解析幾何 — ベクトル解析入門 — (理学共通科目) 平成３０年７月２日

第１２週　Gauss の発散定理

閉曲面とは, 空間のある有界な領域の境界と表される曲面である. 例えば, 球面は閉曲面である. 一方で, 立方体の表面は立方体の内部という有界な領域の境界であり, 6 つの正方形を貼り合わせることによって得られるが, それぞれの辺の各点で立方体の表面は曲面の条件を満たさない. 以下においては, 空間のある有界な領域の境界 S が幾つかの曲面を貼り合わせて得られるとき, S を **区分的に滑らかな閉曲面** と呼ぶことにする.

Gauss の発散定理　S を区分的に滑らかな閉曲面とし, D を S に囲まれた領域とする. このとき S および D を含む空間の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し

$$\iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dxdydz = \int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1}$$

が成り立つ, 但し S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は D の外側を向くものとする.

証明　$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表すとき,

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\partial V_1}{\partial x} dxdydz &= \int_S V_1\, \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}\, dS, \\ \iiint_D \frac{\partial V_2}{\partial y} dxdydz &= \int_S V_2\, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, dS, \\ \iiint_D \frac{\partial V_3}{\partial z} dxdydz &= \int_S V_3\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dS\end{aligned} \tag{2}$$

を示すことができれば, (1) を示すことができる. ここでは, D' を xy-平面の有界な領域とするとき, D が

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D',\ f(x,y) \leqq z \leqq g(x,y)\}$$

と表される場合に (2) の第３式を証明する. (2) の第３式の左辺について,

$$\iiint_D \frac{\partial V_3}{\partial z} dxdydz = \iint_{D'} \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial V_3}{\partial z} dz \right) dxdy = \iint_{D'} (V_3(x,y,g(x,y)) - V_3(x,y,f(x,y))) dxdy \tag{3}$$

を得る. 領域 D の境界である区分的に滑らかな閉曲面 S は

$$\begin{aligned}&S_1 = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D'\}, \quad S_2 = \{(x,y,g(x,y)) \mid (x,y) \in D'\}, \\ &S_3 = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in C',\ f(x,y) \leqq z \leqq g(x,y)\}\end{aligned}$$

を貼り合わせて得られる, 但し C' は D' の境界である. S_3 上で $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ なので, (2) の第３式の右辺は

$$\int_{S_1} V_3\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dS + \int_{S_2} V_3\, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{4}$$

に等しい. S の各点で単位法線ベクトルを与えるベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ は D の外側を向くので, S_1, S_2 それぞれにおいて $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} (f_x,\ f_y, -1), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} (-g_x, -g_y,\ 1)$$

で与えられる. よって (4) の値は

$$\iint_{D'} \frac{-V_3(x,y,f(x,y))}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy + \iint_{D'} \frac{V_3(x,y,g(x,y))}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\, dxdy$$

と表され, これは (3) の右辺に等しい. こうして (2) の第３式を得る. □