第７週 grad, div, rot についての補足

grad, div, rot のうちの二つ以上が現れる式としてまず思い出すべきものは, 第５週, 第６週でそれぞれ現れた

$$\mathrm{div}\,(f\boldsymbol{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\cdot\boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}, \qquad \mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\times\boldsymbol{V} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$$

である. これらはいずれも積の微分法に基づいている. また, 第５週で現れた

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

は grad と div の組み合わせに関する式であり, 第６週で現れた

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{o}, \qquad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) = 0$$

はそれぞれ grad と rot の組み合わせおよび rot と div の組み合わせに関する式である. 以上の式に加えて, grad, div, rot に関して知られている式を次の定理によって紹介する.

定理 f, g をスカラー場とし, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ をベクトル場とするとき, 次が成り立つ:

(a) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,(fg)) = f\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,g) + 2\,\mathrm{grad}\,f\cdot\mathrm{grad}\,g + g\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f)$
$(\nabla\cdot\nabla(fg) = f\,\nabla\cdot\nabla g + 2\,\nabla f\cdot\nabla g + g\,\nabla\cdot\nabla f)$,

(b) $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$, 特に $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,f\times\mathrm{grad}\,g) = 0$ $(\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g) = 0)$,

(c) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}) - \Delta\boldsymbol{V}$, 但し $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ に対し $\Delta\boldsymbol{V} = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$.

ベクトル解析の議論においては, しばしばベクトル場 $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ およびスカラー場 $r = |\boldsymbol{r}|$ が登場する. 次の命題は, これらについて成り立つ式を紹介するものである.

命題 次が成り立つ:

(a) $\mathrm{grad}\,r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, 特に $\mathrm{grad}\,r = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{r}$,

(b) $\mathrm{grad}\,\log r = \dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{r}$,

(c) $\mathrm{div}\,(r^n\boldsymbol{r}) = (n+3)r^n$, 特に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = 3$,

(d) $\Delta\,r^n = n(n+1)r^{n-2}$,

(e) $\Delta\log r = \dfrac{1}{r^2}$,

(f) $\mathrm{rot}\,(r^n\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{o}$, 特に $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{o}$,

参考 (Maxwell の方程式) 真空中の電磁場について考える. $\boldsymbol{E}$ を電場とし, ε_0 を真空の誘電率とする. このとき $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$ は電束密度である. また $\boldsymbol{H}$ を磁場とし, μ_0 を真空の透磁率とする. このとき $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ は磁束密度である. 真空中の電磁場は次の **Maxwell の方程式** を満たす:

- **電束密度の Gauss の法則:** $\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$ (但し ρ は電荷密度である),
- **磁束密度の Gauss の法則:** $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$,
- **Faraday の法則:** $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$,
- **拡張された Ampère の法則:** $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ (但し $\boldsymbol{i}$ は電流密度である).