第１３週　ポテンシャル

13.1　スカラー・ポテンシャル

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする．スカラー場 f が $\boldsymbol{V}$ の **スカラー・ポテンシャル** であるとは, $\boldsymbol{V} = -\mathrm{grad}\, f$ が成り立つときにいう．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャル f を持つならば, その回転は $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = -\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \boldsymbol{o}$ を満たす．f, f_* が $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルならば, $f - f_*$ は定数である．

定理　ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が空間全体で定義されていて, $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ を満たすとする．このとき $\boldsymbol{V}$ はスカラー・ポテンシャル f を持ち, $\boldsymbol{V}$ の任意のスカラー・ポテンシャルはある定数 c を用いて $f + c$ と表される．

証明　$\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルが存在することを示せばよい．$\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表す．$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ は

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y} \tag{1}$$

を意味する．空間の 1 点 (x_0, y_0, z_0) に対し, スカラー場 f を

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} V_2(x_0,y,z)dy - \int_{z_0}^{z} V_3(x_0,y_0,z)dz$$

で定める．このとき $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -V_1$ は直ちにわかる．また

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx\right) - V_2(x_0,y,z)\\ &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z)dx - V_2(x_0,y,z)\\ &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z)dx - V_2(x_0,y,z)\\ &= -V_2(x,y,z)\end{aligned}$$

が, 微分と積分の順序交換および (1) の第３式を用いてわかる．同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{y_0}^{y} V_2(x_0,y,z)dy\right) - V_3(x_0,y_0,z)\\ &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial V_2}{\partial z}(x_0,y,z)dx - V_3(x_0,y_0,z)\\ &= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial V_3}{\partial y}(x_0,y,z)dx - V_3(x_0,y_0,z)\\ &= -V_3(x,y,z)\end{aligned}$$

が, 微分と積分の順序交換, (1) の第１式および第２式を用いてわかる．以上から, スカラー場 f は $\mathrm{grad}\, f = -\boldsymbol{V}$ を満たすことがわかり, 従って f は $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルである．□

注意　上の定理において, ベクトル場は空間全体で定義されている．一方で, 例えば空間全体から z-軸を除いた部分 (以下, D で表す) で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

は $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ を満たすが, D 上でスカラー・ポテンシャルを持たない．しかしながら, D の一部分 $D' = \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0\}$ においては, $\tan^{-1} \dfrac{x}{y}$ は $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルである．

第１３週 ポテンシャル (続き)

13.2 ベクトル・ポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{V}$ の **ベクトル・ポテンシャル** であるとは, $\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$ が成り立つときにいう. ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{W}$ を持つならば, その発散は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}) = 0$ を満たす. $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_*$ が $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルならば, $\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_*$ の回転はどの点でも $\boldsymbol{0}$ である.

定理 ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が空間全体で定義されていて, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ を満たすとする. このとき $\boldsymbol{V}$ はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{W}$ を持ち, $\boldsymbol{V}$ の任意のベクトル・ポテンシャルはあるスカラー場 f を用いて $\boldsymbol{W} + \nabla f$ と表される.

証明 前節の定理を踏まえると, $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルが存在することを示せばよい. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ は

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

を意味する. スカラー場 W_1, W_2 として

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3 \tag{3}$$

を満たすものを取る. このとき (2) および (3) を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) \tag{4}$$

を得る. スカラー場 P, Q を

$$P = -V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial z}, \qquad Q = V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z}$$

で定める. このとき (4) から, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ がわかる. スカラー場 W_3 を

$$W_3(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy$$

で定める. このとき

$$\frac{\partial W_3}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z) = -V_2(x,y,z) + \frac{\partial W_1}{\partial z}(x,y,z) \tag{5}$$

がわかり, また

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_3}{\partial y}(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z)dx + Q(x_0,y,z) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)dx + Q(x_0,y,z) \\ &= Q(x,y,z) \\ &= V_1(x,y,z) + \frac{\partial W_2}{\partial z}(x,y,z) \end{aligned} \tag{6}$$

が, 微分と積分の順序交換および $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ を用いてわかる. (3), (5) および (6) から, ベクトル場 $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, W_3)$ は $\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$ を満たすことがわかり, 従って $\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルである. □

注意 スカラー・ポテンシャルに関する定理と同様に, ベクトル・ポテンシャルに関する上の定理において, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は空間全体で定義されている. $\boldsymbol{V}$ の定義域が空間全体ではない場合, $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ を満たすとしてもベクトル・ポテンシャルを持つとは限らない.