解析幾何 — ベクトル解析入門 — (理学共通科目)　　平成３０年５月１４日

第５週　ベクトル場の発散

5.1　ベクトル場の発散の定義

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする．このとき $\boldsymbol{V}$ を 3 つのスカラー場 V_1, V_2, V_3 を用いて $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表すことができる．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の **発散** $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

によって定義されるスカラー場である．$\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ と表されるので

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) = \operatorname{div}\boldsymbol{V}$$

が成り立つと考えることにより, $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ を $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ と表すことがある．

注意　$\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ と類似の $\boldsymbol{V} \cdot \nabla$ は

$$\boldsymbol{V} \cdot \nabla = (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{\partial z}$$

という微分演算子 (微分作用素) を表す．特に $\nabla \cdot \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{V} \cdot \nabla$ である．

定理　スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, 次が成り立つ:

(a) $\operatorname{div}(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W}) = \operatorname{div}\boldsymbol{V} + \operatorname{div}\boldsymbol{W}$,

(b) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{V}) = c\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ (c は定数),

(c) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{V}) = (\operatorname{grad} f) \cdot \boldsymbol{V} + f\operatorname{div}\boldsymbol{V}$,

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

スカラー場 f に対し, $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ とおく．このとき上の定理の (d) に注意して,

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とおいたものを **Laplace の演算子** または **ラプラシアン** と呼ぶ．$\Delta f = 0$ を **Laplace の方程式** といい, Laplace の方程式の解を **調和関数** という．

第５週　ベクトル場の発散 (続き)

5.2　ベクトル場の発散の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るために, ここでは $\boldsymbol{V}$ が縦ベクトルでありそして

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

と定数を成分とする 3 次正方行列 (v_{ij}) を用いて表されている場合を考える. (v_{ij}) を

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \frac{v_{12}+v_{21}}{2} & \frac{v_{13}+v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}+v_{12}}{2} & v_{22} & \frac{v_{23}+v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}+v_{13}}{2} & \frac{v_{32}+v_{23}}{2} & v_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{12}-v_{21}}{2} & \frac{v_{13}-v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}-v_{12}}{2} & 0 & \frac{v_{23}-v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}-v_{13}}{2} & \frac{v_{32}-v_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように対称行列と交代行列の和で表す. (2) の右辺第 1 項に現れている対称行列を A とするとき, A は直交行列を用いて対角化できるので, 空間の正規直交基底をなす 3 つのベクトル $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\boldsymbol{t}_3$ および 3 つの実数 λ_1, λ_2, λ_3 を選んで $A\boldsymbol{t}_i = \lambda_i \boldsymbol{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が成り立つようにできる. ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の表示 (1) に現れる行列を A のみに置き換えて考えるならば, このベクトル場の振る舞いは $\boldsymbol{t}_i$ および λ_i に着目すると理解し易い. ベクトル場が気体や液体等の流れの各点での速度を表すと考えるとき, 原点 $(0,0,0)$ から流出する量を正数とし流入する量を負数として, これらの総和は

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}\,(T^{-1}AT) = \mathrm{tr}\,A = v_{11} + v_{22} + v_{33} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$$

によって表されると考えることができる (但し $T = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)$ である). なお, (2) の右辺第 2 項に現れている交代行列は, 次週でベクトル場の回転の意味を知るために考察の対象となる.

$\boldsymbol{V}$ が一般のベクトル場である場合には, 空間の点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を任意にとって固定し V_i を

$$V_i(x,y,z) = V_i(\mathrm{P}_0) + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\mathrm{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial V_i}{\partial y}(\mathrm{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial V_i}{\partial z}(\mathrm{P}_0)(z - z_0) + \text{高次の項}$$

と表し, この式の右辺の 1 次の項に着目することで, 前段落と同様に $\boldsymbol{V}$ の発散 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知ることができる. つまり, $\boldsymbol{V}$ が気体や液体等の流れを表すと考えるとき, P_0 に流出および流入する量の総和は P_0 での $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ の値に等しいと考えることができる.