第４週　関数の勾配ベクトル場

4.1　勾配ベクトル場の定義

f をスカラー場とする．このとき f を 3 変数 x, y, z の関数とみなすことができ, 従って f の x, y, z それぞれについての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ を考えることができる．これらで作られるベクトル場 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ をスカラー場 f の **勾配ベクトル場** と呼び, $\mathrm{grad}\, f$ または ∇f で表す．このとき f の勾配ベクトル場 ∇f を

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

と表すことができると考え, この式から

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

とおいたものを考える．このように定義された ∇ を **Hamilton の演算子** または **ナブラ** と呼ぶ．

定理　f, g をスカラー場とし, ϕ を 1 変数関数とする．このとき次が成り立つ:

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

(b) $\nabla(cf) = c\nabla f$ (c は定数),

(c) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,

(d) g は零にはならないとするとき, $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$,

(e) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

4.2　方向微分

$\boldsymbol{e}$ を長さが 1 のベクトル (**単位ベクトル**) とする．空間の固定された点 P を通り $\boldsymbol{e}$ と平行な直線上の点 Q をとる．線分 PQ の長さを δ で表すとき, スカラー場 f に対し,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(\mathrm{Q}) - f(\mathrm{P})}{\delta}$$

を f の点 P における $\boldsymbol{e}$ 方向に対する **方向微分係数** という．合成関数の微分法を用いて, 次の定理を得る．

定理　単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{e} = (l, m, n)$ とおき, 点 P の座標を (x, y, z) とおく．固定された P および $\boldsymbol{e}$ に対し, 1 変数 s の関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(s) = f(x+sl,\ y+sm,\ z+sn)$$

で定める．このとき f の点 P における $\boldsymbol{e}$ 方向に対する方向微分係数は

$$\tilde{f}'(0) = \boldsymbol{e}\cdot\nabla f = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

と表される, 但し ∇f および $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ はいずれも点 P でのものである．

注意　(1) において $(l, m, n) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ または $(0, 0, 1)$ とおくことで, 偏微分係数は方向微分係数の一種とみなすことができる．

第４週　関数の勾配ベクトル場 (続き)

4.3　等位面

スカラー場 f および与えられた定数 c に対し $f = c$ を満たす空間の点の全体を f の **等位面** という．点 P で $\nabla f \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとする．このとき f の x, y または z についての偏微分係数は零ではない．ここでは $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ とする．このとき陰関数の定理から, P を通る f の等位面は P の周りで 2 変数 x, y の関数 $z = z(x, y)$ のグラフと表される．特に, この等位面の P での接平面および法線 (P を通りかつ接平面に直交する直線) が定まる．法線を与える単位ベクトルを **単位法線ベクトル** (または **単位法ベクトル**) という．単位法線ベクトルは符号を除いて一意に定まる．単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ が点 P での等位面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ である場合には, $\boldsymbol{n}$ 方向に対する方向微分係数を $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ で表す．(1) から,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla f \tag{2}$$

がわかる．さらに次の定理が成り立つ．

定理　点 P で $\nabla f \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとし, $\boldsymbol{n}$ を P を通る f の等位面の P での単位法線ベクトルとする．このとき次が成り立つ:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

注意　(2) が成り立つことに注意して, しばしば

$$\frac{\partial}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla$$

という演算子を用いることがある．