第２週　ベクトルの外積

2.1　右手系と左手系

空間の三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとする，つまりいずれも長さが 1 でありかつ第１週で定義された内積に関して互いに直交しているとする．このとき $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および $-\boldsymbol{c}$ も正規直交基底をなす．順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ および $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c})$ のいずれを用いても構わない場合もあれば，いずれかを選択して議論を進めるべき場合もある．上のような二つの組のいずれかを選択しなければならない場合には，通常右手系と呼ばれる組を選択する．順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が **右手系** であるとは，右手の親指および人差し指をそれぞれ曲げずに $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ にあてたとき，中指を $\boldsymbol{c}$ が指す方向に向けることができるときにいう．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が右手系であるとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c})$ は **左手系** であるという．

以下，空間の基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ に対し，$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ は右手系であるとする．三つの数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が右手系であることと $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとする 3 次正方行列の行列式 $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ が 1 に等しいことは同値である．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとは限らないが少なくとも空間の基底をなすとするとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が **右手系** であるとは，$\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) > 0$ であるときにいうことにする．

2.2　外積

空間の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **外積** (または **ベクトル積**) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次のように定める:

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属ならば，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ とする;
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は次の (i), (ii), (iii) を満たすベクトルである (このようなベクトルは唯一つである):

  (i) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のいずれにも直交する;

  (ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい;

  (iii) 空間の基底をなす $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に対し，順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ は右手系をなす．

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と表されるとき，上の条件 (i), (ii), (iii) から

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - b_3 a_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

がわかる．この式を用いてまたは幾何ベクトルについての考察から，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ および実数 λ に対して次が成り立つことがわかる:

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,　特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ である;

(b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$,　$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$;

(c) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$;

(d) $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}$,　$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$,　$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$,　$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$.

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を **スカラー三重積** といい，$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ で表す．$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を **ベクトル三重積** という．

注意　スカラー三重積 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ はベクトルではなく数 (スカラー) である．ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラーではなくベクトルである．