解析幾何　第１４週演習問題

(1) 曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = -8t\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} + 5t^2\boldsymbol{k}$ で定める．また曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A, B を $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(-1)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(0)$ で定める．

(1-1) スカラー場 f を $f(x, y, z) = x$ で定めるとき, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を求めよ．

(1-2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定めるとき, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(2) 曲面 S を

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$$

で定める．

(2-1) スカラー場 f を $f(x, y, z) = x$ で定めるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S f dS$ を求めよ．

(2-2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定めるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ, 但し S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ として第 3 座標が正のものを用いる．

(3) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ 2x - 2y + z = 4\}$ とし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ として第 3 座標が正のものを用いる．C を S の境界とし, C の向きは $\boldsymbol{n}$ が向く方向から見て反時計回りのものとする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = x^2z\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ で定めるとき, 線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(4) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S が囲む部分 D の外側を向くものとする．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = xy^2\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{j} + zx^2\boldsymbol{k}$ で定めるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．