解析幾何 — ベクトル解析入門 — (理学共通科目)　　　　平成３０年４月２３日

第３週　一般のベクトル値関数

3.1　ベクトル値関数

変数 t がある値をとる度に空間のベクトル $\boldsymbol{f}(t)$ を対応させる $\boldsymbol{f}$ を (変数 t の) **ベクトル値関数** という. 以下においては, 1 変数のベクトル値関数の基本事項を列挙するが, 変数が一つではない場合も大体同じように話を進めることができる.

$\boldsymbol{f}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とする. 各 t に対し $\boldsymbol{f}(t)$ を数ベクトルとして表示する場合, 通常

$$\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$$

のように t の関数 f_1, f_2, f_3 が用いられる.

$\boldsymbol{c}$ を空間の (固定された) ベクトルとする. t のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ の $t = t_0$ における **極限** が $\boldsymbol{c}$ であるとは, $\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c}| = 0$ が成り立つときにいい, これが成り立つことを

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{c} \tag{1}$$

で表す. $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{f}(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$ と表されまた $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ と表されるとき, (1) が成り立つことと $i = 1, 2, 3$ に対して $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = c_i$ が成り立つことは同値である.

t のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で **連続** であるとは, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}(t_0)$ に対し (1) が成り立つときにいう. $\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で連続であることと f_1, f_2, f_3 が $t = t_0$ で連続であることは同値である. $\boldsymbol{f}$ が各 t で連続であるとき, $\boldsymbol{f}$ は **連続** または **C^0 級** であるという.

定理 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とし, h を t の実数値関数とする. このとき実数値関数 $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ およびベクトル値関数 $h\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$ は連続である.

$\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で **微分可能** であるとは, ある空間のベクトル $\boldsymbol{d}$ に対し

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)) = \boldsymbol{d} \tag{2}$$

が成り立つときにいう. (2) が成り立つとき, $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{f}$ の $t = t_0$ における **微分係数** といい, $\boldsymbol{f}'(t_0)$ または $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t_0)$ で表す. $\boldsymbol{f}$ が各 t で微分可能であるとき, $\boldsymbol{f}$ は **微分可能** であるといい, 各 t に対し t での微分係数 $\boldsymbol{f}'(t)$ を対応させるベクトル値関数 $\boldsymbol{f}'$ を $\boldsymbol{f}$ の **導関数** という. 微分可能なベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ の導関数 $\boldsymbol{f}'$ が微分可能であるとき, $\boldsymbol{f}'$ の導関数を $\boldsymbol{f}$ の **2 階の導関数** といい, $\boldsymbol{f}''$ で表す. 同様に, もし存在するならば, 正の整数 k に対し **k 階の導関数** $\boldsymbol{f}^{(k)}$ が定義される. 導関数が連続であるベクトル値関数は **C^1 級** であるという. 一般に, 正の整数 k に対し k 階までの導関数を持ちかつそれらが全て連続であるベクトル値関数は **C^k 級** であるという.

以下においては, 実数値関数およびベクトル値関数は全て任意の正の整数 k に対し C^k 級であると仮定する.

定理 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とし, h を t の実数値関数とする. このとき次が成り立つ:

(a) $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$,

(b) $(h\boldsymbol{f})' = h'\boldsymbol{f} + h\boldsymbol{f}'$,

(c) $(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}'$,

(d) $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}'$.

第３週　一般のベクトル値関数 (続き)

3.2　ベクトル値関数の例

1 変数のベクトル値関数の例として曲線や質点の運動を挙げることができる.

例　$\boldsymbol{p}$ を t のベクトル値関数とする. 通常, 任意の t に対し $\boldsymbol{p}'(t) \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとき, $\boldsymbol{p}$ を **曲線** という. $\boldsymbol{p}$ を曲線とする. t の関数 s で $\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{p}'|$ を満たすものをとると, $s = s(t)$ の逆関数 $t = t(s)$ が存在する. 従って t のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ を s のベクトル値関数とみなすことができる. s のような変数, パラメータを $\boldsymbol{p}$ の **弧長パラメータ** という. s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとするとき,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds}(s) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}'(t)|}\boldsymbol{p}'(t)$$

が成り立つ. 従って $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$ は長さが 1 のベクトルを与えるベクトル値関数であることがわかる. $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$ を $\boldsymbol{t}$ で表し, **(単位) 接線ベクトル** という. 各 t に対し $\boldsymbol{p}(t)$ が (t に依らない) 空間の固定された 1 点を始点とするとき, $\boldsymbol{p}(t)$ の終点と表される点の集合が空間内の図形としての曲線である. この 1 点を通る直線のうち対応する $\boldsymbol{t}$ によって与えられる直線が, この点での曲線の **接線** である.

例　$\boldsymbol{r}$ は t のベクトル値関数で, ある質点の運動を表すとする, つまり各 t に対し $\boldsymbol{r}(t)$ は空間の定点 O を始点としそして時刻 t における質点の位置を終点とするベクトル値関数であるとする. このときベクトル値関数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'$ は与えられた質点の **速度** であり, ベクトル値関数 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}''$ は質点の **加速度** である. 質点の質量を m とするとき, ベクトル値関数 $m\boldsymbol{v}$ は質点の **運動量** である. 質点に働く外力を表すベクトル値関数を $\boldsymbol{F}$ とするとき, ニュートンの運動方程式は $\boldsymbol{F} = (m\boldsymbol{v})'$ または $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ で与えられる. ベクトル値関数 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は定点 O に関する速度の **モーメント** である.

多変数のベクトル値関数の例として曲面やベクトル場を挙げることができる.

例　$\boldsymbol{p}$ を 2 変数 u, v のベクトル値関数とする. $\boldsymbol{p}$ の u, v に関する偏導関数をそれぞれ $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ で表す. 通常, 任意の (u, v) に対し $\boldsymbol{p}_u(u, v), \boldsymbol{p}_v(u, v)$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{p}$ を **曲面** という. $\boldsymbol{p}$ が曲面であることと任意の (u, v) に対し $\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v) \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つことは同値である. $\boldsymbol{p}$ を曲面とする. 各 (u, v) に対し $\boldsymbol{p}(u, v)$ が (u, v に依らない) 空間の固定された 1 点を始点とするとき, $\boldsymbol{p}(u, v)$ の終点と表される点の集合が空間内の図形としての曲面である. この 1 点を通る平面のうち対応する $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ によって与えられる平面が, この点での曲面の **接平面** である. この平面は $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ に直交する.

例　$\boldsymbol{V}$ を 3 変数 x, y, z のベクトル値関数とする. $\boldsymbol{V}$ を空間の各点 (x, y, z) に対し空間のベクトル $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ を対応させるものとみなすことができ, このようにみなされた $\boldsymbol{V}$ を **ベクトル場** という. ベクトル場が各点で与えるベクトルの始点としてその点 (対応させたベクトルを考えている点) を想起することが多い. ベクトル場の例として電磁気学に現れる電場や磁場, また流体の速度などを挙げることができ, ベクトル場は空間の点を指定する変数 x, y, z だけではなく時刻を指定する変数 t にも依存することがある. $\boldsymbol{V}$ が平面のベクトルを対応させる 2 変数のベクトル値関数である場合も同様に (平面上の) ベクトル場を考えることができる.

注意　空間または空間のある領域で定義された関数は **スカラー場** とも言われる. 「スカラー場」という用語を見たら, ベクトル場ではなく関数を考えていると思えばよい.

注意　この授業では, 「ベクトル場」という用語を上の例のように用いる. 一方で, ベクトル値関数そのものではなくベクトル値関数の定義域を「ベクトル場」と呼ぶ流儀もある. 「スカラー場」についても同様である.