第９週　曲面の面積および面積分

9.1　曲面の面積

2 変数 u, v のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が曲面であるとする. また $\boldsymbol{p}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^2$ の長方形

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(u, v) \mid a \leqq u \leqq b,\ c \leqq v \leqq d\}$$

とする. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積は, 微分積分 II で現れた 2 変数関数のグラフの曲面積と同様に定義される. m, n を正の整数とする. $u_0 = a, u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m = b$ は閉区間 $[a, b]$ の分割を与えるとし, $v_0 = c, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = d$ は閉区間 $[c, d]$ の分割を与えるとする. このとき小長方形

$$R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] = \{(u, v) \mid u_{i-1} \leqq u \leqq u_i,\ v_{j-1} \leqq v \leqq v_j\}$$

上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積の近似値として, $\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1})$, $\boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})$ がなす平行四辺形の面積 $|\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|$ に $(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$ を掛けたものを選ぶ. 従って元々の長方形 R 上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積の近似値として,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \tag{1}$$

を選ぶ. (1) の値は R 上の関数 $|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|$ の Riemann 和であり, m, n を限りなく大きくしていき $[a, b]$, $[c, d]$ それぞれの分割の巾 $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,m}(u_i - u_{i-1})$, $\displaystyle\max_{j=1,\ldots,n}(v_j - v_{j-1})$ が限りなく 0 に近づくようにするとき, (1) の値は重積分

$$\iint_R |\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v)| du dv$$

に近づく. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域が $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D (円の内部或いはより一般に自己交差を持たない区分的に滑らかな閉曲線の内部くらいを想起すれば良い) である場合も同様に考えることによって, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の **面積** が

$$\iint_D |\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v)| du dv$$

で定義される.

9.2　スカラー場の面積分

f をスカラー場とする. 曲面 $\boldsymbol{p}$ に沿う f の積分を考えたい. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^2$ の長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ とする. 小長方形 $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ 上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積を A_{ij} で表す. このとき和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{p}(u_i, v_j))A_{ij}$ を考え, $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,m}(u_i - u_{i-1})$ および $\displaystyle\max_{j=1,\ldots,n}(v_j - v_{j-1})$ を限りなく 0 に近づけるとき, この和は積分

$$\iint_R f(\boldsymbol{p}(u, v))|\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v)| du dv$$

に近づく. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域が $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D である場合も同様に考えることによって, 曲面 $\boldsymbol{p}$ 上のスカラー場 f の **面積分** が

$$\iint_D f(\boldsymbol{p}(u, v))|\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v)| du dv$$

で定義される. この値を $\displaystyle\int_S f dS$ で表す, 但し $S = \{\boldsymbol{p}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$ である.

第９週　曲面の面積および面積分 (続き)

9.3　ベクトル場の面積分

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする. $\boldsymbol{p}$ を曲面とし, ベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \tag{2}$$

で定める. $\boldsymbol{n}$ は曲面の各点での単位法線ベクトルを与える. このとき曲面の各点で $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{n}$ のスカラー積という値を対応させる関数 $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}$ を考えることができる. これを u, v の関数とみなし, 曲面 $\boldsymbol{p}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の <u>**面積分**</u> $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})(u,v)|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)|dudv$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表しまた $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表すとき,

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (\boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v))dudv = \iint_D \left(V_1 \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + V_2 \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + V_3 \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) dudv$$

が成り立つことに着目して, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を $\displaystyle\iint_S (V_1 dydz + V_2 dzdx + V_3 dxdy)$ とも表す. 特に, スカラー場 f に対しベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (f, 0, 0)$ で定めるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S}$ を $\displaystyle\iint_S f dydz$ で表す. $\displaystyle\iint_S f dzdx$, $\displaystyle\iint_S f dxdy$ についても同様である.

9.4　面積分に関する注意事項

以上に現れた曲面は, ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \neq \boldsymbol{o}$ を満たすものまたは各 (u,v) に対し $\boldsymbol{p}(u,v)$ の終点と表される点の集合である. しかしながら, 例えば球面 $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ のように, 明らかに曲面の一つとみなされるべきであるにもかかわらず, 曲面 $\boldsymbol{p}$ (およびその定義域) をどのように選んでも与えることができないようなものもある. 球面のような図形も曲面とみなされるように「曲面」という用語を再定義したい. 以下, $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 S が <u>**曲面**</u> であるとは, S の各点 a に対し a を中心とする開球 (球面の内部) B および ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \neq \boldsymbol{o}$ および $S \cap B = \{\boldsymbol{p}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ を満たすときにいうことにする, 但し D は $\boldsymbol{p}$ の定義域である. 従って, 今までの意味での曲面を今後も曲面と呼んで差し支えない. <u>**閉曲面**</u> とは, 空間のある有界な領域の境界と表される曲面である (例えば球面は閉曲面である).

曲面 S が <u>**向きづけ可能**</u> であるとは, S の各点 a に対し前段落でのような $\boldsymbol{p}$ を選んで (2) で与えられているベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ が S 上で連続に定義できるときにいう. 向きづけ可能ではない曲面として <u>**メビウスの帯**</u> が知られている. 閉曲面は向きづけ可能である. 通常, 閉曲面 S の各点で単位法線ベクトルを与える連続なベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ として, S が囲む部分の外側を向くものを選ぶ.

閉曲面上での面積分は, 閉曲面を幾つかの部分に分け, それぞれの上での面積分の和として得られる. 閉曲面上の面積分においては, 積分記号 $\displaystyle\int$ としてしばしば $\displaystyle\oint$ も用いられる.

ベクトル場 $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\int_S \boldsymbol{V} dS = \boldsymbol{i}\int_S V_1 dS + \boldsymbol{j}\int_S V_2 dS + \boldsymbol{k}\int_S V_3 dS$$

という面積分を考えることがある. $\displaystyle\int_S \boldsymbol{n} dS$ を曲面 S の <u>**面積ベクトル**</u> といい, $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S}$ とも表す. $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{n} dS$ を $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \times d\boldsymbol{S}$ とも表す.