# 解析幾何　期末試験　(平成２９年８月７日実施)

**[1]** 空間のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対し, スカラー三重積 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ は次のように表されることを示せ:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**[2]** $a, b, c, d$ を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を次で定める:

$$\boldsymbol{V}(x, y, z) = (x + ay - 4z,\ 2x - 4y + bz,\ cx - 3y + dz).$$

(2-1) $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャルを持つとする. $a, b, c$ を求めよ.
(2-2) $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャルを持つとする. $d$ を求めよ.

**[3]** $\boldsymbol{f}$ を 1 変数 $t$ のベクトル値関数とする.
(3-1) $f = |\boldsymbol{f}|$ とおくとき, $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f}' = ff'$ を示せ.
(3-2) 任意の $t$ に対し $\boldsymbol{f}''(t)$ は $\boldsymbol{f}(t)$ と平行であるとする. このとき $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{f}')(t)$ は $t$ に依らないことを示せ.

**[4]** ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定め, $r = |\boldsymbol{r}|$ とおく. $r \neq 0$ を満たす点で $\nabla \dfrac{1}{r}$ および $\Delta \dfrac{1}{r}$ を求めよ.

**[5]** 曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = (2t, -2t, t)$ で定める. また曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 O, A を $\mathrm{O} = \boldsymbol{p}(0)$, $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(1)$ で定める.
(5-1) スカラー場 $f$ を $f(x, y, z) = x - y + z$ で定める. 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} f\, ds$ を求めよ.
(5-2) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (3x, -2y, z)$ で定める. 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

**[6]** $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0\}$ とし, $C$ を $D$ の境界とする. $C$ の向きを, $D$ を左側に見る方向 (反時計回りの方向) とする. このとき線積分 $\displaystyle\oint_C ((x^2 - y^2)dx + xydy)$ を求めよ.

**[7]** 空間の点 $(2, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ および $(0, 0, 2)$ を頂点とする三角形を $S$ とし, $S$ の単位法線ベクトルとして第 1 座標が正のものを用いる. $C$ を $S$ の境界とする. このときベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (x,\ -x + y,\ z)$ に対し, 線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

**[8]** $D$ を $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$ とし, $S$ を $D$ の境界とする. このとき面積分 $\displaystyle\iint_S (xy^2 z dydz - x^2 yz dzdx + x^2 z^2 dxdy)$ を求めよ.