解析幾何 — ベクトル解析入門 — (理学共通科目) 平成３０年６月４日

第８週　曲線の長さおよび線積分

8.1　曲線の長さ

1 変数 t のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が曲線であるとし, $\boldsymbol{p}$ の定義域を開区間 I とする. $a, b \in I$ は $a < b$ を満たすとし, $\boldsymbol{p}(a)$, $\boldsymbol{p}(b)$ の終点をそれぞれ A, B で表す ($\boldsymbol{p}$ の始点を開区間 I の点の取り方に依らない空間の固定された 1 点とする). 曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの長さは, 微分積分 I で現れた 1 変数関数のグラフの長さと同様に定義される. n を正の整数とし, $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n \in I$ は閉区間 $[a, b]$ の分割を与えるとする, つまり $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ となるようにとる. $\boldsymbol{p}(t_i)$ の終点を P_i で表すとき, $\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ が定める折線の長さは曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの長さを近似していると考えられ,

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}(t_{i-1})) \right| (t_i - t_{i-1})$$

と表される. n を限りなく大きくしていき $[a, b]$ の分割の巾 $\max\limits_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$ が限りなく 0 に近づくようにするとき, 上の折線の長さは

$$\int_a^b |\boldsymbol{p}'(t)| dt \quad \left(\boldsymbol{p}'(t) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t) \right)$$

に近づく. この値が曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの **長さ** である. t の関数 $s = s(t)$ を

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{p}'(t)| dt$$

で定めると, $s'(t) = |\boldsymbol{p}'(t)| \neq 0$ なので, $s = s(t)$ は逆関数 $t = t(s)$ を持ち従って $\boldsymbol{p}$ を s の関数と思うことができる. このとき s は $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータである.

8.2　スカラー場の線積分

f をスカラー場とする. s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとする. s が $s = \alpha$ から $s = \beta$ まで動くとき, 曲線 $\boldsymbol{p}$ に沿う f の積分を考えたい. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\beta)$ とする. $\alpha < \beta$ とする. n を正の整数とし, $s_0 = \alpha, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = \beta$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ の分割を与えるとする. このとき

$$\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}(s_i))(s_i - s_{i-1}) \tag{1}$$

は今考えている積分に関する f の Riemann 和であり, n を限りなく大きくしていき $[\alpha, \beta]$ の分割の巾 $\max\limits_{i=1,\ldots,n} (s_i - s_{i-1})$ を限りなく 0 に近づけるとき, (1) の値は 1 変数 s の関数である $f(\boldsymbol{p}(s))$ の積分

$$\int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{p}(s)) ds$$

に近づく. この値を $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ または $\displaystyle\int_C f ds$ で表す, 但し $C = \{\boldsymbol{p}(s) \mid \alpha \leqq s \leqq \beta\}$ である (つまり C は $\alpha \leqq s \leqq \beta$ に対し $\boldsymbol{p}(s)$ の終点と表される点の集合である). これを曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までのスカラー場 f の **線積分** とよぶ. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の一般のパラメータ t について, $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(a)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(b)$ とする, 但し $a < b$ とする. このとき $s'(t) = |\boldsymbol{p}'(t)|$ を用いて,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{p}(t)) |\boldsymbol{p}'(t)| dt$$

がわかる. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 B から点 A までの線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} f ds$ は $\displaystyle -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ に等しい.

第８週　曲線の長さおよび線積分 (続き)

8.3　ベクトル場の線積分

$\boldsymbol{t}$ を曲線 $\boldsymbol{p}$ の単位接線ベクトルとする: $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$. このときベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 曲線の各点で $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{t}$ の内積という値を対応させる関数 $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t}$ を考えることができる. これを s の関数とみなし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$ から点 $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\beta)$ までの **線積分** $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ $\left(\text{または} \displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}\right)$ を

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t})(s) ds$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表しまた $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と表すとき,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(V_1(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dx}{ds}(s) + V_2(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dy}{ds}(s) + V_3(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dz}{ds}(s) \right) ds$$

が成り立つことに着目して, $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) \quad \left(\text{または} \int_C (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz)\right)$$

とも表す. 特に, スカラー場 f に対しベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (f, 0, 0)$ で定めるとき, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dx$ で表す. $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dy$, $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dz$ についても同様である.

8.4　線積分に関する注意事項

曲線 $\boldsymbol{p}$ が **閉曲線** である, つまり任意の s に対し $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(s + l)$ が成り立つような (s に依らない) 正数 l が存在するとする. このとき $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$ と $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\alpha + l)$ は等しく, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を $\displaystyle\oint_C f ds$ で表す, 但し $C = \{\boldsymbol{p}(s) \mid \alpha \leqq s \leqq \alpha + l\}$ である.

曲線 $\boldsymbol{p}$ は任意の t に対し $\boldsymbol{p}'(t) \neq \boldsymbol{o}$ を満たす. 一方で, 線積分を考えるときには, 以上のような曲線だけではなく, 1 変数ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ で, 有限個の点において $\boldsymbol{p}'$ が連続ではないが右極限および左極限を持ちかつ他の点では $\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{o}$ となるものも考えることがある. このようなベクトル値関数を **区分的に滑らかな曲線** と呼ぶ. 区分的に滑らかな曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A から点 B までの線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{P}_{i-1}}^{\mathrm{P}_i} f ds$ で定める, 但し P_i は $\boldsymbol{p}(t_i)$ の終点であり, また $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ および $i = 1, \ldots, n$ に対し (t_{i-1}, t_i) 上で $\boldsymbol{p}$ は曲線である ($\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{o}$) とする.

スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V} = V_1 \boldsymbol{i} + V_2 \boldsymbol{j} + V_3 \boldsymbol{k}$ に対し,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dx + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dy + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dz,$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} ds = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_1 ds + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_2 ds + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_3 ds,$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \times d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{t} ds = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_2 dz - V_3 dy) + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_3 dx - V_1 dz) + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_1 dy - V_2 dx)$$

という線積分を考えることがある.