第１１週　Stokes の定理

Stokes の定理　C を空間の区分的に滑らかな単純閉曲線とする．S は向きづけ可能な曲面で, C を境界に持つとする．S の各点で単位法線ベクトルを与えるベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ を選んで, C の向きは $\boldsymbol{n}$ が向く方向から見て反時計回りになっているとする．このとき C および S を含む空間の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し,

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

証明　$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表すとき, (1) は

$$\begin{aligned} &\int_S \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_S \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}dS \\ &= \oint_C V_1 dx + \oint_C V_2 dy + \oint_C V_3 dz \end{aligned} \tag{2}$$

と書き換えられる．従って

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\right)dS &= \oint_C V_1 dx, \\ \int_S \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\right)dS &= \oint_C V_2 dy, \\ \int_S \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\right)dS &= \oint_C V_3 dz \end{aligned} \tag{3}$$

を示すことができれば, (2) を示すことができる．ここでは, D を平面の区分的に滑らかな単純閉曲線 C' で囲まれた領域とし, S が $S = \{\boldsymbol{p}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ のように D 上で定義された曲面 $\boldsymbol{p}$ によって与えられている場合に (3) を証明する．$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表すとき,

$$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

を用いて, (3) の第１式の左辺は

$$\iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}(\boldsymbol{p}(u,v)) \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial y}(\boldsymbol{p}(u,v)) \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) dudv \tag{4}$$

と表されることがわかる．ここで D 上の関数 w_1 を $w_1(u,v) = V_1(\boldsymbol{p}(u,v))$ で定めると,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_1}{\partial z} \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}x_u + \frac{\partial V_1}{\partial y}y_u + \frac{\partial V_1}{\partial z}z_u\right)x_v - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}x_v + \frac{\partial V_1}{\partial y}y_v + \frac{\partial V_1}{\partial z}z_v\right)x_u \\ &= \frac{\partial(w_1 x_v)}{\partial u} - \frac{\partial(w_1 x_u)}{\partial v} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって, Green の定理を用いて, (4) の値は

$$\iint_D \left(\frac{\partial(w_1 x_v)}{\partial u} - \frac{\partial(w_1 x_u)}{\partial v}\right)dudv = \oint_{C'} (w_1 x_u du + w_1 x_v dv) = \oint_C V_1 dx$$

と表されることがわかる．以上から, (3) の第１式が成り立つことがわかった．同様に, (3) の第２式および第３式を得ることができる． □

注意　Stokes の定理において, C を xy-平面に含まれる区分的に滑らかな単純閉曲線とし, S を C に囲まれた xy-平面の領域とするとき, (1) は Green の定理における結論に一致する．