第１週　ベクトルの内積

1.1 ベクトル

この授業では, ベクトルは主に空間のものを考え, 平面のものもしばしば考える.

ベクトルというものの二つの捉え方がある. 一つ目は, ベクトルとは始点および終点が指定された線分であるというもので, このように捉えることを強調するときベクトルを **幾何ベクトル** という. 通常, 空間の平行移動によって互いに重なり合う二つのベクトルは等しいとみなされるが, 一方で始点の違いを認識する必要があるときは互いを区別することになる. 始点と終点が等しいベクトルを **零ベクトル** といい, $\boldsymbol{o}$ で表す. 二つ目は, ベクトルとは 3 つの数 a_1, a_2, a_3 の順序づけられた組 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ であるというもので, このように捉えることを強調するときベクトルを **数ベクトル** という. 幾何ベクトルは, 空間に座標を導入することによって, 数ベクトルとみなされる: 与えられた幾何ベクトルの始点を原点 $(0,0,0)$ とみなし, そのとき終点の座標によって数ベクトルを定めるのである. また数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ は, 始点が $(0,0,0)$ で終点が (a_1, a_2, a_3) である幾何ベクトルとみなされる (状況によっては始点として $(0,0,0)$ 以外の点を考えることもある).

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の **和** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ およびベクトル $\boldsymbol{a}$ の実数 λ による **スカラー倍** $\lambda\boldsymbol{a}$ が定義され, 従って空間の与えられた 1 点を始点として共有するベクトルの集合は自然にベクトル空間とみなされる.

1.2 内積

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を二つのベクトルとし, これらは始点を共有しているとする. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の **内積** (または **スカラー積**) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ または $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ で定め, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ かつ $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ ならば $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ で定める, 但し $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さであり, θ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がなす角である. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ および実数 λ に対して, 次が成り立つ:

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,

(b) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, $\quad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,

(c) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,

(d) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geqq 0$, かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ と $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ は同値である.

(a), (c), (d) については, 内積の定義から直ちにわかる. (b) についても, 内積の定義に基づいて理解できる. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は $(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)|\boldsymbol{b}|$ とも $|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ ともみなされる. $(|\boldsymbol{a}|\cos\theta)|\boldsymbol{b}|$ は, $\boldsymbol{b}$ を含む直線への $\boldsymbol{a}$ の射影の長さと $\boldsymbol{b}$ の長さの積である. $|\boldsymbol{a}|(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$ も同様に理解される. これらに注意することで, 上の (b) がわかる. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{o}$ ではないとき, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が **直交する** とは, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ が成り立つときにいう.

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ とおく. これらを **基本ベクトル** という. 空間の座標と内積は

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1, \qquad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0$$

を満たすと考える. 従ってベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と表されるとき,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

が成り立つことが上の (a), (b), (c) を用いてわかる.

参考　以上では, 二つの幾何ベクトルの内積から話をはじめて二つの数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積の式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ を導いた. 一方で, 二つの数ベクトルに対しそれらの内積をこの式で定めると, 直ちに上の (a), (b), (c), (d) がわかり, そしてこれらを用いて $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ を求めることができる.

解析幾何　第１週演習問題

(a) 二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し,

$$|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|, \qquad |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2)$$

を示せ.

(b) r を実数とし, $\boldsymbol{a} = (r, -2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, -2)$ とおく. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するような r を求めよ. また $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ が $\cos\theta = -2/3$ を満たすような r を求めよ.

(c) $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$ および $\boldsymbol{b} = (3, 4, -2)$ に直交しかつ長さが 1 であるベクトルを全て求めよ.

(d) $\boldsymbol{a} = (2, -1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 0, -1)$ とおく. $\boldsymbol{b}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いて, $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ と表すことができる. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を求めよ.

第２週　ベクトルの外積

2.1　右手系と左手系

空間の三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとする, つまりいずれも長さが 1 でありかつ第１週で定義された内積に関して互いに直交しているとする．このとき $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および $-\boldsymbol{c}$ も正規直交基底をなす．順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ および $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c})$ のいずれを用いても構わない場合もあれば, いずれかを選択して議論を進めるべき場合もある．上のような二つの組のいずれかを選択しなければならない場合には, 通常右手系と呼ばれる組を選択する．順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が **右手系** であるとは, 右手の親指および人差し指をそれぞれ曲げずに $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ にあてたとき, 中指を $\boldsymbol{c}$ が指す方向に向けることができるときにいう．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が右手系であるとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c})$ は **左手系** であるという．

以下, 空間の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ に対し, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は右手系であるとする．三つの数ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が右手系であることと $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を列ベクトルとする 3 次正方行列の行列式 $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ が 1 に等しいことは同値である．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が正規直交基底をなすとは限らないが少なくとも空間の基底をなすとするとき, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が **右手系** であるとは, $\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) > 0$ であるときにいうことにする．

2.2　外積

空間の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の **外積** (または **ベクトル積**) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次のように定める:

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属ならば, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ とする;
- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は次の (i), (ii), (iii) を満たすベクトルである (このようなベクトルは唯一つである):
  - (i) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のいずれにも直交する;
  - (ii) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい;
  - (iii) 空間の基底をなす $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に対し, 順序づけられた組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ は右手系をなす．

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と表されるとき, 上の条件 (i), (ii), (iii) から

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - b_3 a_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

がわかる．この式を用いてまたは幾何ベクトルについての考察から, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ および実数 λ に対して次が成り立つことがわかる:

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,　特に $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ である;

(b) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$,　 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$;

(c) $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$;

(d) $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{o}$,　 $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$,　 $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$,　 $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$.

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を **スカラー三重積** といい, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ で表す．$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を **ベクトル三重積** という．

注意　スカラー三重積 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ はベクトルではなく数 (スカラー) である．ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラーではなくベクトルである．

解析幾何　第２週演習問題

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ を空間のベクトルとする.

(a) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が空間の基底をなし, そして $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は右手系であるとする. このとき以下の順序づけられた組のそれぞれが右手系かどうかを判定せよ.

$$(-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}) \quad (-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}) \quad (-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) \quad (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) \quad (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

(b) $\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(3,4,-2)$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(c) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$ を示せ.

(d) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であることとスカラー三重積 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ が 0 ではないことは同値であることを示せ.

(e) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が空間の基底をなしかつ順序づけられた組 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ は右手系であるとするとき, $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積に等しいことを示せ.

(f) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$ を示せ.

(g) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ と表されるとき,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\det(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

を示せ.

(h) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ を数ベクトルとするとき,

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}][\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f} \end{vmatrix}$$

を示せ.

(i) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を示せ ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を数ベクトルとしてよい). さらに以下の (i1)∼(i7) に答えよ.

(i1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ を示せ.

(i2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ が等しくならないような $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の例を挙げよ.

(i3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ を示せ.

(i4) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})))) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を示せ.

(i5) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ とする. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ が存在することと $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ は同値であることを示せ. さらに, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ が成り立つとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ はある実数 r を用いて

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + r\boldsymbol{a}$$

と表されることを示せ.

(i6) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$ を示せ.

(i7) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}$ を示せ.

(j) (i7) の結果を用いて,

$$[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]^2,$$
$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}]\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$$

を示せ.

第３週　一般のベクトル値関数

3.1　ベクトル値関数

変数 t がある値をとる度に空間のベクトル $\boldsymbol{f}(t)$ を対応させる $\boldsymbol{f}$ を (変数 t の) **ベクトル値関数**という. 以下においては, 1 変数のベクトル値関数の基本事項を列挙するが, 変数が一つではない場合も大体同じように話を進めることができる.

$\boldsymbol{f}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とする. 各 t に対し $\boldsymbol{f}(t)$ を数ベクトルとして表示する場合, 通常 $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ のように三つの t の関数 f_1, f_2, f_3 の組が用いられる.

$\boldsymbol{c}$ を空間の (固定された) ベクトルとする. t のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ の $t = t_0$ における **極限** が $\boldsymbol{c}$ であるとは, $\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{c}| = 0$ が成り立つときにいい, これが成り立つことを

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{c} \tag{1}$$

で表す. $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ と表されまた $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ と表されるとき, (1) が成り立つことと $i = 1, 2, 3$ に対して $\lim_{t\to t_0} f_i(t) = c_i$ が成り立つことは同値である.

t のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で **連続** であるとは, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{f}(t_0)$ に対し (1) が成り立つときにいう. $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ と表されるとき, $\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で連続であることと f_1, f_2, f_3 が $t = t_0$ で連続であることは同値である. $\boldsymbol{f}$ が各 t で連続であるとき, $\boldsymbol{f}$ は **連続** または **$\boldsymbol{C^0}$ 級** であるという.

定理　$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とし, h を t の実数値関数とする. このとき実数値関数 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ およびベクトル値関数 $h\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ は連続である.

$\boldsymbol{f}$ が $t = t_0$ で **微分可能** であるとは, ある空間のベクトル $\boldsymbol{d}$ に対し

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)) = \boldsymbol{d} \tag{2}$$

が成り立つときにいう. (2) が成り立つとき, $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{f}$ の $t = t_0$ における **微分係数** といい, $\boldsymbol{f}'(t_0)$ または $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dt}(t_0)$ で表す. $\boldsymbol{f}$ が各 t で微分可能であるとき, $\boldsymbol{f}$ は **微分可能** であるといい, 各 t に対し t での微分係数 $\boldsymbol{f}'(t)$ を対応させるベクトル値関数 $\boldsymbol{f}'$ を $\boldsymbol{f}$ の **導関数** という. 微分可能なベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ の導関数 $\boldsymbol{f}'$ が微分可能であるとき, $\boldsymbol{f}'$ の導関数を $\boldsymbol{f}$ の **2 階の導関数** といい, $\boldsymbol{f}''$ で表す. 同様に, もし存在するならば, 正の整数 k に対し **$\boldsymbol{k}$ 階の導関数** $\boldsymbol{f}^{(k)}$ が定義される. 導関数が連続であるベクトル値関数は **$\boldsymbol{C^1}$ 級** であるという. 一般に, 正の整数 k に対し k 階までの導関数を持ちかつそれらが全て連続であるベクトル値関数は **$\boldsymbol{C^k}$ 級** であるという.

以下においては, 実数値関数およびベクトル値関数は全て任意の正の整数 k に対し C^k 級であると仮定する.

定理　$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とし, h を t の実数値関数とする. このとき次が成り立つ:

(a) $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$,

(b) $(h\boldsymbol{f})' = h'\boldsymbol{f} + h\boldsymbol{f}'$,

(c) $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\cdot\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}'$,

(d) $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}'$.

第３週　一般のベクトル値関数 (続き)

3.2　ベクトル値関数の例

1 変数のベクトル値関数の例として曲線や質点の運動を挙げることができる．

例　$\boldsymbol{p}$ を t のベクトル値関数とする．通常, 任意の t に対し $\boldsymbol{p}'(t) \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとき, $\boldsymbol{p}$ を **曲線** という．$\boldsymbol{p}$ を曲線とする．t の関数 s で $\dfrac{ds}{dt} = |\boldsymbol{p}'|$ を満たすものをとると, $s = s(t)$ の逆関数 $t = t(s)$ が存在する．従って t のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ を s のベクトル値関数とみなすことができる．s のような変数, パラメータを $\boldsymbol{p}$ の **弧長パラメータ** という．s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとするとき,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds}(s) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}'(t)|}\boldsymbol{p}'(t)$$

が成り立つ．従って $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$ は長さが 1 のベクトルを与えるベクトル値関数であることがわかる．$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$ を $\boldsymbol{t}$ で表し, **(単位) 接線ベクトル** という．各 t に対し $\boldsymbol{p}(t)$ が (t に依らない) 空間の固定された 1 点を始点とするとき, $\boldsymbol{p}(t)$ の終点と表される点の集合が空間内の図形としての曲線である．この 1 点を通る直線のうち対応する $\boldsymbol{t}$ によって与えられる直線が, この点での曲線の **接線** である．

例　$\boldsymbol{r}$ は t のベクトル値関数で, ある質点の運動を表すとする, つまり各 t に対し $\boldsymbol{r}(t)$ は空間の定点 O を始点としそして時刻 t における質点の位置を終点とするベクトル値関数であるとする．このときベクトル値関数 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}'$ は与えられた質点の **速度** であり, ベクトル値関数 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}''$ は質点の **加速度** である．質点の質量を m とするとき, ベクトル値関数 $m\boldsymbol{v}$ は質点の **運動量** である．質点に働く外力を表すベクトル値関数を $\boldsymbol{F}$ とするとき, ニュートンの運動方程式は $\boldsymbol{F} = (m\boldsymbol{v})'$ または $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ で与えられる．ベクトル値関数 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ は定点 O に関する速度の **モーメント** である．

多変数のベクトル値関数の例として曲面やベクトル場を挙げることができる．

例　$\boldsymbol{p}$ を 2 変数 u, v のベクトル値関数とする．$\boldsymbol{p}$ の u, v に関する偏導関数をそれぞれ $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ で表す．通常, 任意の (u, v) に対し $\boldsymbol{p}_u(u, v), \boldsymbol{p}_v(u, v)$ が 1 次独立であるとき, $\boldsymbol{p}$ を **曲面** という．$\boldsymbol{p}$ が曲面であることと任意の (u, v) に対し $\boldsymbol{p}_u(u, v) \times \boldsymbol{p}_v(u, v) \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つことは同値である．$\boldsymbol{p}$ を曲面とする．各 (u, v) に対し $\boldsymbol{p}(u, v)$ が (u, v に依らない) 空間の固定された 1 点を始点とするとき, $\boldsymbol{p}(u, v)$ の終点と表される点の集合が空間内の図形としての曲面である．この 1 点を通る平面のうち対応する $\boldsymbol{p}_u, \boldsymbol{p}_v$ によって与えられる平面が, この点での曲面の **接平面** である．この平面は $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v$ に直交する．

例　$\boldsymbol{V}$ を 3 変数 x, y, z のベクトル値関数とする．$\boldsymbol{V}$ を空間の各点 (x, y, z) に対し空間のベクトル $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ を対応させるものとみなすことができ, このようにみなされた $\boldsymbol{V}$ を **ベクトル場** という．ベクトル場が各点で与えるベクトルの始点としてその点 (対応させたベクトルを考えている点) を想起することが多い．ベクトル場の例として電磁気学に現れる電場や磁場, また流体の速度などを挙げることができ, ベクトル場は空間の点を指定する変数 x, y, z だけではなく時刻を指定する変数 t にも依存することがある．$\boldsymbol{V}$ が平面のベクトルを対応させる 2 変数のベクトル値関数である場合も同様に (平面上の) ベクトル場を考えることができる．

注意　空間または空間のある領域で定義された関数は **スカラー場** とも言われる．「スカラー場」という用語を見たら, ベクトル場ではなく関数を考えていると思えばよい．

注意　この授業では, 「ベクトル場」という用語を上の例のように用いる．一方で, ベクトル値関数そのものではなくベクトル値関数の定義域を「ベクトル場」と呼ぶ流儀もある．「スカラー場」についても同様である．

解析幾何　第３週演習問題

(a) $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ を 1 変数のベクトル値関数とする.

(a1) 実数値関数 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ およびベクトル値関数 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ は連続であることを示せ.

(a2) $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$ は微分可能でありそして $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\cdot\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}'$ および $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}'$ が成り立つことを示せ.

(b) λ を定数とし, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を空間のベクトルとする. 1 変数 t のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{a}\cos\lambda t + \boldsymbol{b}\sin\lambda t$ で定める. このとき $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}' = \lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ および $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}''] = 0$ を示せ.

(c) $\boldsymbol{f}$ を 1 変数 t のベクトル値関数とする.

(c1) $|\boldsymbol{f}|$ が一定であることと $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}' = 0$ は同値であることを示せ.

(c2) $f = |\boldsymbol{f}|$ とおくとき, $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}' = ff'$ を示せ.

(c3) 任意の t に対し $\boldsymbol{f}(t) \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとき, $\dfrac{1}{|\boldsymbol{f}|}\boldsymbol{f}$ の導関数を $\boldsymbol{f}$ および $\boldsymbol{f}'$ を用いて表せ.

(c4) $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}')' = \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}''$ を示せ.

(c5) $\boldsymbol{a}$ を t に依らない空間のベクトルとする. $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ を満たすとき, $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ.

(c6) 任意の t に対し $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}''](t) = 0$ が成り立つとき, $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}')(t)$ と $(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}')'(t)$ は 1 次従属であることを示せ.

(d) a, b は定数で, $(a, b) \neq (0, 0)$ を満たすとする. このとき $\boldsymbol{p}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ で定義される 1 変数 t のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ は曲線であることを示し, さらに $\boldsymbol{p}$ の接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を求めよ.

(e) $\boldsymbol{r}$ は t のベクトル値関数で, ある質点の運動を表すとする. 質点に働く外力 $\boldsymbol{F}$ は定点 O を力の中心とする中心力である (任意の時刻において $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ は平行である) とする. このとき質点の速度のモーメントは一定であることを示せ (質点の速度のモーメントの 1/2 倍は質点の面積速度であり, これが一定であることはケプラーの第二法則として知られている).

(f) ϕ, ψ を 1 変数 u の関数とし, 任意の u に対し $\phi(u) > 0$ および $(\phi'(u), \psi'(u)) \neq (0, 0)$ を仮定する. このとき

$$\boldsymbol{p}(u, v) = (\phi(u)\cos v,\ \phi(u)\sin v,\ \psi(u))$$

で定義される 2 変数 u, v のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ に対し $\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v$ を求め, そして $\boldsymbol{p}$ が曲面であることを示せ.

第４週　関数の勾配ベクトル場

4.1　勾配ベクトル場の定義

f をスカラー場とする．このとき f を 3 変数 x, y, z の関数とみなすことができ, 従って f の x, y, z それぞれについての偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を考えることができる．これらで作られるベクトル場 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ をスカラー場 f の **勾配ベクトル場** と呼び, $\mathrm{grad}\, f$ または ∇f で表す．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ をここではそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表すことにする．このとき f の勾配ベクトル場 ∇f を

$$\nabla f = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f$$

と表すことができると考え, この式から

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

とおいたものを考える．このように定義された ∇ を **Hamilton の演算子** または **ナブラ** と呼ぶ.

4.2　方向微分

$\boldsymbol{e}$ を長さが 1 のベクトル (**単位ベクトル**) とする．空間の固定された点 P を通り $\boldsymbol{e}$ と平行な直線上の点 Q をとる．線分 PQ の長さを δ で表すとき, スカラー場 f に対し,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(\mathrm{Q}) - f(\mathrm{P})}{\delta}$$

を f の点 P における $\boldsymbol{e}$ 方向に対する **方向微分係数** という．合成関数の微分法を用いて, 次の定理を得る.

定理　単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{e} = (l, m, n)$ とおき, 点 P の座標を (x, y, z) とおく．固定された P および $\boldsymbol{e}$ に対し, 1 変数 s の関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(s) = f(x + sl,\ y + sm,\ z + sn)$$

で定める．このとき f の点 P における $\boldsymbol{e}$ 方向に対する方向微分係数は

$$\tilde{f}'(0) = \boldsymbol{e} \cdot \nabla f = l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

と表される, 但し ∇f および $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ はいずれも点 P でのものである.

注意　(1) において $(l, m, n) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ または $(0, 0, 1)$ とおくことで, 偏微分係数は方向微分係数の一種とみなすことができる.

第４週　関数の勾配ベクトル場 (続き)

4.3　等位面

　スカラー場 f および与えられた定数 c に対し $f = c$ を満たす空間の点の全体を f の **等位面** という．点 P で $\nabla f \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとする．このとき f の x, y または z についての偏微分係数は零ではない．ここでは $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ とする．このとき陰関数の定理から, P を通る f の等位面は P の周りで 2 変数 x, y の関数 $z = z(x, y)$ のグラフと表される．特に, この等位面の P での接平面および法線 (P を通りかつ接平面に直交する直線) が定まる．法線を与える単位ベクトルを **単位法線ベクトル** (または **単位法ベクトル**) という．単位法線ベクトルは符号を除いて一意に定まる．単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ が点 P での等位面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ である場合には, $\boldsymbol{n}$ 方向に対する方向微分係数を $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ で表す．(1) から,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla f \tag{2}$$

がわかる．さらに次の定理が成り立つ．

定理　点 P で $\nabla f \neq \boldsymbol{o}$ が成り立つとし, $\boldsymbol{n}$ を P を通る f の等位面の P での単位法線ベクトルとする．このとき次が成り立つ:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

証明　まず ∇f は等位面の接平面に直交する．このことを示すために, P を通る f の等位面に含まれる曲線を与えるベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ をとる．$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表すとき, 合成関数 $\hat{f}(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ は一定値 $f(\mathrm{P})$ をとる．よって

$$0 = \frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

を得る．よって ∇f は等位面の接ベクトルである $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ に直交する．そして, 点 P で任意に与えられた接ベクトルに対し $\boldsymbol{p}$ を選んで $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ がその接ベクトルに等しくなるようにできるので, ∇f は等位面の接平面に直交することがわかった．こうしてある定数 k を用いて, 点 P で $\nabla f = k\boldsymbol{n}$ と表すことができる．このとき (2) を用いて,

$$k = k\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial n}$$

がわかるので, (3) を得る．□

注意　(2) が成り立つことに注意して, しばしば

$$\frac{\partial}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla$$

という演算子を用いることがある．

解析幾何　第４週演習問題

(a) f, g を x, y, z の関数とし, ϕ を 1 変数関数とする. このとき次が成り立つことを示せ:

(a1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

(a2) $\nabla(cf) = c\nabla f$ (c は定数),

(a3) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,

(a4) g は零にはならないとするとき, $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}(g\nabla f - f\nabla g)$,

(a5) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定め, $r = |\boldsymbol{r}|$ ($= \boldsymbol{r}$ の長さ) とおく.

(b1) $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を定ベクトルとするとき, $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ を求めよ.

(b2) $\nabla r = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{r}$ および $\nabla\dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$ を示せ. さらに整数 n に対し, $\nabla r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$ を示せ.

(b3) $\nabla(\log r) = \dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{r}$ を示せ.

(b4) ϕ を 1 変数 r の関数とする. x, y, z の関数 f を $f(x,y,z) = \phi(r(x,y,z))$ で定めるとき, $\nabla f = \dfrac{1}{r}\dfrac{d\phi}{dr}\boldsymbol{r}$ を示せ.

(c) x, y, z の関数 f を $f(x,y,z) = x + xy^2 + yz^3$ で定める. 空間の点 P を $(2,-1,1)$ とする.

(c1) P における ∇f を求めよ.

(c2) P を通る f の等位面の P での単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(c3) 単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を $\boldsymbol{e} = (1/3, 2/3, 2/3)$ で定める. このとき f の P における $\boldsymbol{e}$ 方向に対する方向微分係数を求めよ.

第５週　ベクトル場の発散

5.1　ベクトル場の発散の定義

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする．このとき $\boldsymbol{V}$ を 3 変数 x, y, z の関数 V_1, V_2, V_3 を用いて $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表すことができる．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の **発散** $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

によって定義される関数 (スカラー場) である．$\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ と表されるので

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) = \operatorname{div}\boldsymbol{V}$$

が成り立つと考えることにより, $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ を $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ と表すことがある．

注意　$\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ と類似の $\boldsymbol{V} \cdot \nabla$ は

$$\boldsymbol{V} \cdot \nabla = (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = V_1\frac{\partial}{\partial x} + V_2\frac{\partial}{\partial y} + V_3\frac{\partial}{\partial z}$$

という微分演算子 (微分作用素) を表す．特に $\nabla \cdot \boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{V} \cdot \nabla$ である．

5.2　ベクトル場の発散の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るために, ここでは $\boldsymbol{V}$ が縦ベクトルでありそして

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z) \\ V_2(x,y,z) \\ V_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

と定数を成分とする 3 次正方行列 (v_{ij}) を用いて表されている場合を考える．(v_{ij}) を

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \frac{v_{12}+v_{21}}{2} & \frac{v_{13}+v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}+v_{12}}{2} & v_{22} & \frac{v_{23}+v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}+v_{13}}{2} & \frac{v_{32}+v_{23}}{2} & v_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{12}-v_{21}}{2} & \frac{v_{13}-v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}-v_{12}}{2} & 0 & \frac{v_{23}-v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}-v_{13}}{2} & \frac{v_{32}-v_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように対称行列と交代行列の和で表す．(2) の右辺第 1 項に現れている対称行列を A とするとき, A は直交行列を用いて対角化できるので, 空間の正規直交基底をなす 3 つのベクトル $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\boldsymbol{t}_3$ および 3 つの実数 λ_1, λ_2, λ_3 を選んで $A\boldsymbol{t}_i = \lambda_i\boldsymbol{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が成り立つようにできる．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の表示 (1) に現れる行列を A のみに置き換えて考えるならば, このベクトル場の振る舞いは $\boldsymbol{t}_i$ および λ_i に着目すると理解し易い．ベクトル場が気体や液体等の流れの各点での速度を表すと考えるとき, 原点 $(0, 0, 0)$ から流出する量を正数とし流入する量を負数として, これらの総和は

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \operatorname{tr}(T^{-1}AT) = \operatorname{tr}A = v_{11} + v_{22} + v_{33} = \operatorname{div}\boldsymbol{V}$$

によって表されると考えることができる (但し $T = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)$ である)．なお, (2) の右辺第 2 項に現れている交代行列は, 次週でベクトル場の回転の意味を知るために考察の対象となる．

$\boldsymbol{V}$ が一般のベクトル場である場合には, 空間の点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を任意にとって固定し V_i を

$$V_i(x,y,z) = V_i(\mathrm{P}_0) + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\mathrm{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial V_i}{\partial y}(\mathrm{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial V_i}{\partial z}(\mathrm{P}_0)(z - z_0) + \text{高次の項}$$

と表し, この式の右辺の 1 次の項に着目することで, 前段落と同様に $\boldsymbol{V}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ が意味するものを知ることができる．つまり, $\boldsymbol{V}$ が気体や液体等の流れを表すと考えるとき, P_0 に流出および流入する量の総和は P_0 での $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ の値に等しいと考えることができる．

解析幾何　第５週演習問題

(a) スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, 次が成り立つことを示せ:

(a1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}) = \operatorname{div}\boldsymbol{V} + \operatorname{div}\boldsymbol{W}$,

(a2) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{V}) = c\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ (c は定数),

(a3) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{V}) = (\operatorname{grad} f)\cdot\boldsymbol{V} + f\operatorname{div}\boldsymbol{V}$.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ で定め, $r = |\boldsymbol{r}|$ とおく.

(b1) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(b2) n を整数とするとき, ベクトル場 $r^n\boldsymbol{r}$ の発散 $\operatorname{div}(r^n\boldsymbol{r})$ を求めよ.

(b3) $\boldsymbol{a}$ を定ベクトルとするとき, ベクトル場 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$ の発散 $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$ を求めよ.

(c) λ_1, λ_2, λ_3 を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x,y,z) = \lambda_1 x\boldsymbol{i}+\lambda_2 y\boldsymbol{j}+\lambda_3 z\boldsymbol{k}$ で定める. このとき $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$ を求めよ.

(d) スカラー場 f, g に対し, 次が成り立つことを示せ:

(d1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla\cdot\nabla f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$,

(d2) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(fg)) = f\operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + 2\operatorname{grad} f\cdot\operatorname{grad} g + g\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$
$(\nabla\cdot\nabla(fg) = f\,\nabla\cdot\nabla g + 2\,\nabla f\cdot\nabla g + g\,\nabla\cdot\nabla f)$,

(d3) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f\times\operatorname{grad} g) = 0$　$(\nabla\cdot(\nabla f\times\nabla g) = 0)$.

(e) スカラー場 f に対し, $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ とおく. このとき上の (d1) に注意して,

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とおいたものを **Laplace の演算子** または **ラプラシアン** と呼ぶ. $\Delta f = 0$ を満たす f を **調和関数** と呼ぶ.

(e1) n を整数とする. このとき r^n が調和関数であるような n を全て求めよ.

(e2) $\Delta\log r$ を求めよ.

(e3) ϕ を 1 変数 r の関数とする. スカラー場 f を $f(x,y,z) = \phi(r(x,y,z))$ で定めるとき, $\Delta f = \dfrac{d^2\phi}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d\phi}{dr}$ を示せ.

第６週　ベクトル場の回転

6.1　ベクトル場の回転の定義

ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ の **回転** $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ は

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

によって定義されるベクトル場である．$\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ なので

$$\nabla \times \boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$$

が成り立つと考えることにより, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ を $\nabla \times \boldsymbol{V}$ と表すことがある．

6.2　ベクトル場の回転の意味

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るために, 第５週の 5.2 節と同様にまず V_i が $V_i(x,y,z) = v_{i1}x + v_{i2}y + v_{i3}z$ と表されている場合を考える．そして 3 次正方行列 (v_{ij}) を対称行列 A と交代行列 B の和で表す．5.2 節では A に着目して, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知るための議論を行なった．ここでは B に着目して, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ についての議論を行なう．交代行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_{12}-v_{21}}{2} & \frac{v_{13}-v_{31}}{2} \\ \frac{v_{21}-v_{12}}{2} & 0 & \frac{v_{23}-v_{32}}{2} \\ \frac{v_{31}-v_{13}}{2} & \frac{v_{32}-v_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表す．従って

$$\omega_1 = \frac{v_{32} - v_{23}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{v_{13} - v_{31}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{v_{21} - v_{12}}{2}$$

が成り立つ．このとき

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

が成り立つ, 但し $\boldsymbol{\omega} = {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ でありまた $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}(x,y,z) = {}^t(x,y,z)$ で定義されるベクトル場である．ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は零ベクトル $\boldsymbol{o}$ ではないとする．原点 $(0,0,0)$ の近くの点 (x,y,z) を任意にとるとき, ベクトル $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(x,y,z)$ は $\boldsymbol{o}$ であるかまたは $\boldsymbol{\omega}$ とも $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ とも直交する．従ってベクトル場 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ は, ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が定める原点 $(0,0,0)$ を通る直線の周りの回転を表していることがわかる．このとき $\boldsymbol{\omega}$ はこの回転の回転軸を与えていて, 回転の向きも定めている．そして, 以上の状況においては, (1) で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の回転は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\omega}$ と表されることがわかる．

$\boldsymbol{V}$ が一般のベクトル場である場合には, 空間の点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を任意にとって固定し V_i を

$$V_i(x,y,z) = V_i(\mathrm{P}_0) + \frac{\partial V_i}{\partial x}(\mathrm{P}_0)(x - x_0) + \frac{\partial V_i}{\partial y}(\mathrm{P}_0)(y - y_0) + \frac{\partial V_i}{\partial z}(\mathrm{P}_0)(z - z_0) + \text{高次の項}$$

と表し, この式の右辺の 1 次の項に着目することで, 前段落と同様に $\boldsymbol{V}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が意味するものを知ることができる．つまり, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ が点 P_0 で与えるベクトルは, P_0 の周りで $\boldsymbol{V}$ が表す回転の回転軸を与えかつ向きも定めると考えることができる．

解析幾何　第６週演習問題

(a) スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, 次が成り立つことを示せ:

(a1) $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{W}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$,

(a2) $\mathrm{rot}\,(c\boldsymbol{V}) = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ (c は定数),

(a3) $\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{V}) = (\mathrm{grad}\,f)\times\boldsymbol{V} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定める.

(b1) $\boldsymbol{r}$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(b2) $\boldsymbol{a}$ を定ベクトルとするとき, ベクトル場 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$ を求めよ.

(c) λ_1, λ_2, λ_3 を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x,y,z) = \lambda_1 x\boldsymbol{i} + \lambda_2 y\boldsymbol{j} + \lambda_3 z\boldsymbol{k}$ で定める. このとき $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ を求めよ.

(d) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x,y,z) = x\boldsymbol{j}$ で定める. このとき $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ を求めよ.

(e) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$ を示せ.

(f) スカラー場 f に対し, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{o}$ $(\nabla\times\nabla f = \boldsymbol{o})$ を示せ.

(g) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) = 0$ $(\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}) = 0)$ を示せ.

(h) スカラー場 f, g に対しベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = f\,\mathrm{grad}\,g$ で定めるとき, $\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = 0$ を示せ.

(i) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}) - \Delta\boldsymbol{V}$ を示せ, 但し $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ に対し, $\Delta\boldsymbol{V} = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)$.

(j) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ に対し, 次が成り立つことを示せ:

(j1) $(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = \dfrac{1}{2}\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V}\times\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{V})$,

(j2) $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} + (\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$,

(j3) $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = (\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{W})\boldsymbol{V} - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{V})\boldsymbol{W}$,

但し $\boldsymbol{V}\cdot\nabla$ は第５週の 5.1 節で与えられていてまた $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, W_3)$ に対し

$$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} = ((\boldsymbol{V}\cdot\nabla)W_1,\ (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)W_2,\ (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)W_3).$$

第８週　曲線の長さおよび線積分

8.1　曲線の長さ

1 変数 t のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が曲線であるとし, $\boldsymbol{p}$ の定義域を開区間 I とする. $a, b \in I$ は $a < b$ を満たすとし, $\boldsymbol{p}(a)$, $\boldsymbol{p}(b)$ の終点をそれぞれ A, B で表す ($\boldsymbol{p}$ の始点を開区間 I の点の取り方に依らない空間の固定された 1 点とする). 曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの長さは, 微分積分 I で現れた 1 変数関数のグラフの長さと同様に定義される. n を正の整数とし, $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n \in I$ は閉区間 $[a, b]$ の分割を与えるとする, つまり $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ となるようにとる. $\boldsymbol{p}(t_i)$ の終点を P_i で表すとき, $\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ が定める折線の長さは曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの長さを近似していると考えられ,

$$\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (\boldsymbol{p}(t_i) - \boldsymbol{p}(t_{i-1})) \right| (t_i - t_{i-1})$$

と表される. n を限りなく大きくしていき $[a, b]$ の分割の巾 $\max\limits_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1})$ が限りなく 0 に近づくようにするとき, 上の折線の長さは

$$\int_a^b |\boldsymbol{p}'(t)| dt \quad \left(\boldsymbol{p}'(t) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t) \right)$$

に近づく. この値が曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までの **長さ** である. t の関数 $s = s(t)$ を

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{p}'(t)| dt$$

で定めると, $s'(t) = |\boldsymbol{p}'(t)| \neq 0$ なので, $s = s(t)$ は逆関数 $t = t(s)$ を持ち従って $\boldsymbol{p}$ を s の関数と思うことができる. このとき s は $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータである.

8.2　スカラー場の線積分

f をスカラー場とする. s を $\boldsymbol{p}$ の弧長パラメータとする. s が $s = \alpha$ から $s = \beta$ まで動くとき, 曲線 $\boldsymbol{p}$ に沿う f の積分を考えたい. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A, B をそれぞれ $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\beta)$ とする. $\alpha < \beta$ とする. n を正の整数とし, $s_0 = \alpha, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = \beta$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ の分割を与えるとする. このとき

$$\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}(s_i))(s_i - s_{i-1}) \tag{1}$$

は今考えている積分に関する f の Riemann 和であり, n を限りなく大きくしていき $[\alpha, \beta]$ の分割の巾 $\max\limits_{i=1,\ldots,n}(s_i - s_{i-1})$ を限りなく 0 に近づけるとき, (1) の値は 1 変数 s の関数である $f(\boldsymbol{p}(s))$ の積分

$$\int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{p}(s)) ds$$

に近づく. この値を $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ または $\displaystyle\int_C f ds$ で表す, 但し $C = \{\boldsymbol{p}(s) \mid \alpha \leqq s \leqq \beta\}$ である (つまり C は $\alpha \leqq s \leqq \beta$ に対し $\boldsymbol{p}(s)$ の終点と表される点の集合である). これを曲線 $\boldsymbol{p}$ の A から B までのスカラー場 f の **線積分** とよぶ. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の一般のパラメータ t について, $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(a)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(b)$ とする, 但し $a < b$ とする. このとき $s'(t) = |\boldsymbol{p}'(t)|$ を用いて,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{p}(t)) |\boldsymbol{p}'(t)| dt$$

がわかる. 曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 B から点 A までの線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} f ds$ は $-\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ に等しい.

第８週　曲線の長さおよび線積分 (続き)

8.3　ベクトル場の線積分

$\boldsymbol{t}$ を曲線 $\boldsymbol{p}$ の単位接線ベクトルとする: $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds}$. このときベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 曲線の各点で $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{t}$ のスカラー積という値を対応させる関数 $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t}$ を考えることができる. これを s の関数とみなし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$ から点 $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\beta)$ までの **線積分** $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ $\left(\text{または} \displaystyle\int_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}\right)$ を

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{t})(s) ds$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表しまた $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と表すとき,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(V_1(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dx}{ds}(s) + V_2(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dy}{ds}(s) + V_3(\boldsymbol{p}(s)) \frac{dz}{ds}(s) \right) ds$$

が成り立つことに着目して, $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) \quad \left(\text{または} \int_C (V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz) \right)$$

とも表す. 特に, スカラー場 f に対しベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (f, 0, 0)$ で定めるとき, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dx$ で表す. $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dy$, $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dz$ についても同様である.

8.4　線積分に関する注意事項

曲線 $\boldsymbol{p}$ が **閉曲線** である, つまり任意の s に対し $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(s+l)$ が成り立つような (s に依らない) 正数 l が存在するとする. このとき $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(\alpha)$ と $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(\alpha + l)$ は等しく, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を $\displaystyle\oint_C f ds$ で表す, 但し $C = \{\boldsymbol{p}(s) \mid \alpha \leqq s \leqq \alpha + l\}$ である.

曲線 $\boldsymbol{p}$ は任意の t に対し $\boldsymbol{p}'(t) \neq \boldsymbol{o}$ を満たす. 一方で, 線積分を考えるときには, 以上のような曲線だけではなく, 1 変数ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ で, 有限個の点において $\boldsymbol{p}'$ が連続ではないが右極限および左極限を持ちかつ他の点では $\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{o}$ となるものも考えることがある. このようなベクトル値関数を **区分的に滑らかな曲線** と呼ぶ. 区分的に滑らかな曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A から点 B までの線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{P}_{i-1}}^{\mathrm{P}_i} f ds$ で定める, 但し P_i は $\boldsymbol{p}(t_i)$ の終点であり, また $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ および $i = 1, \ldots, n$ に対し (t_{i-1}, t_i) 上で $\boldsymbol{p}$ は曲線である ($\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{o}$) とする.

スカラー場 f およびベクトル場 $\boldsymbol{V} = V_1 \boldsymbol{i} + V_2 \boldsymbol{j} + V_3 \boldsymbol{k}$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dx + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dy + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f dz, \\
&\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} ds = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_1 ds + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_2 ds + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} V_3 ds, \\
&\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \times d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{t} ds = \boldsymbol{i} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_2 dz - V_3 dy) + \boldsymbol{j} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_3 dx - V_1 dz) + \boldsymbol{k} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (V_1 dy - V_2 dx)
\end{aligned}$$

という線積分を考えることがある.

解析幾何　第８週演習問題

(a) 曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = (2t, -t, -2t)$ で定める．また曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 O, A を $\mathrm{O} = \boldsymbol{p}(0)$, $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(1)$ で定める．このとき以下に与えられたスカラー場 f に対し, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} f ds$ を求めよ:

(a1) $f(x, y, z) = x$;

(a2) $f(x, y, z) = y$;

(a3) $f(x, y, z) = x + y + z$;

(a4) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$;

(a5) $f(x, y, z) = xyz$.

(b) 点 O および点 A を (a) でのように定める．また点 B を $(2, -1, 0)$ とし, 線分 OB と線分 BA をつないで得られる折線を C で表す．このとき上の (a1)∼(a5) で与えられたスカラー場 f に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C f ds = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} f ds$ を求めよ.

(c) 曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = (k\cos t, k\sin t, t)$ で定める, 但し k は正の定数である．また曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A, B を $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(0)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(2\pi)$ で定める．このとき以下に与えられたスカラー場 f に対し, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を求めよ:

(c1) $f(x, y, z) = z$;

(c2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

(c3) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$;

(c4) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(d) 曲線 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(t) = (-8t, 6t, 5t^2)$ で定める．また曲線 $\boldsymbol{p}$ の点 A, B を $\mathrm{A} = \boldsymbol{p}(-2)$, $\mathrm{B} = \boldsymbol{p}(-1)$ で定める．このとき以下に与えられたスカラー場 f に対し, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f ds$ を求めよ:

(d1) $f(x, y, z) = x$;

(d2) $f(x, y, z) = yz$.

(e) 曲線 $\boldsymbol{p}$ および点 O, A を (a) でのように定める．また a, b, c を定数とする．このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ:

(e1) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (a, b, c)$;

(e2) $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (ax, by, cz)$.

(f) 点 O および点 A を (a) でのように定める．また点 B および折線 C を (b) でのように定める．このとき上の (e1), (e2) で与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．

(g) 曲線 $\boldsymbol{p}$ および点 A, B を (c) でのように定める．このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ:

(g1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,0,1)$;

(g2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x,y,z)$;

(g3) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (-y,x,z)$.

(h) 曲線 $\boldsymbol{p}$ および点 A, B を (d) でのように定める．このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ:

(h1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (3,4,1)$;

(h2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (-y,x,z)$;

(h2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x,y,2z)$.

(i) C を閉曲線とし，f をスカラー場とする．このとき $\displaystyle\oint_C \operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{r} = 0$ を示せ．

第９週　曲面の面積および面積分

9.1　曲面の面積

2 変数 u, v のベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が曲面であるとする. また $\boldsymbol{p}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^2$ の長方形

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(u,v) \mid a \leqq u \leqq b,\ c \leqq v \leqq d\}$$

とする. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積は, 微分積分 II で現れた 2 変数関数のグラフの曲面積と同様に定義される. m, n を正の整数とする. $u_0 = a, u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m = b$ は閉区間 $[a,b]$ の分割を与えるとし, $v_0 = c, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = d$ は閉区間 $[c,d]$ の分割を与えるとする. このとき小長方形

$$R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] = \{(u,v) \mid u_{i-1} \leqq u \leqq u_i,\ v_{j-1} \leqq v \leqq v_j\}$$

上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積の近似値として, $\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1})$, $\boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})$ がなす平行四辺形の面積 $|\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|$ に $(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$ を掛けたものを選ぶ. 従って元々の長方形 R 上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積の近似値として,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{p}_u(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \boldsymbol{p}_v(u_{i-1}, v_{j-1})|(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1}) \tag{1}$$

を選ぶ. (1) の値は R 上の関数 $|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|$ の Riemann 和であり, m, n を限りなく大きくしていき $[a,b]$, $[c,d]$ それぞれの分割の巾 $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,m}(u_i - u_{i-1})$, $\displaystyle\max_{j=1,\ldots,n}(v_j - v_{j-1})$ が限りなく 0 に近づくようにするとき, (1) の値は重積分

$$\iint_R |\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)| du dv$$

に近づく. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域が $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D (円の内部或いはより一般に自己交差を持たない区分的に滑らかな閉曲線の内部くらいを想起すれば良い) である場合も同様に考えることによって, 曲面 $\boldsymbol{p}$ の **面積** が

$$\iint_D |\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)| du dv$$

で定義される.

9.2　スカラー場の面積分

f をスカラー場とする. 曲面 $\boldsymbol{p}$ に沿う f の積分を考えたい. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域を $\boldsymbol{R}^2$ の長方形 $R = [a,b] \times [c,d]$ とする. 小長方形 $R_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ 上の曲面 $\boldsymbol{p}$ の面積を A_{ij} で表す. このとき和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{p}(u_i, v_j))A_{ij}$ を考え, $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,m}(u_i - u_{i-1})$ および $\displaystyle\max_{j=1,\ldots,n}(v_j - v_{j-1})$ を限りなく 0 に近づけるとき, この和は積分

$$\iint_R f(\boldsymbol{p}(u,v))|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)| du dv$$

に近づく. 曲面 $\boldsymbol{p}$ の定義域が $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D である場合も同様に考えることによって, 曲面 $\boldsymbol{p}$ 上のスカラー場 f の **面積分** が

$$\iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v))|\boldsymbol{p}_u(u,v) \times \boldsymbol{p}_v(u,v)| du dv$$

で定義される. この値を $\displaystyle\int_S f dS$ で表す, 但し $S = \{\boldsymbol{p}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ である.

第９週　曲面の面積および面積分 (続き)

9.3　ベクトル場の面積分

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする. $\boldsymbol{p}$ を曲面とし, ベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|}\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \tag{2}$$

で定める. $\boldsymbol{n}$ は曲面の各点での単位法線ベクトルを与える. このとき曲面の各点で $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{n}$ のスカラー積という値を対応させる関数 $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$ を考えることができる. これを u, v の関数とみなし, 曲面 $\boldsymbol{p}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の **面積分** $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_D (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})(u,v)|\boldsymbol{p}_u(u,v)\times\boldsymbol{p}_v(u,v)|dudv$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表しまた $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表すとき,

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v))dudv = \iint_D \left(V_1 \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + V_2 \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + V_3 \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) dudv$$

が成り立つことに着目して, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を $\displaystyle\iint_S (V_1 dydz + V_2 dzdx + V_3 dxdy)$ とも表す. 特に, スカラー場 f に対しベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (f, 0, 0)$ で定めるとき, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を $\displaystyle\iint_S f dydz$ で表す. $\displaystyle\iint_S f dzdx$, $\displaystyle\iint_S f dxdy$ についても同様である.

9.4　面積分に関する注意事項

以上に現れた曲面は, ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ で $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \neq \boldsymbol{o}$ を満たすものまたは各 (u,v) に対し $\boldsymbol{p}(u,v)$ の終点と表される点の集合である. しかしながら, 例えば球面 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ のように, 明らかに曲面の一つとみなされるべきであるにもかかわらず, 曲面 $\boldsymbol{p}$ (およびその定義域) をどのように選んでも与えることができないようなものもある. 球面のような図形も曲面とみなされるように「曲面」という用語を再定義したい. 以下, $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 S が **曲面** であるとは, S の各点 a に対し a を中心とする開球 (球面の内部) B およびベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v \neq \boldsymbol{o}$ および $S \cap B = \{\boldsymbol{p}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ を満たすときにいうことにする, 但し D は $\boldsymbol{p}$ の定義域である. 従って, 今までの意味での曲面を今後も曲面と呼んで差し支えない. **閉曲面** とは, 空間のある有界な領域の境界と表される曲面である (例えば球面は閉曲面である).

曲面 S が **向きづけ可能** であるとは, S の各点 a に対し前段落でのような $\boldsymbol{p}$ を選んで (2) で与えられているベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ が S 上で連続に定義できるときにいう. 向きづけ可能ではない曲面として **メビウスの帯** が知られている. 閉曲面は向きづけ可能である. 通常, 閉曲面 S の各点で単位法線ベクトルを与える連続なベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ として, S が囲む部分の外側を向くものを選ぶ.

閉曲面上での面積分は, 閉曲面を幾つかの部分に分け, それぞれの上での面積分の和として得られる. 閉曲面上の面積分においては, 積分記号 $\displaystyle\int$ としてしばしば $\displaystyle\oint$ も用いられる.

ベクトル場 $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\int_S \boldsymbol{V}dS = \boldsymbol{i}\int_S V_1 dS + \boldsymbol{j}\int_S V_2 dS + \boldsymbol{k}\int_S V_3 dS$$

という面積分を考えることがある. $\displaystyle\int_S \boldsymbol{n}dS$ を曲面 S の **面積ベクトル** といい, $\displaystyle\int_S d\boldsymbol{S}$ とも表す. $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{n}dS$ を $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\times d\boldsymbol{S}$ とも表す.

解析幾何　第９週演習問題

(a) g を $\boldsymbol{R}^2$ の領域 D 上で定義された 2 変数 x, y の関数とし, ベクトル値関数 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(x,y) = (x, y, g(x,y))$ で定める. このときスカラー場 f に対し, 曲面 $\boldsymbol{p}$ 上の f の面積分 $\displaystyle\int_S f dS$ は

$$\int_S f dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + g_x(x,y)^2 + g_y(x,y)^2}dxdy$$

で与えられることを示せ.

(b) 空間の点 $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ および $(0,0,6)$ を頂点とする三角形を S とする. スカラー場 f を $f(x,y,z) = x^2 + 2y + z$ で定める. このとき S 上の f の面積分 $\displaystyle\int_S f dS$ を求めよ.

(c) 正の定数 R に対し, 曲面 S を

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$$

で定める. このとき以下に与えられたスカラー場 f に対し, 面積分 $\displaystyle\int_S f dS$ を求めよ:

(c1) $f(x,y,z) = z$;

(c2) $f(x,y,z) = z^2$;

(c3) $f(x,y,z) = x$;

(c4) $f(x,y,z) = xy$.

(d) 三角形 S を (b) でのように定める. このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ:

(d1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (a,b,c)$;

(d2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (ax,by,cz)$,

但し a, b, c は定数である.

(e) 曲面 S を (c) でのように定める. このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ:

(e1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,0,1)$;

(e2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,0,z)$;

(e3) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x,y,z)$;

(e4) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x,0,0)$.

第１０週　平面上の Green の定理

曲線 $\boldsymbol{p}$ が閉曲線であるとする, つまり任意の s に対し $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(s+l)$ が成り立つような正数 l が存在するとする. 閉曲線 $\boldsymbol{p}$ が **単純** であるまたは **自己交差を持たない** とは, $0 \leqq s_1 < s_2 < l$ に対し $\boldsymbol{p}(s_1) \neq \boldsymbol{p}(s_2)$ が成り立つときにいう.

第８週で扱った線積分の符号は, 曲線のパラメータが増えていく方向, すなわち曲線の向きが指定されることによって決まる. 通常, 平面の単純閉曲線 $C = \{\boldsymbol{p}(s) \mid 0 \leqq s < l\}$ の向きは, C が囲む部分 D を左側に見る方向 (反時計回りの方向) によって定められる.

Green の定理　C を平面の区分的に滑らかな単純閉曲線とし, D を C に囲まれた平面の領域とする. このとき C および D を含む平面の領域上の関数 f, g に対し

$$\oint_C (f dx + g dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy \tag{1}$$

が成り立つ, 但しこの右辺は関数 $-\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}$ の D 上での重積分である.

証明　ここでは D が, 微分積分 II の重積分に関連して現れた縦線集合でありかつ横線集合である場合に (1) を証明する (D が一般の領域である場合には, D を幾つかの縦線集合でありかつ横線集合である領域に分割することで証明できる). このとき D は

$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\} \tag{2}$$

のようにも表されかつ

$$D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\} \tag{3}$$

のようにも表される. D が (2) のように表されていると思うことで,

$$-\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = -\int_a^b (f(x, \varphi_2(x)) - f(x, \varphi_1(x))) dx \tag{4}$$

を得る. 領域 D の境界である区分的に滑らかな単純閉曲線 C は高々 4 つの曲線

$$C_1 = \{(u+a, \varphi_1(u+a)) \mid 0 \leqq u \leqq b-a\}, \quad C_2 = \{(b, v+\varphi_1(b)) \mid 0 \leqq v \leqq \varphi_2(b) - \varphi_1(b)\},$$
$$C_3 = \{(-u+b, \varphi_2(-u+b)) \mid 0 \leqq u \leqq b-a\}, \quad C_4 = \{(a, -v+\varphi_2(a)) \mid 0 \leqq v \leqq \varphi_2(a) - \varphi_1(a)\}$$

からなる (C_2, C_4 については, それぞれ $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ および $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ のときには考えない). 従って

$$\oint_C f dx = \int_{C_1} f dx + \int_{C_2} f dx + \int_{C_3} f dx + \int_{C_4} f dx \tag{5}$$

が成り立つ. そして

$$\begin{aligned} &\int_{C_1} f dx = \int_0^{b-a} f(u+a, \varphi_1(u+a)) du = \int_a^b f(x, \varphi_1(x)) dx, \quad \int_{C_2} f dx = 0, \\ &\int_{C_3} f dx = -\int_0^{b-a} f(-u+b, \varphi_2(-u+b)) du = -\int_a^b f(x, \varphi_2(x)) dx, \quad \int_{C_4} f dx = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

であるので, (4), (5), (6) から $-\displaystyle\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \oint_C f dx$ を得る. 同様に, D が (3) のように表されていると思うことで, $\displaystyle\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \oint_C g dy$ を得る. □

解析幾何　第１０週演習問題

以下, 特に説明がない場合には, C は平面の区分的に滑らかな単純閉曲線であり, D は C に囲まれた平面の領域である.

(a) $\boldsymbol{n}$ は C の接線が存在する各点での単位法線ベクトルを与えるベクトル値関数で, D の外側を向くものとする. このとき C および D を含む平面の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2)$ に対し,

$$\oint_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つことを示せ.

(b) D の面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_C (xdy - ydx)$ と表されることを示せ.

(c) D を $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2\}$ とする. C を D の境界とする. このとき以下に与えられた関数の組 (f, g) に対し, 線積分 $\displaystyle\oint_C (fdx + gdy)$ を求めよ:

(c1) $(f(x, y), g(x, y)) = (x, x^2)$;

(c2) $(f(x, y), g(x, y)) = (-y^3, x^2)$;

(c3) $(f(x, y), g(x, y)) = (x^3y^3, x^4y^2)$;

(c4) $(f(x, y), g(x, y)) = (3x^5y^4 + 5x^4y^3, 2x^6y^3 + 3x^5y^2)$.

(d) a を正数とし, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とする. C を D の境界とする. このとき以下に与えられた関数の組 (f, g) に対し, 線積分 $\displaystyle\oint_C (fdx + gdy)$ を求めよ:

(d1) $(f(x, y), g(x, y)) = (y^2, xy)$;

(d2) $(f(x, y), g(x, y)) = (-xy^2, x^2y)$;

(d3) $(f(x, y), g(x, y)) = (x^2y, -xy^2)$;

(d4) $(f(x, y), g(x, y)) = (4x^7y^4 - 2x^5y^3, 2x^8y^3 - x^6y^2)$.

第１１週　Stokes の定理

Stokes の定理　C を空間の区分的に滑らかな単純閉曲線とする．S は向きづけ可能な曲面で，C を境界に持つとする．S の各点で単位法線ベクトルを与えるベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ を選んで，C の向きは $\boldsymbol{n}$ が向く方向から見て反時計回りになっているとする．このとき C および S を含む空間の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し，

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

証明　$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表すとき，(1) は

$$\begin{aligned} &\int_S \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} dS + \int_S \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} dS \\ &= \oint_C V_1 dx + \oint_C V_2 dy + \oint_C V_3 dz \end{aligned} \tag{2}$$

と書き換えられる．従って

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}\right) dS &= \oint_C V_1 dx, \\ \int_S \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}\right) dS &= \oint_C V_2 dy, \\ \int_S \left(\frac{\partial V_3}{\partial y}\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\right) dS &= \oint_C V_3 dz \end{aligned} \tag{3}$$

を示すことができれば，(2) を示すことができる．ここでは，D を平面の区分的に滑らかな単純閉曲線 C' で囲まれた領域とし，S が $S = \{\boldsymbol{p}(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ のように D 上で定義された曲面 $\boldsymbol{p}$ によって与えられている場合に (3) を証明する．$\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と表すとき，

$$\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right)$$

を用いて，(3) の第１式の左辺は

$$\iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}(\boldsymbol{p}(u,v)) \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial y}(\boldsymbol{p}(u,v)) \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right) dudv \tag{4}$$

と表されることがわかる．ここで D 上の関数 w_1 を $w_1(u,v) = V_1(\boldsymbol{p}(u,v))$ で定めると，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_1}{\partial z} \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}x_u + \frac{\partial V_1}{\partial y}y_u + \frac{\partial V_1}{\partial z}z_u\right)x_v - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}x_v + \frac{\partial V_1}{\partial y}y_v + \frac{\partial V_1}{\partial z}z_v\right)x_u \\ &= \frac{\partial(w_1 x_v)}{\partial u} - \frac{\partial(w_1 x_u)}{\partial v} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，Green の定理を用いて，(4) の値は

$$\iint_D \left(\frac{\partial(w_1 x_v)}{\partial u} - \frac{\partial(w_1 x_u)}{\partial v}\right) dudv = \oint_{C'} (w_1 x_u du + w_1 x_v dv) = \oint_C V_1 dx$$

と表されることがわかる．以上から，(3) の第１式が成り立つことがわかった．同様に，(3) の第２式および第３式を得ることができる． □

注意　Stokes の定理において，C を xy-平面に含まれる区分的に滑らかな単純閉曲線とし，S を C に囲まれた xy-平面の領域とするとき，(1) は Green の定理における結論に一致する．

解析幾何　第１１週演習問題

以下, 特に説明がない場合には, C は空間の区分的に滑らかな単純閉曲線であり, S は C を境界とする向きづけ可能な曲面である. また C の向きと S の単位法線ベクトルの関係は, Stokes の定理で述べられているものである.

(a) 線積分 $\displaystyle\oint_C d\boldsymbol{r} \left(= \boldsymbol{i} \oint_C 1dx + \boldsymbol{j} \oint_C 1dy + \boldsymbol{k} \oint_C 1dz \right)$ を求めよ.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定める. このとき線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. また定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し, $\displaystyle\oint_C (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 2 \int_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}$ を示せ.

(c) C を $C = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする. C の向きは, z 軸の正の方向から見たときに反時計回りのものであるとする. このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ:

(c1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$;

(c2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,0,y)$;

(c3) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,x,0)$;

(c4) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x^2y - y^3 + xz^2,\ x^3 - xy^2 - y^3z,\ xy^2 + 2yz^2)$.

(d) 空間の点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ および $(0,0,2)$ を頂点とする三角形を S とし, S の単位法線ベクトルは第 1 座標が正のものを用いる. C を S の境界とする. このとき以下に与えられたベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, 線積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ:

(d1) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (0,0,y)$;

(d2) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (z,0,0)$;

(d3) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (y,y,0)$;

(d4) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (z,z,0)$;

(d5) $\boldsymbol{V}(x,y,z) = (2y,0,-x)$.

(e) 円柱面 $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と平面 $2x - 2y + z = 4$ の共通部分である閉曲線を C とする. C の向きは, z-軸の正の方向から見て反時計回りのものであるとする. このとき線積分 $\displaystyle\oint_C (x^2zdx + y^2zdy + xydz)$ を求めよ.

第１２週　Gauss の発散定理

閉曲面とは, 空間のある有界な領域の境界と表される曲面である. 例えば, 球面は閉曲面である. 一方で, 立方体の表面は立方体の内部という空間の有界な領域の境界であり, 6 つの正方形を貼り合わせることによって得られるが, それぞれの辺の各点で立方体の表面は曲面の条件を満たさない. 以下においては, 空間のある有界な領域の境界 S が幾つかの曲面を貼り合わせて得られるとき, S を **区分的に滑らかな閉曲面** と呼ぶことにする.

Gauss の発散定理　S を区分的に滑らかな閉曲面とし, D を S に囲まれた領域とする. このとき S および D を含む空間の領域上のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し,

$$\iiint_D \operatorname{div}\boldsymbol{V}\,dxdydz = \int_S \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{S}. \tag{1}$$

証明　$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}=(V_1,V_2,V_3)$ と表すとき,

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\partial V_1}{\partial x}dxdydz &= \int_S V_1\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,\\ \iiint_D \frac{\partial V_2}{\partial y}dxdydz &= \int_S V_2\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,\\ \iiint_D \frac{\partial V_3}{\partial z}dxdydz &= \int_S V_3\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,dS\end{aligned} \tag{2}$$

を示すことができれば, (1) を示すことができる. ここでは, D' を xy-平面の有界な領域とするとき, D が

$$D=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D',\ f(x,y)\leqq z\leqq g(x,y)\}$$

と表される場合に (2) の第３式を証明する. (2) の第３式の左辺について,

$$\iiint_D \frac{\partial V_3}{\partial z}dxdydz = \iint_{D'}\left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)}\frac{\partial V_3}{\partial z}dz\right)dxdy = \iint_{D'}(V_3(x,y,g(x,y))-V_3(x,y,f(x,y)))dxdy \tag{3}$$

を得る. 領域 D の境界である区分的に滑らかな閉曲面 S は

$$\begin{aligned}&S_1=\{(x,y,f(x,y))\mid (x,y)\in D'\},\quad S_2=\{(x,y,g(x,y))\mid (x,y)\in D'\},\\ &S_3=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in C',\ f(x,y)\leqq z\leqq g(x,y)\}\end{aligned}$$

を貼り合わせて得られる, 但し C' は D' の境界である. S_3 上で $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}=0$ なので, (2) の第３式の右辺は

$$\int_{S_1} V_3\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_{S_2} V_3\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{4}$$

に等しい. S の各点で単位法線ベクトルを与えるベクトル値関数 $\boldsymbol{n}$ は D の外側を向くので, S_1, S_2 それぞれにおいて $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}(f_x,\ f_y,-1),\qquad \boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}(-g_x,-g_y,\ 1)$$

で与えられる. よって (4) の値は

$$\iint_{D'}\frac{-V_3(x,y,f(x,y))}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy + \iint_{D'}\frac{V_3(x,y,g(x,y))}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dxdy$$

と表され, これは (3) の右辺に等しい. こうして (2) の第３式を得る. □

解析幾何　第１２週演習問題

以下, 特に説明がない場合には, S は区分的に滑らかな閉曲面であり, D は S に囲まれた空間の領域である. また, ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ に対し,

$$\iiint_D \boldsymbol{V}\, dxdydz = \boldsymbol{i} \iiint_D V_1\, dxdydz + \boldsymbol{j} \iiint_D V_2\, dxdydz + \boldsymbol{k} \iiint_D V_3\, dxdydz$$

とする.

(a) スカラー場 f に対し, $\displaystyle\iiint_D \mathrm{grad}\, f\, dxdydz = \int_S f\boldsymbol{n} dS$ を示せ. 特に, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{n} dS = \boldsymbol{o}$ (S の面積ベクトルは零である) を示せ.

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, $\displaystyle\iiint_D \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}\, dxdydz = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{V} dS = -\int_S \boldsymbol{V} \times d\boldsymbol{S}$ を示せ.

(c) スカラー場 f に対し, $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ で S の接平面を考えることができる各点における $\boldsymbol{n}$ 方向に対する方向微分係数を表す. このとき $\displaystyle\iiint_D \Delta f\, dxdydz = \int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS$ を示せ.

(d) ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (ax, by, cz)$ で定めるとき, $\displaystyle\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = (a + b + c) \times |D|$ を示せ, 但し $|D|$ は D の体積である.

(e) $\displaystyle\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = \iint_S zdxdy = |D|$ を示せ.

(f) ベクトル場 $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ で定め, $r = |\boldsymbol{r}|$ とおく. また $\boldsymbol{r}$ の始点を O で表す. このとき $\displaystyle\int_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS$ を曲面 S の点 O に対する **立体角** または **Gauss の積分** という.

(f1) 点 O が S の外側にあるとき, S の O に対する立体角を求めよ.

(f2) a を正数とし, $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$ とする. S が O を中心とし a を半径とする球面であるとき, S の O に対する立体角を求めよ.

(f3) O が区分的に滑らかな閉曲面 S の内側にあるとき, S の O に対する立体角を求めよ.

(g) D を $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$ とし, S を D の境界とする. このとき定数 a, b, c に対し, 面積分 $\displaystyle\iint_S (ax^2 dydz + by^2 dzdx + cz^2 dxdy)$ を求めよ.

(h) D を $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$ とし, S を D の境界とする. このとき面積分 $\displaystyle\iint_S (-xy^2 zdydz + y^3 zdzdx + x^2 z^2 dxdy)$ を求めよ.

(i) $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対し, 面積分 $\displaystyle\iint_S (xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy)$ を求めよ.

第１３週 ポテンシャル

13.1 スカラー・ポテンシャル

$\boldsymbol{V}$ をベクトル場とする. スカラー場 f が $\boldsymbol{V}$ の **スカラー・ポテンシャル** であるとは, $\boldsymbol{V} = -\mathrm{grad}\, f$ が成り立つときにいう. ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャル f を持つならば, その回転は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = -\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \boldsymbol{o}$ を満たす. f, f_* が $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルならば, $f - f_*$ は定数である.

定理 ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が空間全体で定義されていて, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ を満たすとする. このとき $\boldsymbol{V}$ はスカラー・ポテンシャル f を持ち, $\boldsymbol{V}$ の任意のスカラー・ポテンシャルはある定数 c を用いて $f + c$ と表される.

証明 $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルが存在することを示せばよい. $\boldsymbol{V} = (V_1, V_2, V_3)$ と表す. $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ は

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y} \tag{1}$$

を意味する. 空間の 1 点 (x_0, y_0, z_0) に対し, スカラー場 f を

$$f(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} V_2(x_0,y,z)dy - \int_{z_0}^{z} V_3(x_0,y_0,z)dz$$

で定める. このとき $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -V_1$ は直ちにわかる. また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx\right) - V_2(x_0,y,z) \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z)dx - V_2(x_0,y,z) \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z)dx - V_2(x_0,y,z) \\
&= -V_2(x,y,z)
\end{aligned}$$

が, 微分と積分の順序交換および (1) の第３式を用いてわかる. 同様に

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{x_0}^{x} V_1(x,y,z)dx\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{y_0}^{y} V_2(x_0,y,z)dy\right) - V_3(x_0,y_0,z) \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial V_2}{\partial z}(x_0,y,z)dx - V_3(x_0,y_0,z) \\
&= -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial V_3}{\partial y}(x_0,y,z)dx - V_3(x_0,y_0,z) \\
&= -V_3(x,y,z)
\end{aligned}$$

が, 微分と積分の順序交換, (1) の第１式および第２式を用いてわかる. 以上から, スカラー場 f は $\mathrm{grad}\, f = -\boldsymbol{V}$ を満たすことがわかり, 従って f は $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルである. □

注意 上の定理において, ベクトル場は空間全体で定義されている. 一方で, 例えば空間全体から z-軸を除いた部分 (以下, D で表す) で定義されたベクトル場

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{o}$ を満たすが, D 上でスカラー・ポテンシャルを持たない. しかしながら, D の一部分 $D' = \{(x,y,z) \mid x > 0,\ y > 0\}$ においては, $\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ は $\boldsymbol{V}$ のスカラー・ポテンシャルである.

第１３週　ポテンシャル (続き)

13.2　ベクトル・ポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{W}$ が $\boldsymbol{V}$ の **ベクトル・ポテンシャル** であるとは, $\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$ が成り立つときにいう. ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{W}$ を持つならば, その発散は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}) = 0$ を満たす. $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{W}_*$ が $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルならば, $\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_*$ の回転はどの点でも $\boldsymbol{0}$ である.

定理　ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が空間全体で定義されていて, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ を満たすとする. このとき $\boldsymbol{V}$ はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{W}$ を持ち, $\boldsymbol{V}$ の任意のベクトル・ポテンシャルはあるスカラー場 f を用いて $\boldsymbol{W} + \nabla f$ と表される.

証明　前節の定理を踏まえると, $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルが存在することを示せばよい. $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ は

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

を意味する. スカラー場 W_1, W_2 として

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3 \tag{3}$$

を満たすものを取る. このとき (2) および (3) を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial z}\right) \tag{4}$$

を得る. スカラー場 P, Q を

$$P = -V_2 + \frac{\partial W_1}{\partial z}, \qquad Q = V_1 + \frac{\partial W_2}{\partial z}$$

で定める. このとき (4) から, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ がわかる. スカラー場 W_3 を

$$W_3(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy$$

で定める. このとき

$$\frac{\partial W_3}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z) = -V_2(x, y, z) + \frac{\partial W_1}{\partial z}(x, y, z) \tag{5}$$

がわかり, また

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_3}{\partial y}(x, y, z) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)dx + Q(x_0, y, z)\\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z)dx + Q(x_0, y, z)\\ &= Q(x, y, z)\\ &= V_1(x, y, z) + \frac{\partial W_2}{\partial z}(x, y, z)\end{aligned} \tag{6}$$

が, 微分と積分の順序交換および $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ を用いてわかる. (3), (5) および (6) から, ベクトル場 $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, W_3)$ は $\boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$ を満たすことがわかり, 従って $\boldsymbol{W}$ は $\boldsymbol{V}$ のベクトル・ポテンシャルである. □

注意　スカラー・ポテンシャルに関する定理と同様に, ベクトル・ポテンシャルに関する上の定理において, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ は空間全体で定義されている. $\boldsymbol{V}$ の定義域が空間全体ではない場合, $\boldsymbol{V}$ が $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0$ を満たすとしてもベクトル・ポテンシャルを持つとは限らない.

解析幾何　第１３週演習問題

(a) a, b, c, d を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (-2x+3y+az,\ bx+dy-z,\ x+cy+4z)$$

で定める.

(a1) $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャルを持つとする. a, b, c を求めよ.

(a2) $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャルを持つとする. d を求めよ.

(b) a, b を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (ayz+2z,\ xz-y,\ xy+bx)$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャルを持つとする. a, b を求めよ.

(c) a, b を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (-xyz^2+ay^2z,\ bx^2z^2+2xyz,\ -x^2yz+xy^2)$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ がスカラー・ポテンシャルを持つとする. a, b を求めよ.

(d) a, b を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (xy^2+xz,\ -y^3+ayz,\ by^2z-z^2)$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャルを持つとする. a, b を求めよ.

(e) a, b を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (ax^2y^2z+x^3z,\ bxy^3z+ax^2yz,\ -xy^2z^2+bx^2z^2)$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ がベクトル・ポテンシャルを持つとする. a, b を求めよ.

(f) a, b を定数とし, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (x^2-y^2+axz,\ -2xy+2yz,\ -bx^2+y^2+bz^2)$$

で定める. $\boldsymbol{V}$ が調和関数であるスカラー・ポテンシャルを持つとする. a, b を求めよ.