解析幾何 — ベクトル解析入門 — (理学共通科目) 平成３０年４月９日

第１週　ベクトルの内積

1.1　ベクトル

この授業では, ベクトルは主に空間のものを考え, 平面のものもしばしば考える.

ベクトルというものの二つの捉え方がある. 一つ目は, ベクトルとは始点および終点が指定された線分であるというもので, このように捉えることを強調するときベクトルを **幾何ベクトル** という. 通常, 空間の平行移動によって互いに重なり合う二つのベクトルは等しいとみなされるが, 一方で始点の違いを認識する必要があるときは互いを区別することになる. 始点と終点が等しいベクトルを **零ベクトル** といい, $\boldsymbol{o}$ で表す. 二つ目は, ベクトルとは 3 つの数 a_1, a_2, a_3 の順序づけられた組 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ であるというもので, このように捉えることを強調するときベクトルを **数ベクトル** という. 幾何ベクトルは, 空間に座標を導入することによって, 数ベクトルとみなされる: 与えられた幾何ベクトルの始点を原点 $(0, 0, 0)$ とみなし, そのとき終点の座標によって数ベクトルを定めるのである. また数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は, 始点が $(0, 0, 0)$ で終点が (a_1, a_2, a_3) である幾何ベクトルとみなされる (状況によっては始点として $(0, 0, 0)$ 以外の点を考えることもある).

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の **和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ およびベクトル $\boldsymbol{a}$ の実数 λ による **スカラー倍** $\lambda\boldsymbol{a}$ が定義され, 従って空間の与えられた 1 点を始点として共有するベクトルの集合は自然にベクトル空間とみなされる.

1.2　内積

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を二つのベクトルとし, これらは始点を共有しているとする. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の **内積** (または **スカラー積**) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ で定め, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ で定める, 但し $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さであり, θ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がなす角である. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ および実数 λ に対して, 次が成り立つ:

(a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,

(b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$,

(c) $(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$,

(d) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 \geqq 0$, かつ $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ と $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ は同値である.

(a), (c), (d) については, 内積の定義から直ちにわかる. (b) についても, 内積の定義に基づいて理解できる. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は $(|\boldsymbol{a}| \cos\theta)|\boldsymbol{b}|$ とも $|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}| \cos\theta)$ ともみなされる. $(|\boldsymbol{a}| \cos\theta)|\boldsymbol{b}|$ は, $\boldsymbol{b}$ を含む直線への $\boldsymbol{a}$ の射影の長さと $\boldsymbol{b}$ の長さの積である. $|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}| \cos\theta)$ も同様に理解される. これらに注意することで, 上の (b) がわかる. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{o}$ ではないとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が **直交する** とは, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ が成り立つときにいう.

$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ とおく. これらを **基本ベクトル** という. 空間の座標と内積は

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$$

を満たすと考える. 従ってベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と表されるとき,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

が成り立つことが上の (a), (b), (c) を用いてわかる.

参考　以上では, 二つの幾何ベクトルの内積から話をはじめて二つの数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積の式 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ を導いた. 一方で, 二つの数ベクトルに対しそれらの内積をこの式で定めると, 直ちに上の (a), (b), (c), (d) がわかり, そしてこれらを用いて $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$ を求めることができる.