\langle y \rangle$ は inversive である．なぜならば h を $a_h \neq 0$ なる最大数とする．

$$\tau^h(\tau^{n-h} y + b_1 \tau^{n-h-1} y + \cdots + b_h y) = 0 \quad (\tau^h b_k = a_k)$$

であるから

$$\tau^{n-h} y + b_1 \tau^{n-h-1} y + \cdots + b_h y = 0$$

を得る．y は $\tau^k y$ $(1 \leq k \leq n-h)$ で表わされるから, $y \in \tau(K\langle y \rangle)$ である．

定理 (Harris-Sibuya)　 K を inversive とし, L/K を差分拡大とする．$y \in L$ およびその逆数 $1/y$ は K 上線形斉次差分方程式をみたすと仮定する．このとき, 自然数 h で $\tau^h y/y$ が K 上代数的とするものが存在する．

証明　K は代数的閉体であると仮定してよい．証明には 1 変数代数関数論でよく使われる手法を用いる [].まずつぎの事実を証明しよう:

M/K は L/K の中間差分拡大とし, K 上代数的または 1 変数代数関数体であるとする．$y \in M$ はその逆数 $1/y$ とともに K 上線形斉次微分差分方程式を満足すると仮定する．そのとき, ある自然数 h で $\tau^h y/y \in K$ なるものが存在する．

y が K 上超越的であるときのみ示せばよい．M/K は inversive である．P を M/K の任意の素因子とする．すると

$$\nu_{\tau P}(\tau u) = \nu_P(u) \quad (u \in M)$$

によって新たな素因子 τP を得る．写像 $P \to \tau P$ は injective である．実際, $P \neq Q$ を異なる素因子とすると, ある $u \in M$ で $\nu_P(u) \neq \nu_Q(u)$ となるものがある．よって $\nu_{\tau P}(\tau u) \neq \nu_{\tau Q}(\tau u)$ となる．さて y は線形差分方程式

$$\tau^m y + a_1 \tau^{m-1} y + \cdots + a_m y = 0, \quad a_i \in K, a_m \neq 0$$

を満足するとしよう．$y, \tau y, \ldots, \tau^{m-1} y$ の極素因子全体からなる集合を $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ で表わす．$\tau^m y$ の極は Σ に属するから, $\tau\Sigma \subset \Sigma$ が成り立つ．したがって $\tau^r P = P$ $(P \in \Sigma)$ をみたす自然数 r が存在する．同様に $y, \tau y, \ldots, \tau^{m-1} y$ のどの零素因子も τ^s によって不変とする自然数 s の存在がいえる．とくに τ^{rs} は y の極も零点も動かさない．よって $\tau^{rs} y/y \in K$ を得る．

定理の証明に移ろう．y は上記の方程式をみたすとする．$A = K[y_{ij}; 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq m-1]$ を多項式環とし, 変換 τ を $\tau^j y_{i0} = y_{ij}$ によって定義する．$y_i = y_{i0}$ とし, それらは y と同じ方程式をみたすとする．これによって A は差分整域になる．E を A の商体とすれば E/K は差分拡大で, $M = K\langle y \rangle$ と K 上線形無関連である．ME において y は

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \quad (c_i \in C_{ME})$$

と表示される．M/K の超越次数を r とする．ME/E の超越次数は r に等しい．必要なら順序を入れ替え $c_1, \ldots, c_r$ が E 上代数的独立なるものとする．$E_i = E(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_r)$ とおく．ME/E_i は拡大次数 1 の差分拡大と考えられる．すでに得たことから, 自然数 h_i で $\tau^{h_i} y/y$ が E_i 上代数的になるものが存在する．$h = h_1 h_2 \cdots h_r$ とおけば, 各 i に対して

$$\frac{\tau^h y}{y} = \prod_{j=1}^{h/h_i} \frac{\tau^{h_i j} y}{\tau^{h_i (j-1)} y}$$

は E_i 上代数的である．よって $\tau^h y/y$ は E 上, したがって K 上代数的である．

[] で述べた証明には少し不備があり, ここでその訂正を行った．

Sperber の定理 [] の差分版を考えてみてはどうか．

Clairaut 方程式

出典は

M.S. Kalmkin: Generalizetion of Clairaut 's differential equation and the analogous difference equation, Amer. Math. Monthly 60(1953), 97-99

$$z_h = \sum_{k=0}^{n-h-1} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{d^{h+k}y}{dx^{h+k}}$$

とするとき, （一般化された）Clairaut 型代数的微分方程式は

$$F(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$$

で与えられる．F は z_i 達に関して複素数体上 n 変数既約多項式であるとする．これは y_i 達に関しても K 上既約である．

y を $\mathbf{C}(x)$ 上 $F = 0$ の一般解としよう．

$$\frac{d}{dx} z_h = \sum_{k=1}^{n-h-1} \frac{-(-x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{h+k}y}{dx^{h+k}} + \sum_{k=0}^{n-h-1} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{d^{h+k+1}y}{dx^{h+k+1}} = \frac{(-x)^{n-h-1}}{(n-h-1)!} \frac{d^n y}{dx^n}$$

であるから, $F(z_0, \ldots, z_{n-1}) = 0$ を微分して

$$\frac{d^n y}{dx^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-x)^{n-h-1}}{(n-h-1)!} \frac{\partial F}{\partial z_k}(z_0, \ldots, z_{n-1}) = 0$$

よって $d^n y/dx^n = 0$, そして $dz_h/dx = 0$ を得る．さらに

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} z_k$$

である．

差分では少し事情が異なる．K を差分体,

$$K\{Y\} = K[Y_0, Y_1, \ldots], \quad Y_0 = Y,\ Y_k = \tau Y_{k-1}\ (1 \leq k)$$

を差分多項式環とし, K には

$$\delta x = 1, \quad \delta = \tau - 1$$

なる元 x が存在すると仮定する．$C = I_K$ は代数閉体であると仮定する．

$a \in K^\times$ に対し

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}, \quad \binom{a}{0} = 1$$

によって K の元を定義する．つぎが成り立つ．

$$\binom{a}{k} = \binom{a-1}{k} + \binom{a-1}{k-1}$$

さて n を自然数とし

$$Z_h = \sum_{k=h}^{n-1} \binom{-x}{k-h} \delta^k Y \in K\{Y\}$$

とおく．逆に各 $\delta^h Y$ したがって Y_h を Z_k $(0 \leq k \leq n-1)$ の線形結合によって表わすことができる．とくに, 公式

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{x}{h}\binom{-x}{k-h} = 0\ (k > 0), \quad 1\ (k = 0)$$

によって

$$Y = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{x}{k} Z_k$$

を得る．上記の公式は, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{m}{h}\binom{-m}{k-h} = 0\ (k > 0), \quad 1\ (k = 0)$$

が成立することから明らか．Z_h に関しては

$$\begin{aligned}
\tau Z_h &= \sum_{k=h}^{n-1} \binom{-x-1}{k-h} (\delta^{k+1} + \delta^k) Y \\
&= \binom{-x-1}{0}\delta^h Y + \sum_{k=h+1}^{n-1} \left(\binom{-x-1}{k-h-1} + \binom{-x-1}{k-h} \right) \delta^k Y + \binom{-x-1}{n-h-1}\delta^n Y \\
&= \delta^h Y + \sum_{k=h+1}^{n-1} \binom{-x}{k-h} \delta^k Y + \binom{-x-1}{n-h-1} \delta^n Y
\end{aligned}$$

よって

$$\delta Z_h = \phi_h \delta^n Y, \quad \phi_h = \binom{-x-1}{n-h-1} \in K$$

を得る.

いま n を自然数, $z_0, \ldots, z_{n-1}$ を不変元とし, それらが 0 でない C 上 n 変数多項式 F

$$F(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$$

をみたすとする.

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{x}{k} z_k$$

とするとき, $\Phi = F(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) \in K\{Y\}$ に対して

$$\Phi(y) = 0,$$

が成り立つ. また, $\delta^n y = 0$ も成立する. $\Phi(y) = 0$ を Clairaut 方程式という. 微分のときとことなり, Clairaut 方程式の解が $\delta^n y = 0$ を必ずしも満足するとは限らない.

たとえば方程式

$$y - x\delta y - (\delta y)^2 = 0$$

を考える (cf. Boole の差分方程式の本, p.159). 差分すれば

$$-(x+1)\delta^2 y - \delta^2(y)\tau\delta y - \delta(y)\delta^2 y = 0,$$

よって

$$\delta^2(y)(\delta^2 y + 2\delta y + x + 1) = 0.$$

$\delta^2 y \neq 0$ と仮定する. このとき

$$\delta(\delta+2)y = -x - 1$$

を得る. この一般解は

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16} + ae + b \quad (\delta a = \delta b = 0)$$

で与えられる. ここで $\tau e = -e \neq 0$ とする. $y - x\delta y - (\delta y)^2 = 0$ より $a = b = 0$ を得る. したがって, 共通解 ($\delta^2 y \neq 0$ であった) は

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}.$$

Clairaut 方程式の一般解 $y = cx + c^2$ $(\delta c = 0)$ にこれはもちろん属さない. 差分の場合「包絡線」をどのように理解すべきか？

Poincaré の定理

常微分の場合に対しては

西岡久美子: 微分体の理論, 共立出版, 2010

K を代数閉体, R/K を一変数代数関数体, $\tau \in \mathrm{Aut}\ (R)$ で $\tau K = K$ なるものとする. 素因子 P に対して, 素因子 τP をつぎによって定義する.

$$\nu_{\tau P}(\tau x) = \nu_P(x)$$

$P \to \tau P$ は双射である.

任意の因子 $A = \sum_P m_P P$ に対して $\tau A = \sum_P m_P \tau P$ と定義する. A が正因子ならば τA も正因子である. また $x \in R$ に対して $\tau(x) = (\tau x)$ である. 実際
$(x) = \sum_P \nu_P(x) P$ であるから

$$\tau(x) = \sum_P \nu_P(x)\tau P = \sum_{\tau P} \nu_{\tau P}(\tau x)\tau P = (\tau x)$$

各因子 A に対して $\tau L(A) = L(\tau A)$ が成立する. 実際, $(x) + A \geq 0$ とすると
$(\tau x) + \tau A \geq 0$ であるから $\tau L(A) \subset L(\tau A)$ を得る. τ^{-1} を考えれば逆の包含関係を得る.

定理　K を差分体, R/K を 1 変数代数関数体で, inversive 差分拡大とする. このときもし R/K の種数 g が 2 以上ならば, R は周期元によって生成される.

証明　τ は Weierstrass 点全体の置換を与える. よってある r で τ^r はすべての W 点を不動にする. P を Weierstrass 点で, $n \leq g$ を $\dim L(nP) = 2$ なるものとする. $1, z$ を $L(nP)$ の K-基底とする. $\tau^r z \in L(nP)$ より $\tau^r z = az + b$ となる $a, b \in K, a \neq 0$ が存在する. Q を P と異なる Weierstrass 点とすると, ある $\alpha \in K$ で $\nu_Q(z - \alpha) > 0$ となる. Q_1 を第 3 の Weierstrass 点とし, $\nu_{Q_1}(z - \alpha_1) > 0$ $(\alpha_1 \in K)$ としよう. $\alpha \neq \alpha_1$ ととることができる. なぜなら $[R : K(z)] = n$ であるから, $\nu_{Q_1}(z - \alpha) > 0$ となる点 Q_1 は高々 g 個しかない. 一方 Weierstrass 点の個数は少なくとも $2g + 2$ 個である. よって残り $g + 1$ 個以上の点から 所要の Weierstrass 点を採用することができる. $\tau^r \alpha = a\alpha + b$, $\tau^r \alpha_1 = a\alpha_1 + b$ が成立する. そこで

$$u = \frac{z - \alpha}{\alpha_1 - \alpha}$$

とおけば $\tau^r u = u$ を得る. n と互いに素な, ある整数 m で, $\dim L((m-1)P) <$
$\dim L(mP)$ なるものがある. そこで $v \in L(mP) \setminus L((m-1)P)$ をとれば, $R = K(u, v)$

である．τ^r は P の位相に関して連続であることに注意し，素元 t_P を $u = t_P^{-n}$ なるようにとる．$\tau^r u = u$ より $K((t_P))$ において $\tau^r t_P = \epsilon t_P, \epsilon^n = 1$ を得る．すると $\tau^{rn} t_P = t_P$ である．$\sigma = \tau^{rn}$ として，$\sigma t_P = t_P$ で，v はある K-上線形斉次方程式

$$F(v) = \sigma^k v + a_1 \sigma^{k-1} v + \cdots + a_k v = 0$$

をみたす．$v \in K((t_p))$ を t_P に関して展開する．

$$v = \sum_{i=-m}^{\infty} \beta_i t_P^i$$

各係数 β_i は $F(\beta_i) = 0$ をみたす．そこで $V = \{x \in K \mid F(x) = 0\}$ とおけば，これは $M = \{x \in K \mid \sigma x = x\}$ 上線形空間で，その次元 d は k を超えない．V の M-上基底を $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ とすると，

$$v = \sum_{i=1}^{d} w_i \gamma_i$$

なる表示を得る．ここで $w_i \in M((t_P))$, $\sigma w_i = w_i$ である．w_i は $\sigma^j \gamma_i (0 \leq i, j < d)$ および $\sigma^j v$ $(0 \leq j < d)$ によって表わされる．よって $w_i \in R$ であることがわかり，
$R = KM$ が結論される．

定理は R/K が quasi-inversive であるとしても成立する．それは Hurwitz の公式からわかる．