第６週　ベクトル場の回転

6.1　ベクトル場の回転の定義

ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ の **回転** $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ は

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

によって定義されるベクトル場である. $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ なので

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{V}$$

が成り立つと考えることにより, $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ を $\nabla \times \boldsymbol{V}$ と表すことがある.

定理　スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, 次が成り立つ:

(a) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{V} + \operatorname{rot}\boldsymbol{W}$,

(b) $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{V}) = c\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ (c は定数),

(c) $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{V}) = (\operatorname{grad} f) \times \boldsymbol{V} + f\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$.

次の定理はスカラー場の勾配ベクトル場, ベクトル場の発散および回転の間に成り立つ基本的な関係を与えている.

定理　次が成り立つ.

(a) スカラー場 f の勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ の回転は零である: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \boldsymbol{o}$.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$ の発散は零である: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{V}) = 0$.

第６週　ベクトル場の回転 (続き)

6.2　ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るために, 第５週の 5.2 節と同様にまず V_i が $V_i(x,y,z) = v_{i1}x + v_{i2}y + v_{i3}z$ と表されている場合を考える. そして 3 次正方行列 (v_{ij}) を対称行列 A と交代行列 B の和で表す. 5.2 節では A に着目して, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るための議論を行なった. ここでは B に着目して, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ についての議論を行なう. 交代行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{12}-v_{21}}{2} & \frac{v_{13}-v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}-v_{12}}{2} & 0 & \frac{v_{23}-v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}-v_{13}}{2} & \frac{v_{32}-v_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表す. 従って

$$\omega_1 = \frac{v_{32}-v_{23}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v_{13}-v_{31}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{v_{21}-v_{12}}{2}$$

が成り立つ. このとき

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

が成り立つ, 但し $\boldsymbol{\omega} = {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ でありまた $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}(x,y,z) = {}^t(x,y,z)$ で定義されるベクトル場である. ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は零ベクトル $\boldsymbol{o}$ ではないとする. 原点 $(0,0,0)$ の近くの点 (x,y,z) を任意にとるとき, ベクトル $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(x,y,z)$ は $\boldsymbol{o}$ であるかまたは $\boldsymbol{\omega}$ とも $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ とも直交する. 従ってベクトル場 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ は, ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が定める原点 $(0,0,0)$ を通る直線の周りの回転を表していることがわかる. このとき $\boldsymbol{\omega}$ はこの回転の回転軸を与えていて, 回転の向きも定めている. そして, 以上の状況においては, (1) で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\omega}$ と表されることがわかる.

$\boldsymbol{V}$ が一般のベクトル場である場合には, 空間の点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を任意にとって固定し V_i を

$$V_i(x,y,z) = V_i(\mathrm{P}_0) + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\mathrm{P}_0)(x-x_0) + \frac{\partial V_i}{\partial y}(\mathrm{P}_0)(y-y_0) + \frac{\partial V_i}{\partial z}(\mathrm{P}_0)(z-z_0) + \text{高次の項}$$

と表し, この式の右辺の 1 次の項に着目することで, 前段落と同様に $\boldsymbol{V}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知ることができる. つまり, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が点 P_0 で与えるベクトルは, P_0 の周りで $\boldsymbol{V}$ が表す回転の回転軸を与えかつ向きも定めると考えることができる.