第１０週　平面上の Green の定理

曲線 $\boldsymbol{p}$ が閉曲線であるとする, つまり任意の s に対し $\boldsymbol{p}(s)=\boldsymbol{p}(s+l)$ が成り立つような正数 l が存在するとする. 閉曲線 $\boldsymbol{p}$ が **単純** であるまたは **自己交差を持たない** とは, $0 \leqq s_1 < s_2 < l$ に対し $\boldsymbol{p}(s_1) \neq \boldsymbol{p}(s_2)$ が成り立つときにいう.

第８週で扱った線積分の符号は, 曲線のパラメータが増えていく方向, すなわち曲線の向きが指定されることによって決まる. 通常, 平面の単純閉曲線 $C=\{\boldsymbol{p}(s) \mid 0 \leqq s < l\}$ の向きは, C が囲む部分 D を左側に見る方向 (反時計回りの方向) によって定められる.

Green の定理　C を平面の区分的に滑らかな単純閉曲線とし, D を C に囲まれた平面の領域とする. このとき C および D を含む平面の領域上の関数 f, g に対し

$$\oint_C (f dx + g dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dxdy \tag{1}$$

が成り立つ, 但しこの右辺は関数 $-\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}$ の D 上での重積分である.

証明　ここでは D が, 微分積分 II の重積分に関連して現れた縦線集合でありかつ横線集合である場合に (1) を証明する (D が一般の領域である場合には, D を幾つかの縦線集合でありかつ横線集合である領域に分割することで証明できる). このとき D は

$$D=\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\} \tag{2}$$

のようにも表されかつ

$$D=\{(x,y) \mid \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\} \tag{3}$$

のようにも表される. D が (2) のように表されていると思うことで,

$$-\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx = -\int_a^b (f(x,\varphi_2(x)) - f(x,\varphi_1(x)))dx \tag{4}$$

を得る. 領域 D の境界である区分的に滑らかな単純閉曲線 C は高々 4 つの曲線

$$C_1=\{(u+a,\varphi_1(u+a)) \mid 0 \leqq u \leqq b-a\},\quad C_2=\{(b,v+\varphi_1(b)) \mid 0 \leqq v \leqq \varphi_2(b)-\varphi_1(b)\},$$
$$C_3=\{(-u+b,\varphi_2(-u+b)) \mid 0 \leqq u \leqq b-a\},\quad C_4=\{(a,-v+\varphi_2(a)) \mid 0 \leqq v \leqq \varphi_2(a)-\varphi_1(a)\}$$

からなる (C_2, C_4 については, それぞれ $\varphi_1(b)=\varphi_2(b)$ および $\varphi_1(a)=\varphi_2(a)$ のときには考えない). 従って

$$\oint_C f dx = \int_{C_1} f dx + \int_{C_2} f dx + \int_{C_3} f dx + \int_{C_4} f dx \tag{5}$$

が成り立つ. そして

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} f dx = \int_0^{b-a} f(u+a,\varphi_1(u+a)) du = \int_a^b f(x,\varphi_1(x)) dx, \quad \int_{C_2} f dx = 0,\\
&\int_{C_3} f dx = -\int_0^{b-a} f(-u+b,\varphi_2(-u+b)) du = -\int_a^b f(x,\varphi_2(x)) dx, \quad \int_{C_4} f dx = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

であるので, (4), (5), (6) から $-\displaystyle\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \oint_C f dx$ を得る. 同様に, D が (3) のように表されていると思うことで, $\displaystyle\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \oint_C g dy$ を得る. □