文系向け微積分および統計入門

数理データーサイエンスの入門講座

熊本大学 数理科学総合教育センター

2021 年度

はじめに

この講義資料は高等学校で学んだ微積分の復習および確認とその応用として統計の歴史や基本的な概念および手法を解説したもので，今後，統計学を学ぶ際に参考になるように書かれています．もちろん，統計を使って作業をする際も統計に関する基本的な考え方を記載しているのでその点は役に立つと思います．例題や演習問題の解答は自分なりに検証し概念や方法の理解に役立てて欲しい．講義ノートにミスや誤植などがあれば担当者までお知らせ下さい．

目 次

1　実数および連続関数

1.1　自然数、整数、有理数，実数，複素数

高校や大学の数学で取り扱う数は以下の５種類である．

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集まり (集合）:$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集まり（集合）:$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集まり（集合）$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{n}{m} \ : m, n \text{ は整数で } m \neq 0\right\}$
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集まり（集合）
- $\mathbb{C}$: 複素数全体の集まり（集合）$\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \text{ は実数}, i = \sqrt{-1}\}$.

1.2　小数

実数を定義するために小数について学ぶ.

- 小数 : 0 と 1 の間にある数で $0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ と表記する．但し, 各 a_n は $0 \leqq a_n \leqq 9$ を満たす整数
- $0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ の $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ を小数部分という．また a_n を小数第 n 位の数という.

例題 1.1 (小数の型).

(1) 0.141421356, 0.23620679, 0.33（有限小数：小数点以下の数が有限個）

(2) $0.333333\cdots$, $0.12121212\cdots$（循環小数：小数点以下一定の長さの数が循環して現れる）

(3) $0.14159765\cdots$, $0.123254809\cdots$（非循環小数）

注意 1.　(1) 有限小数は有理数である．また，循環小数も有理数である．

証明. 有限小数は $0.a_1 a_2 \cdots a_n$ $(a_n \neq 0)$(小数 n 位）と表わされるので,

$$\begin{aligned}
0.a_1 a_2 \cdots a_n &= 0.a_1 + 0.0a_2 + 0.00a_3 + \cdots + 0.\overbrace{000\cdots0}^{n-1}a_n \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\
&= \frac{a_1\ 10^{n-1} + a_2\ 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^{n-1}}
\end{aligned}$$

は有理数である（分母は整数であり分子も整数の和として整数である）.

次に，循環小数が有理数であることを示そう．循環小数を

$$0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n = 0.\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\cdots$$

とかく．但し，最後の $a_n \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} 0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}} + \cdots \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + \cdots\right) \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}} \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n - 1}\cdots(*) \end{aligned}$$

となり，有理数であることが分かる．但し，最後の式において，無限等比級数の和に関する次の事実を用いた.

定理 1.1. $|r| < 1$ ならば

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \quad (\because \lim_{n\to\infty} r^n = 0)$$

特に，$r = \dfrac{1}{10^n}$ と置けば最後の式 $(*)$ が得られる.

(2) 有理数 r は整数部分と小数部分に分けたとき，その小数部分は循環小数として表されるもの，即ち，$r = N+$（循環小数），但し，$N \neq 0$ は整数.

(3) 無理数 z は整数部分と小数部分に分けたとき，小数部分が循環しない小数として表されるもの，即ち，$z = N+$（循環しない小数）.

有理数の集合と無理数の集合を合わせたものが実数全体の集合である．実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は数直線上の点と１対１に対応する．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し数直線という.

以上，５つの数の集合には次の包含関係がある.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.3　実数数列

実数からなる数列（実数列） $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

▶ $\{x_n\}$ が有界とは、全ての番号 n に対し、$|x_n| \leqq M$ となる実数 R が存在するときをいう．

例題 1.2.

- 実数列 $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．実際,$\dfrac{n}{3^n} < 1$ が成り立つ.

証明. （読み飛ばしてよい）不等式 $n < 3^n$ を、数学的帰納法で示す．まず、(I) $n = 1$ のとき、左辺 $= 1$, 右辺 $= 3$ で不等式は成立．(II) $n = k > 1$ のとき、不等式が成立していると仮定する, 即ち、$k < 3^k$ と仮定する．$n = k+1$ のとき、帰納法の仮定から $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k > k+1$．このことは、不等式が $n = k+1$ のとき成立している事を示している．故に、全ての自然数 n に対して、$n < 3^n$, 即ち、$\dfrac{n}{3^n} < 1$ が成立する．□

1.4　数列の極限値

数列 $\{a_n\}$ が n を限りなく大きくしたとき（$n \to \infty$ とかく）ある有限確定値（有限かつ確定した値）a に近づく時

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と表し，a_n は a に**収束する**という．

例題 1.3.　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = 0$. 特に，$|r| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182845904\cdots$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ であることも知られている（証明はやや難）

1.5　変数と関数

- 変数とはある範囲内にある任意の数を記号で表したもの
- 関数とは，変数 x に対して唯一つの値 y を対応させる対応の規則のことをいう．この対応の規則を $y = f(x)$ とかく．
- 関数 $y = f(x)$ が定義できる（有限確定値：有限な値として一意的に確定する）ときの，x が満たすべき条件（範囲）を**定義域**という．このとき，関数値 $y = f(x)$ が取り得る範囲を**値域**という

注意 2. (1) 変数 x に対して x^2 を対応させる規則を $f(x)=x^2$ とかく.

(2) 関数 $f(x)=x^2$ の定義域は $-\infty<x<\infty=(-\infty,\infty)$（数直線全体 $\mathbb{R}$）である．また，$y=f(x)=x^2\geqq 0$ より，地域は $\{y\geqq 0\}=[0,\infty)$（半開区間）

(3) $y=f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $\{x:x\geqq 0\}$ である．そのとき，$\sqrt{x}\geqq 0$ より値域は $\{y:y\geqq 0\}=[0,\infty)$

例.

(1) $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$（１次関数）

(2) $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$（２次関数）

(3) $f(x)=\sin x,\ \cos x\ \ \tan x$（三角関数）

(4) $f(x)=a^x\ (a>0)$（指数関数）

(5) $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ x>0)$（対数関数）

1.6 連続性と微分可能生

1.7 関数の連続性

定義 1.1. $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であるとは，$a\leqq c\leqq b$ に対し，

$$f(c)=\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}}f(x)\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to c\\ x\neq c}}(f(x)-f(c))=0$$

のとき．即ち，$y=f(x)$ のグラフが $x=c$ の所で切れていない（繋がっている）

<u>**コラム**</u>. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$ のとき，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=f(a)g(a)$$

.

逆は一般には成り立たない．実際，

$$1=\lim_{x\to 0}1=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0\times\infty$$

.

例題 1.4. $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$ は開区間 $(0,1)$ で連続である．しかし．$x = 0, 1$ では連続でない．実際,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

である．実は $f(x)$ は $x = 0, 1$ では定義できない．（大学初年次で扱う関数の多くは連続関数であるので連続でない函数は暫く考えなくてよい）．

例題 1.5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x < 1 \\ x + A & \text{if} \quad x \geqq 1 \end{cases}$ が $x = 1$ で連続となるように A の値を求めよ．

実際,

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1 \ , \ \lim_{x\to 1}(x + A) = 1 + A$$
$$f(1) = 1 = 1 + A \quad \therefore \quad A = 1$$

例題 1.6. 関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} & \text{if } x \neq a \\ \\ 2a & \text{if } x = a \end{cases}$ は $x = a$ で連続である．

実際,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x\to a}(x + a) = 2a = f(a)$$

1.8 関数の微分可能性

定義 1.2. 関数 $x = a$ を含む開区間で定義された関数 $f(x)$ について，次の極限値

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

が有限確定値のとき $f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**という．$f'(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ での**微分係数**という．関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は (a, b) で微分可能という．

微分係数は $f'(a)$ は $y = f(x)$ の $x = a$ での接線の傾き（または瞬間変化率）に等しい

定理 1.2. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続．逆は一般には正しくない．

証明. $\lim_{x\to a}(x-a)=0,\ \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= 0\cdot f'(a)=0.\end{aligned}$$

よって，$0=\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) \quad \therefore \quad \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

故に，$f(x)$ は $x=a$ で連続. □

例題 1.7. $f(x)=x^2$ の $x=a$ での微分係数 $f'(a)$ を求める.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

例題 1.8. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の $x=a\ (a>0)$ での微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{xa}\right)=-\frac{1}{a^2}$$

例題 1.9. $f(x)=\sqrt{x(1-x)}\ (0\le x\le 1)$ は $x=0$ で微分可能ではない. 実際,

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=+\infty\end{aligned}$$

は有限でない. よって，$f(x)$ の $x=0$ での微分係数 $f'(0)$ は存在しない.

1.9 導関数

定義 1.3. 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b)（の各点）で微分可能な関数 $f(x)$ について，関数

$$\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の**導関数**という.

コラム. 導関数 $f'(x)$ の $x=a$ での値 $f'(a)$ が $f(x)$ の $x=a$ での微分係数である.
導関数は関数であり，微分係数は導関数の値

公式 1.1 (覚えておこう 1). (1) $f(x)=x^n$ ならば $f'(x)=nx^{n-1}$（n は整数）.

(2) $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ならば $f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

(3) $f(x)=\sin x$ ならば $f'(x)=\cos x$.

(4) $f(x)=\cos x$ ならば $f'(x)=-\sin x$.

(5) $f(x)=\tan x$ ならば $f'(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(6) $f(x)=e^x$ ならば $f'(x)=e^x$.

(7) 自然対数関数 $f(x)=\log x$ ならば $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

公式 1.2 (覚えておこう 2). (1) $\{af(x)\pm bg(x)\}'=af'(x)\pm bg'(x)$（微分操作の線形性）.

(2) $\Big\{f(x)\cdot g(x)\Big\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$（積の微分法）.

(3) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$（分数関数の微分法）.

(4) $\Big\{f\left(g(x)\right)\Big\}'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$（合成関数の微分法).

(5) $\Big\{\log|f(x)|\Big\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ （対数微分法）.

注意 3. 公式 1.1 と公式 1.2 の組み合わせでいろんな関数の導関数を求めることができる.

例題 1.10. (1) $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'=\sin x-x\cos x$.

(2) $y=x^x\overset{\text{def}}{=}e^{x\log x}$ より, $y'=e^{x\log x}(x\log x)'$.

$$y'=(x^x)'=e^{x\log x}(x\log x)'=e^{x\log x}((x)'\log x+x(\log x)')=e^{x\log x}(\log x+x\cdot\frac{1}{x})$$

$$\therefore\quad y'=(x^x)'==x^x(\log x+1)$$

(3) $\left\{\dfrac{x^2}{x^3+1}\right\}'=\dfrac{(x^2)'(x^3+1)-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$

$$\therefore\quad\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{-x^4+2x}{(x^3+1)^2}$$

(4) $(ax^2 \pm e^x)' = 2ax \pm e^x$

(5) $\left\{x \cdot \log x\right\}' = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1$

(6) $\left\{\dfrac{x}{x^2+1}\right\}' = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

(7) $\left\{e^{x^2}\right\}' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$

(8) $y = x^x$ に対し $\log y = x \log x$. よって，$(\log y)' = (x \log x)' = 1 \cdot \log x + x(\log x)' = \log x + 1$. 一方，$(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ より，

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1 \quad \therefore \quad y' = (\log x + 1) \cdot y = x^x(\log x + 1)$$

2　微分学の基本定理

定理 2.1 (平均値の定理)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b) で微分可能でかつ定数でないとする.

(1) $f(a) = f(b)$ ならば，$f'(c) = 0$ をみたす $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する（ロールの定理）

(2) $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する（平均値の定理）.

Proof. $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ とおけば，$g(a) = g(b) = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b - a}$. ロールの定理より，$g'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する．$g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ より，平均値の定理の証明を得る． □

ここで，ロールの定理は最大値・最小値定理から従うことを示そう．
実際，$g(x)$ は閉区間で連続なので，最大値 $M = g(x_1)$・最小値 $m = g(x_0)$ $(a \leq x_0, x_1 \leq b)$ をとる．

- $x_0 = x_1$ ならば $g(x) = M = m$.　よって，$g(x)$ は定数関数．この場合は除外する．こうして，以後は，$x_0 \neq x_1$ とする．

- $x_0 = a$ ならば $x_1 \neq x_0$ より $a < x_1 < b$.

  ここで $g(x_1) = m$ は最小値なので $a < x < b$ を満たす任意の x に対して $g(x) \geqq g(x_1) = m$. こうして，十分小さな $h > 0$ に対し $g(x_1 \pm h) \geqq g(x_1)$ が成立する．故に，

$$\begin{aligned} 0 &\geqq \frac{g(x_1 + h) - g(x_1)}{h} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} g'(x_1) \\ 0 &\leqq \frac{g(x_1 - h) - g(x_1)}{-h} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} g'(x_1) \end{aligned}$$

  よって，

$$0 \leqq g'(x_1) \leqq g'(x_1) \leqq 0 \quad \therefore \quad g'(x_1) = 0.$$

  この時は $c = x_1$ と置けばよい．

- $x_1 = a$ ならば $x_0 \neq x_1$ より $a < x_0 < b$.

$$\begin{aligned} 0 &\geqq \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(x_0) \\ 0 &\leqq \frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{-h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} g'(x_0) \end{aligned}$$

よって,

$$0 \leqq g'(x_0) \leqq g'(x_0) \leqq 0 \quad \therefore \quad g'(x_0) = 0.$$

この時は $c = x_0$ と置けばよい.

- $x_0 = b$ および $x_1 = b$ の場合も同様の議論で定理は証明される.

□

例題 2.1. $f(x) = x^3$ について $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる c を求めよ．但し，$0 < a < b$ とする.

実際,

$$f'(c) = 3c^2 = \frac{b^3-a^3}{b-a} = b^2+ab+a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

特に，$a < c < b$ は明らか.

例. $f(x) = x^3 - 3x \ (1 \leq x \leq 2)$ について $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ となる $c \ (1 < c < 2)$ を求めよ.

実際，$f'(c) = 3c^2 - 3 = 2$ より，$c = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

3 微分法の応用

3.1 極値問題

高等学校で学んだように，極大値・極小値については以下の事が知られている：

(1) $\underline{f'(a) = 0 \ \& \ f''(a) > 0} \Longrightarrow f(a)$ は極小値である.

(2) $\underline{f'(a) = 0 \ \& \ f''(a) < 0} \Longrightarrow f(a)$ は極大値である.

いずれにせよ，<u>$f(x)$ が $x = a$ で極値をもつ $\Longrightarrow f'(a) = 0$</u>が分かる.

> **<u>コラム</u>.** 3 次関数 $f(x) = x^3$ については $f'(x) = 3x^2$ より $f'(0) = 0$ であるが $f(0) = 0$ は極大値でも極大値でもない． こうして，$f'(a) = 0$ は $x = a$ で極値をもつための必要条件であって十分条件ではない.

コラム (極値を求める手順). (i) $f'(a) = 0$ なる a を求める. 即ち, $f'(x) = 0$ の解を求める（解が極値を与える候補となる).

(ii) $f'(x) = 0$ の解の一つを $x = a$ としたとき, $f''(a)$ の値を求める.

• $f''(a) > 0 \Longrightarrow f(a)$ 極小値 • $f''(a) < 0 \Longrightarrow f(a)$ 極大値.

例題 3.1. $f(x) = x^3 - x + 1$ の極値を求めよう. まず, $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ の解は $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である. 一方, $f''(x) = 6x$ である.

(i) $f'(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = 0$ & $f''(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{6}{\sqrt{3}} > 0$. このことから, $f(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = 1 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ は極小値.

(ii) $f'(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = 0$ & $f''(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = -\dfrac{6}{\sqrt{3}} < 0$. このことから, $f(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = 1 + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ は極大値.

例題 3.2. $f(x) = xe^{-x^2}$ の極値を求めよう. まず, $f'(x) = e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ の解は $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である. 一方, $f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$ である.

(i) $f'(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ & $f''(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0$. よって, $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ は極大値.

(ii) $f'(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ & $f''(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0$. よって, $f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ は極小値.

3.2 ロピタルの定理

ロピタルの定理は便利な定理なので覚えておこう.

定理 3.1 (ロピタルの定理). (1) $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a-r, a+r)$ で微分可能かつ $(a-r, a+r)$ の $x = a$ 以外で $g'(x) \neq 0$ とし, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ とする. そのとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

(2) $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a, +\infty)$ で微分可能かつ $g'(x) \neq 0$ とし, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ とする. そのとき,

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

(3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ または ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

例題 3.3. (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{4^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4^x\log 4 - 3^x\log 3}{1} = \log 4 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0.$

4 演習問題

（各自で計算して結果の確認をせよ）

練習問題 4.1.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\ (a>0) = 0$ を示せ.

$0 < a \leqq 1$ ならば $a^n \leqq 1$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0.$ そこで $a > 1$ の場合を考える．その時，$a < k$ を満たす最小の自然数 k に対し，$0 < \frac{a}{k} < 1$ より

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{n!} &= \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k-1}\right)\cdot\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n}\\ &\leqq \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k-1}\right)\cdot\underbrace{\frac{a}{k}\cdot\frac{a}{a}\cdots\frac{a}{k}}_{n-k+1}\\ &= \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{k-1}\right)\left(\frac{a}{k}\right)^{n-k+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ を示せ.

$\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\log n}{n}}$．ロピタルの定理より $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{x} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\right)} = e^0 = 1$$

練習問題 4.2.

(1) $I=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=-\dfrac{1}{2}$ を示せ.

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおく.

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{x}=0$ を示せ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=0\cdot 1=0$$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ を示せ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}=1$ を示せ.

$\cos x=t$ とおくと $x\to\dfrac{\pi}{2}$ ならば $t\to 0$. $\therefore\quad \lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2})=1$ を示せ.

$$\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2})=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

練習問題 4.3 (次の関数を微分せよ). (1) $y=x\log x-x$ $\quad y'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\log x$

(2) $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ $\quad y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y=4^x-3^x=e^{x\log 4}-e^{x\log 3}$ $\quad y'=\log 4\cdot e^{x\log 4}-\log 3\cdot e^{x\log 3}=\log 4\cdot 4^x-\log 3\cdot 3^x$

(4) $y=2^{\sin x}=e^{(\log 2)\sin x}$ $\quad y'=e^{(\log 2)\sin x}\{(\log 2)\sin x\}'=e^{(\log 2)\sin x}(\log 2)\cos x$

$$\therefore\quad y'=2^{\sin x}\cdot(\log 2)\cos x$$

練習問題 4.4 (ロピタルの定理)**.** 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3^x}{x}=0$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0 \quad (3)\ \lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\log x}{x}}=e^{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right)}=e^0=1$$

(3)

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{4t}-e^t-3t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{4e^{4t}-e^t-3}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{16e^{4t}-e^t}{2}=\frac{15}{2}$$

練習問題 4.5. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x)=x^3-3x+2$. 極大値 $f(-1)=4$. 極小値 $f(1)=0$

(2) $f(x)=x\log x\ (x>0)$. 極小値 $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$

(3) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. 極小値 $f(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$. 極大値 $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$

5　積分学

5.1　定積分

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．そのとき，$f(x)$ の $[a,b]$ での最大値を M, 最小値を m とする（最大値・最小値の定理），即ち，

$$\min_{a \leqq x \leqq b} f(x) = m \leqq f(x) \leqq M = \max_{a \leqq x \leqq b} f(x)$$

を満たす.

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

を閉区間 $[a,b]$ の分割とする（等分割とは限らない）．$f(x)$ の $[x_{i-1}, x_i]$ での最大値を M_i，最小値を m_i とする．$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ を満たす ξ_i に対し

$$\begin{aligned}
S_\Delta &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
S_{\min} &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
S_{\max} &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

但し，$|\Delta| = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i - x_{i-1}|$.

$S_{\min}$ を不足和といい，S_{max} を過剰和という．そのとき，

$$m(b-a) \leqq S_{\min} \leqq S_\Delta \leqq S_{\max} \leqq M(b-a)$$

を得る．$|\Delta| \to 0 \Longleftrightarrow n \to \infty$ であることに注意せよ．そこで，$n \to \infty$ としたときの極限値

定義 5.1.

$$\lim_{n \to \infty} S_\Delta = \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = \int_a^b f(x)\,dx$$

を $f(x)$ の区間 $[a,b]$ での**定積分**という．特に，区間 $[a,b]$ の n 等分割をとれば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad \text{を得る.}$$

例えば，$x = \tan t$ とおくとき，$dx = (1+t^2)\,dt$ であることを認めれば，以下を得る（各自確かめよ）．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{x=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$f(x) \geqq 0$ なら，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ のグラフの $[a,b]$ 上の部分の面積そのものである．定積分の定義から容易に次が分かる．

- $f(x)$, $g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．そのとき，

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$,但し $(a < c < b)$ も明らか.

5.2 定積分の基本的性質

定理 5.1 (積分学の基本定理)**.**

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

証明 (読み飛ばして良い)．$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 とする．$a \leq {}^\forall t \leq b$ に対して，$F(t) := \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ とおく．$a < t+h < b$ なる十分小さな h に対し，閉区間 $[t, t+h]$ の分割：$\Delta_n : t = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t+h$ を考える．平均値の定理より $f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(\xi_i)$ となる ξ_i が存在する．そこで，$S_{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ とおく．一方，$\displaystyle\max_{t\leqq x\leqq t+h} f(x) = M(h)$, $\displaystyle\min_{t\leqq x\leqq t+h} f(x) = m(h)$ とおくと，

$$m(h)\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leqq S_{\Delta_n} \leqq M(h)\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

$$\therefore\ m(h)\cdot h \leqq S_{\Delta_n} \leqq M(h)\cdot h \therefore m(h) \leqq \frac{S_{\Delta_n}}{h} \leqq M(h).$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(t)$ より，

$$m(h) \leqq \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \leqq M(h) \Longrightarrow \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \overset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t)$$

を得る．

$$F'(t) \overset{0 \leftarrow h}{\longleftarrow} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} f(x)\,dx = \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \overset{h \to 0}{\longrightarrow} f(t)$$

$$\therefore F'(t) = f(t)$$

こうして，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ を得る． □

6 定積分の計算

6.1 定積分の第２基本的性質

次に，閉区間 $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

に対し，平均値の定理より

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

となる ξ_i $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ が存在する．この ξ_i を用いると，

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty}(f(b) - f(a)) = f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

こうして，

定理 6.1 (積分学の第２基本定理)**.** $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．そのとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b$$

積分の変数変換については以下の公式がある：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

但し，$x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (積分の変数変換)

実際，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．

$$\{F(\varphi(t))\}' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

より，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \{F(\varphi(t))\}'\,dt\\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= F(b)-F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

となる．更に，$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ より，

$$\begin{aligned}\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b &:= f(b)g(b)-f(a)g(a)\\ &= \int_a^b \{f(x)g(x)\}'\,dx\\ &= \int_a^b \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx\\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

この事から，

$$\int_a^b f'(x)g(x) = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

を得る． $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする..

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \Big[F(x)\Big]_a^b\\ &= F(b)-F(a) = -\Big(F(a)-F(b)\Big)\\ &= -\Big[F(x)\Big]_b^a\\ &= -\int_b^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

例題 6.1. (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\log(x+\sqrt{x^2+1})\Big]_0^1 = \log(1+\sqrt{2})$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \big\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\big\}'$ であることを用いる．

例題 6.2. (1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx \overset{t=\sqrt{1-x}}{=} \int_1^0 (1-t^2)^2 t(-2t)\,dt = 2\int_0^1 (t^2-2t^4+t^6)\,dt = \frac{16}{105}.$

(2) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$

6.2 定積分の演習問題

(1) $\displaystyle I = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{4}}\,dx \overset{t=(1-x)^{\frac{1}{4}}}{=} \int_1^0 (1-t^4)\cdot t\cdot(-4t^3)\,dt$

$\displaystyle = 4\int_0^1 (t^4-t^8)\,dt = 4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{45}$

(2) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \overset{x=t^2}{=} \int_0^1 \frac{2t}{t+1}\,dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt$

$= 2\Big[t - \log(t+1)\Big]_0^1 = 2(1-\log 2)$

(3) $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^n}{x}\,dx = \Big[\log x\,(\log x)^n\Big]_1^e - nI_n \quad = 1 - n\,I_n$

$\therefore (n+1)\,I_n = 1 \Longrightarrow I_n = \dfrac{1}{n+1}$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}\,dx$

$= \begin{cases} \pi & \text{if} \quad m = n \\ 0 & \text{if} \quad m \neq n \end{cases} \qquad (0 < m,\ n \in \mathbb{Z})$

(6) $I_n = \displaystyle\int_1^e x^n \log x\,dx = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x\Big]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\,dx$

$= \dfrac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$

(7) $I = \displaystyle\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2}\,dx \overset{x-a=a\sin t}{=} a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$

$= 2a^2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi a^2}{2}$

(8) $I = 2\displaystyle\int_0^1 (3-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-\sin^2 t)\cos^2 t\,dt$

$= 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + 2\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{8}$

(9) $f(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log(1+\tan t)\,dt$ とおく．そのとき，

$f(\frac{\pi}{8}) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \log(1+\tan t)\,dt = 0$ である．一方，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\cdot(\frac{\pi}{4}-x)' - \log(1+\tan x) \\ &= -\log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right) - \log(1+\tan x) \\ &= -\log 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(x) = -(\log 2)\cdot x + C \Longrightarrow C = \frac{\pi}{8}\cdot \log 2$$

$$\left(\because \quad 0 = f(\frac{\pi}{8}) = -\frac{\pi}{8}\cdot \log 2 + c\right)$$

よって,

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{8} - x\right)\cdot \log 2 \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx = f(0) = \frac{\pi}{8}\ \log 2$$

(10) $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx \overset{t=-x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(-t)\sin(-t)}{1+e^{-t}}(-1)\,dt$

$= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\sin t}{1+e^{-t}}\,dt \overset{x=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1+e^{-x}}\,dx$

$2I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{1+e^{-x}}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$

$= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx = 2\cdot\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{故に} \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

7　不定積分（原始関数）

$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**とよび，$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ と書く．こうして

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

を

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の**不定積分**とよぶ．以下の公式は両辺を微分すれば容易に分かる．

(1) $\displaystyle\int \{af(x) + bg(x)\}\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx \overset{x=g(t)}{=} \int f(g(t))g'(t)\,dt.$

(3) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$

(3') $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx.$

注意 4. $F(x),\ G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．即ち，$F'(x)=G'(x)=f(x)$ とする．この時,

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

よって，$F(x)-G(x)=C \quad \therefore \quad G(x)=F(x)+C$.

つまり，二つの原始関数は定数の違いしかない．そこで,

$$\int f(x)=F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

と書く.

7.1 原始関数の例

$b\neq 0, d>0$ かつ C は定数.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \ \ (a\neq -1)\\
&(2) \quad \int \frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C\\
&(3) \quad \int e^{bx}\,dx=\frac{1}{b}e^{bx}+C\\
&(4) \quad \int \sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\cos bx+C\\
&(5) \quad \int \cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx+C\\
&(6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{d^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{d}+C\\
&(7) \quad \int \frac{dx}{x^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}+C\\
&(8) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+d^2})+C\\
&(9) \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1}\right\}+C\\
&(10) \quad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)\ =\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C
\end{aligned}
$$

8 微積分の演習問題

(1) 不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0\\ \therefore\ \lim_{x\to+0} x^x &= \lim_{x\to+0} e^{x\log x}\\ &= e^{\left(\lim\limits_{x\to+0} x\log x\right)} = e^0 = 1\end{aligned}$$

(2) 関数 $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)' &= \frac{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x}\\ &= \frac{\cos x(1+\sin^2 x) - \sin x\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}\\ &= \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}\end{aligned}$$

(3) 対数微分法を用いて $y = \sqrt{\dfrac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\log y &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}\right|\\ &= \frac{1}{2}\left\{\log|1-x| + \log|2x^2+5|\right\} - \frac{3}{2}\log|x-2|\\ \therefore\ \frac{y'}{y} &= \left\{\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{2x^2+5} - \frac{3}{x-2}\right\}\\ \therefore\ y' &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{2x^2+5} - \frac{3}{x-2}\right)\end{aligned}$$

(4) $y = 2^{\log x}$ のとき, $\log y = (\log 2)\cdot\log x.$

$\therefore\ \dfrac{y'}{y} = \dfrac{\log 2}{x}$

$\therefore\ y' = \dfrac{\log 2}{x}2^{\log x}$

(5) $y = e^{-x}\cos x \to y' = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \to y'' = 2e^{-x}\sin x \to y^{(3)} = 2e^{-x}(-\sin x + \cos x) \to y^{(4)} = -4e^{-x}\cos x$

(6) $f(x) = (x-a)\sqrt{b-x} \quad (a < b)$ この時 $\longrightarrow f(a) = f(b) = 0 \longrightarrow c = \dfrac{a+2b}{3}$ とおくと、$a < c < b$ かつ $f'(c) = 0$（ロルの定理）

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}$
$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{(x+1)\log(x+1)+x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\log(x+1)+2} = -\frac{1}{2}$（ロピタルの定理）

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x == \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\sin x\right)$
$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-x)\right)$
$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right) = 1$

(9) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ なら，$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\therefore f(-1) = -2$（極大値）．$f(1) = 2$（極小値）．$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ なら，$f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ $\therefore$ $f(-1) = -1$（極小値）$f(1) = 1$（極大値）

(10)

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}J \\ J = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}I \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \\ J = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \end{cases}$$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \log|x-1| + C$. 実際,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \quad \text{に注意.}$$

(10) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)^2}{((x-1)^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8}\int (x-1)\left\{\frac{1}{(x-1)^2+4}\right\}'\,dx \\
& \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8}\frac{(x-1)}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{1}{8}\frac{(x-1)}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5} + \tan^{-1}\frac{x-1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

(11) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 1} = \log\sqrt{\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\right|}$ $t = \tan\frac{x}{2}$ とおく.

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$I = -2\int \frac{dt}{(t-3)(t+1)} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

(12) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-5}-x}{\sqrt{5}}\right) + C$

$\because$ $t = \sqrt{x^2-2x-5} - x$ とおく.

$$x = -\frac{t^2+5}{2(1+t)},\quad dx = -\frac{t^2+2t-5}{2(1+t)^2}$$

$$\sqrt{x^2-2x-5} = t + x = \frac{t^2+2t-5}{2(1+t)}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I &= \int \frac{-2(1+t)}{t^2+5}\cdot\frac{2(1+t)}{t^2+2t-5}\cdot\frac{t^2+2t-5}{-2(1+t)^2}\,dt \\
&= 2\int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

(13) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt = 2xf(x^2) - 2f(2x)$. $\because$ $F(t) = \displaystyle\int f(t)\,dt$ とおく．

$$\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt = F(x^2) - F(2x)$$

$$\therefore\ \{F(x^2)\}' = f(x^2)\cdot(2x) = 2xf(x^2)$$

(14) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}$. 実際， $x = \sin t$ とおく．

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 u\,du = \frac{1}{16}\int_0^{\pi} (1-\cos 2u)\,du \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

9　数学２の応用編（統計リテラシー）

9.1　統計学の目的

- ▶ 与えられたデータの特徴を記述すること（記述統計学）.
- ▶ 標本からその標本が属している母集団を推測（推計）すること（推計統計学）

9.2　データの整理と処理

9.2.1　準備（ヒストグラム：度数分布表・棒グラフ・折れ線グラフ）

(1) 意図や目的をもって調査・観測しデータ（数値化されているものに限る）を収集・整理する.

(2) 収集した n 個のデータを $t_1, t_2 \ldots, t_n$ とする.

- ▶ $t_1, t_2 \ldots, x_n$ の最小値 $a = a_0$，最大値を $b = b_N$ $(a \leqq b)$ とするとデータ $t_1, t_2 \ldots, x_n$ は数直線上の点なので，それらは全て区間 $[a, b]$ 内に全部収まっている.
- ▶ 区間 $[a, b]$ を次のように階級に分割する．分割は等分割（分割の間隔が等しい）とし，その幅を階級の幅という.
  - $a_0 \sim a_1, a_1 \sim a_2, \ldots, a_{N-1} \sim a_N$：階級という.
  - $x_1 = \dfrac{a_0 + a_1}{2},\ x_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, x_N = \dfrac{a_{N-1} + a_N}{2}$：階級値（階級を代表する数）という．この場合は階級値として中央値を採用した.
  - $(a_1 - a_0) = (a_2 - a_1) = \ldots = (a_N - a_{N-1})$
- ▶ f_j を階級 $a_{j-1} \sim a_j$ $(1 \leqq j \leqq N)$ の中にあるデータ $t_1, t_2 \ldots, t_n$ の数（度数）とする.

このことから以下の度数分布表を得る.

階級	$a_0 \sim a_1$	$a_1 \sim a_2$	$\cdots$	$a_{N-1} \sim a_N$	
階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_N	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_N	n

例. 次の 15 個の数値データ　;　$t_1 \leqq t_2 \leqq, \ldots, \leqq t_{15}$ に対し，５つの階級の分割点 $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. をとり，各階級に入っているデータは次の通りと

する：

$$\begin{aligned}
a_0 \sim a_1 \quad &: t_1, t_2 \to \text{２個} \\
a_1 \sim a_2 \quad &: t_3, t_4, t_5 \to \text{３個} \\
a_2 \sim a_3 \quad &: t_6, x_7, t_8, x_9, t_{10}, t_{11} \to \text{６個} \\
a_3 \sim a_4 \quad &: t_{12}, t_{13}, t_{14} \to \text{３個} \\
a_4 \sim a_5 \quad &: t_{15} \to \text{１個}
\end{aligned}$$

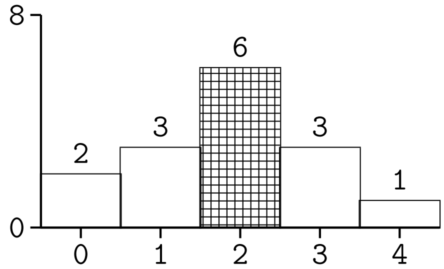
．各階級値を階級値を次のようにする．

$$0 = x_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}, 1 = x_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}, 2 = x_3 = \frac{a_2 + a_3}{2}, 3 = x_4 = \frac{a_3 + a_4}{2}, 4 = x_5 = \frac{a_4 + a_5}{2}$$

ここで階級値 $0, 1, 2, 3, 4$ に意味はない．区別しただけである．そのとき，xy-平面上に点

$$(x_1, 2), (x_2, 3), (x_3, 6), (x_4, 3), (x_5, 1) = (0, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 3), (4, 1)$$

をプロットして線分で左から順に結んで 折れ線グラフが得られる実際は棒グラフから折れ線グラフは容易に描ける（次の棒グラフ上に折れ線グラフを描け）



練習問題 9.1. あるクラスの生徒１５人の数学の成績は

$$30, 38, 58, 50, 80, 95, 68, 80, 84, 77, 68, 49, 74, 97, 66$$

であった，階級の幅を１０点とし，階級値を定め，度数分布表を作成し，棒グラフおよび折れ線グラフで描け．

9.3　母集団の統計量

9.3.1　母集団

▶ 母集団：調査・観測で得られたデータ全体の集まりを**母集団**という．どういう母集団を対象としているのかを明確にすることが重要である

▶ 調査対象と目的に応じ母集団が決まる．

例 (母集団の例)． (1) １８歳以上の日本人男子の身長からなる母集団．

(2) 小学 *1* 年生の身長や体重からなる母集団．

(3) ある進学校のこれまでの受験生全員の数学模試の点数からなる母集団．

(4) あるメーカーで生産している（してきた）蛍光灯の寿命（耐久時間）からなる母集団．

(5) あるメーカーで生産しているボルトの直径からなる母集団．

(6) インフルエンザなどの疾患による入院患者の退院（または完治）までの日数からなる母集団．

定義 9.1. 標本と標本値：母集団内にある調査データを**標本**という．母集団から標本を取り出して計測（実測）して得られた数値を**標本値**または**実現値**という．
標本の実測・実現値が標本値である .

注意 5. 標本は値を特定しないのである種の**変数**と見ることができる．標本を表す記号を大文字の X，標本値を表す記号を小文字の x で表す．因みに，標本 X の標本値（実現値・計測値）が x であるということを簡単に記号：$X = x$ で表す． 標本は母集団から無作為に取り出されている（抽出されている）とする．これを**無作為抽出**（ランダム・サンプリング）という．

定義 9.2. (1) **母平均**：感覚的に言えば，母集団の標本値を数直線 $(-\infty, \infty)$ にプロットしたときそれらデータの中心を表す．母集団のデータは母平均を中心に分布していると考える．

(2) **母分散**：母平均からの（平均的な）バラツキの度合い．
母集団には母平均と母分散が潜在的に存在している．それらを具体的に求めることは一般には不可能である．

9.4 標本変量

定義 9.3. ▶ 母集団の１つの標本 X の関数 $F(X)$ を**標本変量**という．

▶ 母集団の n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の関数 $F(X_1X_2, \ldots, X_n)$ をサイズ n の標本変量という．

定義 9.4 (基本的な標本変量). (1) 標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の 1 次関数 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ を**標本平均**という.

(2) 標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の 2 次関数 $\mathrm{S}^2 = \dfrac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n}$ を**標本分散**という.

(3) 標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の 2 次関数 $U^2 = \dfrac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}$ を**不偏分散**という.

各標本 X_i $(1 \leqq i \leqq n)$ の標本値を x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ とすると，標本変量 $F(X_1X_2, \ldots, X_n)$ の標本値は $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ である.

9.5 標本分布

母集団とは単なるデータ（標本）の集まりではない．母集団には母平均や母分散に加え確率密度関数と呼ばれる特殊な関数が存在することを前提とする．このことで母集団の数学的解析が可能になる.

定義 9.5. 母集団の**確率密度関数**とは次を満たす関数 $f(x)$ のことである.

(1) $0 \leqq f(x) \leqq 1$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(3) $a < X < b$ を満たす標本 X の全体に占める割合 $P(a < X < b)$ は

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられる.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} (x)\,dx$$

を分布関数という．母集団から有限個抽出したデータのヒストグラム（折れ線グラフの概形）から確率密度関数 $y = f(x)$ がある程度推察できる（正確ではない）.

定義 9.6 (読み飛ばして良い). $f(x)$ を母集団の確率密度関数とする．そのとき，母平均や母分散を次のように定義する.

(1) 標本 X の**期待値** $\mu = E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ を母平均と呼ぶ.

(2) 標本変量 $(X - \mu)^2$ の期待値

$$\sigma^2 := E[(X - E[X])^2] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

を母分散と呼ぶ.

注意 6. 母集団の 2 つの標本（変量）X, Y に対し，X と Y が独立（$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$）のとき

- 定数 a, b に対し，$E[a] = a$, $\quad E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$

- ► $E[X^2] \neq (E[X])^2$

定義 9.7 (標準化)．母平均が μ および母分散が σ^2 である母集団の標本 X に対し，標本変量

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

を標本 X の**標準化**という．

注意 7. $E[X]=\mu,\ E[(X-\mu)^2]=\sigma^2$ なので

$$\begin{aligned} E[Z] &= E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}E[X-\mu] = \frac{1}{\sigma}\left(E[X]-\mu\right) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0 \\ E[(Z-E[Z])^2] &= E[Z^2] = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2 = 1 \end{aligned}$$

このことから標本変量 Z の平均は 0 で分散は 1 である．
　任意の母集団からの標本を標準化して得られる母集団の平均は 0 分散は 1となる．

9.6 正規分布

定義 9.8. 確率密度関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$ をもつ母集団を**正規分布母集団**または母集団は正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うという．このとき，母平均は μ であり, 母分散は σ^2 を表す．

注意 8. 実際，正規分布母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の平均 $E[X]$ および分散 $E[(X-\mu)^2]$ は

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}dx = \mu \\ E[(X-\mu)^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}dx = \sigma^2 \end{aligned}$$

　$N(\mu,\sigma^2)$ の標本 X が $a<X<b$ の範囲に収まる確率 $P(a<X<b)$ は

$$\boxed{P(a<X<b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}dx}$$

　で表される．この近似値は**標準正規分布表**を利用して求めることができる．そのために，標本 X の標準化 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ を考える必要がある．

定理 9.1. (1) X が $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，標準化 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ は $N(0,1)$ に従う．

(2) $P(a<X<b) = P(\alpha<Z<\beta)$．　但し，$\alpha = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$, $\beta = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$.

(23) $P(-\infty<X<\infty) = P(-\infty<Z<\infty) = 1$

証明. (2) について：積分の変数変換（置換積分）により

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_a^b e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{z^2}{2}}dz = P(\alpha < Z < \beta)$$

但し，$\alpha = \dfrac{a-\mu}{\sigma}$, $\beta = \dfrac{b-\mu}{\sigma}$. □

公式 9.1. 標本 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．標準正規分布の確率密度関数 $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ のグラフが y-軸対称であることから $A > 0,\ B > 0$ に対し，

(1) $P(-\infty < Z < 0) = P(Z < 0) = P(0 < Z < \infty) = P(Z > 0) = 0.5$

(2) $P(Z < A) = 0.5 + P(0 < Z < A),\ P(Z > -A) = 0.5 + P(-A < Z < 0) = 0.5 + P(0 < Z < A)$

(3) $P(|Z| < A) = P(-A < Z < A) = 2P(0 < Z < A)$

(4) $P(Z < -A) = P(Z > A) = 0.5 - P(0 < Z < A)$

(5) $P(A < Z < B) = P(0 < Z < B) - P(0 < Z < A)$

6) $P(-B < Z < -A) = P(A < Z < B)$

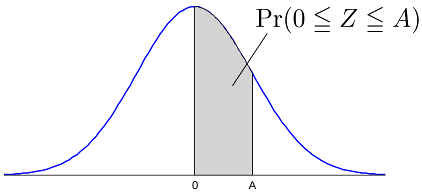
(7) $P(A < Z < B) = P(0 < Z < B) - P(0 < Z < A)$

(8) $P(Z < B) = P(0 < Z < B) - P(0 < Z < A)$

$P(\alpha < Z < \beta)$ は次の標準正規分布表を用いてその近似値が得られる．

標準正規分布表

（教科書[白砂]表 6–3 と同じもの）



A	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

例．$\mathrm{Pr}(0 \le z \le 1.73) = 0.4582$　（ 1.7 の行と .03 の列がクロスする場所の値）

例 (標準正規分布表の見方)．標本 Z が正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、確率 $P(0 < Z < A)$ の A の見方は覚える．

(1) $A = 0.87 = \overset{\text{縦列}}{0.8} + \overset{\text{横行}}{0.07}$ ならば $P(0 < Z < 0.87) = 0.3078.$

(2) $A = 1.34 = \overset{\text{縦列}}{1.3} + \overset{\text{横行}}{0.04}$ ならば $P(0 < Z < 1.34) = 0.4099$

(3) $A = 2.86 = \overset{\text{縦列}}{2.8} + \overset{\text{横行}}{0.06}$ ならば $P(0 < Z < 2.86) = 0.49788$

(4) $A = 1.96 = \overset{\text{縦列}}{1.9} + \overset{\text{横行}}{0.06}$ ならば $P(0 < Z < 1.96) = 0.4750$

(i) 正規分布母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ に於いては，区間

$$\Big[\mu-1.96\,\sigma\ ,\ \mu+1.96\,\sigma\Big]$$

に母集団全体の 95% のデータが分布している．

(ii) サイズ n の標本平均

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$$

の実現値（標本平均値を $\overline{x}$ とすれば母平均 μ が 95% の確率で区間

$$\left[\overline{x}-1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\,\overline{x}+1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

内にある．

例題 9.1. 正規分布母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ に対し，区間 $\Big[\mu-1.96\sigma\,,\,\mu+1.96\sigma\Big]$ の幅が 2 以下になるような標準偏差 σ 範囲は，区間の幅が $2\times1.96\sigma$ ゆえ，

$$2\times1.96\,\sigma=3.92\,\sigma\leqq2\quad\therefore\quad\sigma\leqq0.51$$

9.7 t-分布

定義 9.9. 母集団が自由度 n の t-分布に従うとは，母集団の確率密度関数が

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

で与えられるとき．但し，$B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$（ベータ関数）

注意 9. $y=f_n(x)$ のグラフは y-軸対称である．

自由度 $n-1$ の t-分布母集団に於いては，区間

$$\Big[-t_n(0.05)\ ,\ t_n(0.05)\Big]$$

に母集団全体の 95% のデータが分布している．ここに，$t_{n-1}(0.05)$ の値は n に応じて t-分布表き記載されている．$t_n(0.05)$ については以下の t-分布表を見よ．

定理 9.2. 正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から n 個のデータを抽出した時の標本平均を $\overline{x}$，不偏分散を u^2 とすると $T = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{u}{\sqrt{n}}}$ は自由度 $n-1$ の t-分布に従う.

例題 9.2. 標本変量Tが自由度$n-1$のt-分布に従うとき確率$P(|T| < t_{n-1}(0.05)) = 0.95$, $P(|T| < t_{n-1}(0.1)) = 0.90$ については下記の t-分布表により

(1) $P(|T| < t_{14}(0.05)) = P(-t_{14}(0.05) < T < t_{14}(0.05)) = 2P(0 < T < 2.1245) = 0.95$

(2) $P(|T| < t_8(0.05)) = P(-t_8(0.05) < T < t_8(0.05)) = 2P(0 < T < 2.306) = 0.95$

(3) $P(|T| < t_{10}(0.1)) = P(-t_{10}(0.1) < T < t_{10}(0.1)) = 2P(0 < T < 1.8125) = 0.90$

(4) $P(|T| < t_{105}(0.1)) = P(-t_{15}(0.1) < T < t_{15}(0.1)) = 2P(0 < T < 1.7531) = 0.90$

このことから,

$T = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{u}{\sqrt{n}}}$ は自由度 $n-1$ の t-分布に従うことから母平均 μ は 95% の確率で

$$\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}}$$

を満たす. 即ち，次の確率は

$$P\left(\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$
$$P\left(\overline{x} - t_{n-1}(0.1)\frac{u}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + t_{n-1}(0.1)\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

t-分布表（参考までに）

$n-1$	$t_{n-1}(0.05)$	n	$t_{n-1}(0.05)$	n	$t_{n-1}(0.05)$	n	$t_{n-1}(0.05)$	n	$t_{n-1}(0.05)$
1	12.706	21	2.080	41	2.020	72	1.993	130	1.978
2	4.303	22	2.074	42	2.018	74	1.993	135	1.978
3	3.182	23	2.069	43	2.017	76	1.992	140	1.977
4	2.776	24	2.064	44	2.015	78	1.991	145	1.976
5	2.571	25	2.060	45	2.014	80	1.990	150	1.976
6	2.447	26	2.056	46	2.013	82	1.989	160	1.975
7	2.365	27	2.052	47	2.012	84	1.989	170	1.974
8	2.306	28	2.048	48	2.011	86	1.988	180	1.973
9	2.262	29	2.045	49	2.010	88	1.987	190	1.973
10	2.228	30	2.042	50	2.009	90	1.987	200	1.972
11	2.201	31	2.040	52	2.007	92	1.986	250	1.969
12	2.179	32	2.037	54	2.005	94	1.986	300	1.968
13	2.160	33	2.035	56	2.003	96	1.985	350	1.967
14	2.145	34	2.032	58	2.002	98	1.984	400	1.966
15	2.131	35	2.030	60	2.000	100	1.984	450	1.965
16	2.120	36	2.026	62	1.999	105	1.983	500	1.965
17	2.110	37	2.026	64	1.998	110	1.982	600	1.964
18	2.101	38	2.024	66	1.997	115	1.981	700	1.963
19	2.093	39	2.023	68	1.995	120	$1,980$	800	1.963
20	2.086	40	2.021	70	1.994	125	1.979	900	1.963
								1000	1.962
								∞	1.960

$n-1$	$t_{n-1}(0.1)$	n	$t_{n-1}(0.1)$
1	6.3183	21	1.7207
2	2.9200	22	1.7171
3	2.3534	23	1.7139
4	2.1318	24	1.7109
5	2.0150	25	1.7081
6	1.9432	26	1.7056
7	1.8946	27	1.7033
8	1.8595	28	1.7011
9	1.8331	29	1.6991
10	1.8125	30	1.6973
11	1.7959	50	1.6759
12	1.7823	60	1.6706
13	1.7709	80	1.6641
14	1.7613	100	1.6602
15	1.7531	120	1.6577
16	1.7459	240	1.651
17	1.7396		
18	1.7341		
19	1.7291		
20	1.7247		

例題 9.3. 自由度 $n-1$ の t-分布母集団に対し，区間 $[-t_{n-1}(0.05)\ ,\ t_{n-1}(0.05)]$ の幅が 4 以下になるような n の範囲は t-分布表から

$$2t_{n-1}(0.05) \leqq 4 \quad \therefore\ t_{n-1}(0.05) \leqq 2 \quad \therefore \quad n-1 \geqq 60 \quad \therefore \quad n \geqq 61$$

9.8 χ^2-分布

定義 9.10. 母集団が自由度 n の χ^2-分布に従うとは，母集団の分布関数が

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

で与えられるとき．但し，$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}\,dy$（ガンマ関数）.

自由度 n の χ^2-分布に於いては，区間

$$\Big(\chi_n(0.975) < \chi^2 < \chi_n(0.025)\Big)$$

に母集団全体の 95% の データが分布している．よって，

$$P\Big(\chi_n(0.975) < \chi^2 < \chi_n(0.025)\Big) = 0.95$$

正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から n 個のデータを抽出した時の標本平均を $\overline{x}$, 不偏分散を u^2 とする．このとき，$\chi^2 = \dfrac{(n-1)u^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う．こうして，

母分散 σ^2 が

$$\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)} \leqq \sigma \leqq \frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}$$

を満たす確率は 95% であることが分かる．即ち，

$$P\left(\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)} \leqq \sigma \leqq \frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}\right) = 0.95$$

$\boxed{\chi^2\text{-分布表}}$（参考までに）

n	$\chi^2_n(0.975)$	$\chi^2_n(0.025)$	n	$\chi^2_n(0.975)$	$\chi^2_n(0.025)$	n	$\chi^2_n(0.975)$	$\chi^2_n(0.025)$
1	0.001	5.024	11	3.816	2.192	21	10.28	35.48
2	0.051	7.387	12	4,404	23.34	22	10.98	36.78
3	0.216	9.348	13	5.009	24.74	23	11.69	38.08
4	0.484	11.14	14	5.629	26.12	24	12.40	39.36
5	0.831	12.83	15	6.262	27.49	25	13.12	40.65
6	1.237	14.45	16	6.908	28.85	26	13.84	41.92
7	1.690	16.01	17	7.564	30.19	27	14.57	43.19
8	2.180	17.53	18	8.231	31.53	28	15.31	44.46
9	2.700	19.02	19	8.907	32.85	29	16.05	45.72
10	3.247	20.48	20	9.597	34.12	30	16.79	46.98

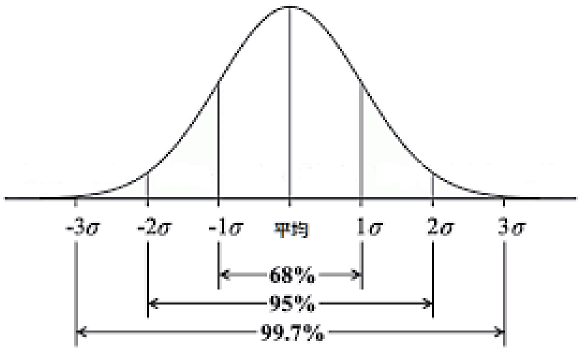
注意 10 (読み飛ばして良い).

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1, \Gamma(a+1) = \Gamma(a), \Gamma(n+1) = n!, \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

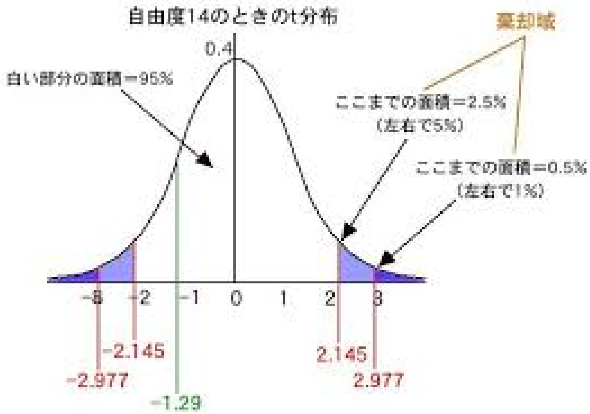
例題 9.4. 自由後 n の χ^2-分布において $\Big(\chi_n(0.975) < \chi^2 < \chi_n(0.025)\Big)$ の幅 $\chi^2_n(0.025) - \chi^2_n(0.975)$ が 20 以下であるような n の範囲は χ^2-分布表から $n \leqq 13$ である．

9.8.1 正規分布，t-分布，χ^2-分布の確率密度関数の概形

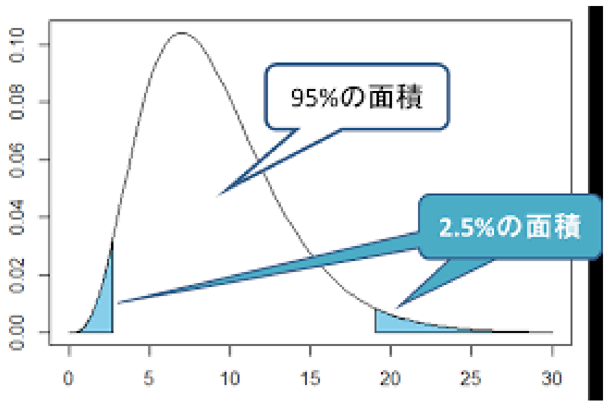
正規分布



t-分布



χ^2-分布



10　統計的推定

取り出した有限個のデータから母集団の平均（母平均）や分散（母分散）を数学的手法によって推測することを「統計的推定」という．取り出すデータの数によって母平均や母分散の推定値も影響される．

10.1　記号および準備

母集団には潜在的に確率密度関数 $0 \leqq f(x) \leqq 1$ や母平均 μ，母分散 σ^2 が存在し，標本変量の期待値として次のように定義される．

$$\begin{aligned}\mu &= E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \\ \sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx\end{aligned}$$

一方，母集団からの n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し，

(1) $E[X_1] = E[X_2] = \cdots = E[X_n] = \mu.$

(2) $E[(X_1-\mu)^2] = E[(X_2-\mu)^2] = \cdots = E[(X_n-\mu)^2] = \sigma^2.$

(3) $E[X_i \cdot X_j] = E[X_i] \cdot E[X_j] = \mu^2 \ (i \neq j).$

(4) $E[X_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$

をみたす．このとき，標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は**独立**である（独立な場合のみを取り扱うことにする）

不偏推定量

以下の標本変量標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ および

不偏分散 $U^2 = \dfrac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}$ に対し，

$\overline{X}$ および U^2 の期待値は

$$E[\overline{X}] = \mu, \quad E[U^2] = \sigma^2$$

$$\Downarrow$$

標本平均 $\overline{X}$ および不偏分散 U^2 は母平均 μ および母分散 σ^2 の**不偏推定量**と呼ばれる．

10.2　正規分布母集団における母平均の区間推定

$N(\mu, \sigma^2)$ を母平均 μ，母分散 σ^2 の正規分布母集団とする．

定理 10.1. 正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ のサイズ n の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を取り出す．そのとき，標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ は正規分布 $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ に従う．即ち，標本 $\overline{X}$ は正規分布 $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ に従う．

注意 11. $\overline{X}$ が $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ に従うことから，標準化 $Z_n = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．ゆえに，確率 $P(|Z_n| < 1.96) = 0.95$ であることが標準正規分布表から分かる．従って，確率（標本 $\overline{X}$ の全体に占める割合）は

$$P\left(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X} \leqq \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

このことより，$\overline{X}$ の実現値（標本値）を $\overline{x}$ とすれば，母平均 μ は 95% の確率で区間

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

内に収まる．

公式 10.1 (母平均の 95% 信頼区間)．　正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ に於いて，母分散 σ^2 が既知のときの μ の推定に関する 95% 信頼区間を

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (\sigma : \text{既知})$$

と定める．

注意 12. 母集団の母分散が既知な場合はあまりない．多くの場合は，母分散は不明（未知）である．

例題 10.1. 18 歳の日本人から抽出した 100 人の身長の測定値の平均が $172cm$ であったとする．18 歳の日本人の身長は正規分布 $N(\mu, 5.2^2)$ に従うことが知られているとする．この時，$n = 100$ 人の標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$ は正規分布 $N(\mu, \frac{5.2^2}{100})$ に従うので $\overline{X}$ の標本値 $\overline{x} = 172$ に対し，信頼区間は

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{5.2}{\sqrt{100}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{5.2}{\sqrt{100}}\right] = [172 - 1.96 \times 0.52\ ,\ 1.96 \times 0.52] = [170.98, 173.02]$$

推定の区間は $[170.98, 173.02] \iff 170.98 \leqq \mu \leqq 173.02$ であり，信頼性は 95% である．

例題 10.2. 信頼度 95% で母平均 μ を推定せよ.
正規分布母集団 $N(\mu, 2)$ から大きさ $n = 50$ の標本を抽出したとき，その標本平均が $\overline{x} = 30$ であった．この時，95% 信頼区間は

$$\left[30 - 1.96\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}\ ,\ 30 - 1.96\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}\right] = \left[30 - \frac{1.96}{5}\ ,\ 30 + \frac{1.96}{5}\right] = [29.61\ ,\ 30.39]$$

こうして μ の推定に対する 95% 信頼区間は　$29.61 \leqq \mu \leqq 30.39$.

10.3　母集団分布が不明のときの母平均の区間推定

母集団が正規分布母集団かどうか不明で母分散 σ^2 が未知とする標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の数が大きくない場合は不偏分散

$$U^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}$$

に対し，

$$\boxed{T = T_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\widehat{U}}{\sqrt{n}}} \text{ は自由度 } n-1 \text{ の } t\text{-分布に従う．}}$$

ここで，95% の確率で T は

$$-t_{n-1}(0.05) \leqq T \leqq t_{n-1}(0.05)$$

を満たすことから，$\overline{X}$ の実現値を $\overline{x}$ に対し 95% の確率で μ は，

$$\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{U}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{U}{\sqrt{n}}$$

を満たす．

公式 10.2 (母平均の 95% 信頼区間). 正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母分散 σ^2 が未知のときの母平均 μ の推定に関する 95% 信頼区間を

$$\left[\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{U}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{U}{\sqrt{n}}\right]$$

と定める．

例題 10.3. 正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から大きさ $n = 16$ の標本を抽出したとき，標本平均値 $\overline{x} = 30$, 不偏分散値 $\widehat{s}^2 = 2^2 = 4$ であった．母平均 μ の 95% 信頼区間は

$$\left[\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}\right] = \left[30 - t_{15}(0.05)\frac{2}{\sqrt{16}}\ ,\ 30 + t_{15}(0.05)\frac{2}{\sqrt{16}}\right]$$

$t_{15}(0.05) = 2.12$ より μ の推定に対する 95% 信頼区間は

$$[28.94\ ,\ 31.06] \Longleftrightarrow 28.94 \leqq \mu \leqq 31.06$$

母集団分布が不明のとき，抽出する標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の数が十分大きい場合は

(i) 中心極限定理より $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ に従う．

(ii) 標本分散 S^2 は σ^2 の一致推定量より，σ^2 は S^2 の実現値 s^2 で近似できる．

結果，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N(\mu, \dfrac{s^2}{n})$ に従う．

公式 10.3 (母平均の 95% 信頼区間)．　母集団（正規分布かどうか不明）の母分散 σ^2 が未知のときの μ の推定に関する 95% 信頼区間は標本数 n が十分に大きい（$n \to \infty$）場合は

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{u}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{u}{\sqrt{n}}\right]$$

と定める．

例題 10.4. 葡萄園で栽培されている葡萄 100 房収穫したところ，1 房についている葡萄の実の数の平均値は $\overline{x} = 30$ 粒で，不偏分散値 $u^2 = 25 = 5^2$ 出会った．この農園の葡萄全体で 1 房についている葡萄の数の推定に対する 95% で信頼区間は

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{u}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{u}{\sqrt{n}}\right] = [30-1.96\frac{5}{\sqrt{100}}\ \ 30+1.96\frac{5}{\sqrt{100}}] = [30-0.98\ ,\ 30+0.98]$$

よって，95% 信頼区間は $[29.02\ ,\ 30.98] \Longleftrightarrow 29.02 \leqq \mu \leqq 30.98$

注意 13.

- % が上がるほど信頼区間は広くなってゆく．

$$\left[90\%\text{信頼区間}\right] \subset \left[95\%\text{信頼区間}\right] \subset \left[98\%\text{信頼区間}\right]$$

  つまり，信頼性を上げたければ区間を広くとれば良い．しかし，区間を広くすれば推定値が絞りにくくなる．

- 母集団の母平均や母分散を信頼区間の中から絞り込むのは難しいが，過去の経験や情報などをもとにある程度は絞り込める（人の感に頼らざるを得ない）

10.4　正規分布母集団における母分散の区間推定

正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$（μ は未知の場合を想定）から n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を抽出する．不偏分散

$$U^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}$$

に対し，

- $\chi^2 = \dfrac{(n-1)U^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布（カイ二乗分布）に従う．
- 95% の確率で χ^2 は
$$\chi^2_{n-1}(0.975) \leqq \chi^2 \leqq \chi^2_{n-1}(0.025)$$
を満たす．即ち，σ^2 は 95% の確率で区間
$$\left[\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}\ ,\ \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.975)}\right]$$
内に収まる．

公式 10.4 (母分散の 95% 信頼区間（母平均未知）)． 正規分布母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ に於いて，σ^2 の推定に関する 95% 信頼区間は
$$\left[\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}\ ,\ \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.975)}\right] = \left[\frac{4.9}{17.53}\ \frac{4.9}{2.180}\right]$$
である．

公式 10.5 (母分散の 95% 信頼区間（母平均既知）)． 母平均 μ が知られている時は，標本分散
$$\mathrm{S}^2 = \frac{(X_1-\mu)^2 + \cdots + (X_n-\mu)^2}{n}$$
に対し，$\chi^2 = \dfrac{n\mathrm{S}^2}{\sigma^2}$ は自由度 n の χ^2-分布（カイ二乗分布）に従うので，95% 信頼区間は
$$\left[\frac{n\mathrm{S}^2}{\chi^2_n(0.025)}\ ,\ \frac{n\mathrm{S}^2}{\chi^2_n(0.975)}\right]$$

例題 10.5. 正規分布母集団から大きさ $n = 9$ の標本を抽出したとき，不偏分散の実現値が $u^2 = 4.9$ であった．母分散の推定に対する 95% 信頼区間は,
$$\left[\frac{(9-1)4.9}{\chi^2_{9-1}(0.025)}\ ,\ \frac{(9-1)4.9}{\chi^2_{9-1}(0.975)}\right] = \left[\frac{8\times 4.9}{17.53}\ ,\ \frac{8\times 4.9}{2.18}\right] = [2.24\ ,\ 17.98]$$
よって，σ^2 の 95% 信頼区間は $2.24 \leqq \sigma^2 \leqq 17.98$

11 統計的検定

11.1 仮設検定

- 統計的な検定とは母集団の母数（母平均や母分散など）に関する仮説の真偽を標本抽出によって得られた情報をもとに判定基準に基づいて判定する手法である．

▶ 仮説の真偽判定にはリスクが伴う．このリスクを**有意水準**と呼び 5% を１つの目安とする．

母集団の母平均や母分散を母数と呼び θ で表す．

$$\theta = \mu \text{ または } \theta = \sigma^2$$

$\boxed{\text{仮説検定ゲームの考え方}}$

(1) 母集団の母数 θ に関する仮説を立てる．（母数は分からないので，過去のデータや経験や統計的推定から値を絞って $\theta = \theta_0$ であるとの仮説を立てる）．

(2) この $\theta = \theta_0$ の仮説をもとに理論的結論を導く．実際は，標本平均や標本分散といった母数の実現値 $\overline{\theta}$ を用いて，95% 信頼区間が設定され，母数 θ_0 がこの区間に入っているか否かをチェックする．

(3) 入っていなければ仮説を棄却する（仮説は間違いである）．また，入っていれば，仮説は採択する（仮説は正しい）とするのである．

11.2　仮設検定と背理法の対比

仮説検定

$$\boxed{\text{仮説 } H_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\boxed{\text{理論値}} \longleftrightarrow \boxed{\text{実現値}}}_{\text{比較して真偽を判定}}$$

背理法

$$\boxed{\text{命題は偽と仮定}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\boxed{\text{論理的帰結}} \longleftrightarrow \boxed{\text{数学的事実}}}_{\text{比較して矛盾を導く}}$$

11.3　仮設検定は戦略である（重要）

(1) 母集団の母数（母平均や母分散）は過去の経験や社会情勢などをもとに定説化された数量である．時代の変化や社会情勢の変化や技術の進歩等に伴い定説が現状と食い違う場合も出てくる．

(2) 大雑把に言えば，検定とはこれまでの定説や主張を「疑い」最終的には定説を理論的に覆すための手法であり戦略的行動でもある．

(3) 検定の主体者は事前情報をもとに確実に定説を覆す自信がなければ検定かけても意味がない．勝つ見込みのない検定は徒労である．

11.4 仮説検定の方法

(1) 母数 θ に対する仮説 H_0：「$\theta = \theta_0$」を設定する（母集団の母数を θ_0 と仮定する）．目的はこの仮説 H_0 を否定することにある．否定に伴うリスクは 5% という設定にしておく．

(2) 母集団から n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を抽出し，標本変量（標本平均や標本分散や不偏分散など）の実現値 $\overline{\theta}$ を求める．

(3) 母集団の仮説をもとに，95% の確率で $\overline{\theta}$ を含む区間 **I** は理論的に設定できる．

(4) 実現値 $\overline{\theta}$ が区間 **I** に含まれないことを期待し，実際，含まれないことを確認する．

(5) 実現値 $\overline{\theta}$ が区間 **I** に含まれない（区間 **I** の外側にある）ことが示されれば，仮定 H_0 は 95% 間違いであると結論づける．

このやり方だと，$\theta = \theta_0$ は 95% の確率で否定されているが，それ以上のことは何も主張していない．

H_0：「$\theta = \theta_0$」に対立する仮説は「$\theta \neq \theta_0$」，「$\theta > \theta_0$」，「$\theta < \theta_0$」の何れか．

こうして，

H_0：「$\theta = \theta_0$」（**帰無仮説**）に対立させ 3 つの仮説（**対立仮設**）H_1：「$\theta \neq \theta_0$]」，「$\theta > \theta_0$」または「$\theta < \theta_0$」を同時に設定する．最終的には

帰無仮説 H_0 を棄却または採択するか，対立仮設 H_1 を採択または棄却するかの問題．

11.5 仮説検定の手順（帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1）

- 母集団の母数 θ に関する仮説 H_0：「$\theta = \theta_0$」を**帰無仮説**という．それに対し，仮説「$\theta \neq \theta_0$」，「$\theta > \theta_0$」または「$\theta < \theta_0$」を**対立仮説**といい，H_1 で表す．

- 帰無仮説は棄却したい仮説である．帰無仮説を 90%, 95%, 99% 肯定する区間の外側の区間をそれぞれ**有意水準** 0.1%, 0.05%, 0.01% の**棄却域**という．

- 母数に付随する標本変量の実現値 $\overline{\theta}$ が棄却域に入らなければ帰無仮説は採択され，中身にもよるが 90%, 95%, 99% の確率で検定は失敗である．逆に，棄却域に入れば 10%, 5%, 1% のリスクを背負うが検定は成功とみなされる．

12　正規分布母集団についての検定

12.1　母平均の検定（有意水準 5%）

母集団が正規分布母集団でこれまでの経験や情報から母平均は μ_0 であったことが知られているまたは確認されている．そこで母集団は正規分布 $N(\mu_0, \sigma^2)$ に従うという仮説をおく．これが帰無仮説 H_0：「$\mu = \mu_0$」である．この仮定の真偽に決着つけるのが検定である．

(1)　（母平均の検定）母分散が既知の場合：z-検定

上側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$（母平均は従来より上回っている）

下側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$（母平均は従来より下回っている）

両側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$（母平均は従来と異なっている）

どちらか一方を採択または棄却するために n 個の標本 $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均 $\overline{X}$ の実現値（標本平均値）$\overline{x}$ とし，

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

とおく．

検定結果

▶　（上側検定）$z > 1.65 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
　結論：母平均は従来を上回っている

▶　（下側検定）$z < -1.65 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
　結論：母平均は従来を下回っている

▶　（両側検定）$|z| > 1.96 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
　結論：母平均は従来通りでない

(2) （母平均の検定）母分散が未知の場合　t-検定（有意水準 5%）
母分散 σ^2 を不偏分散 U^2 で置き換える．

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{U}{\sqrt{n}}}$$

は自由度 $n-1$ の t-分布に従う．U^2 の実現値を u^2 とする．そこで

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{u}{\sqrt{n}}}$$

とおく．

検定結果

- ▶ （上側検定）$t > t_{n-1}(0.1) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来を上回っている
- ▶ （下側検定）$t < -t_{n-1}(0.1) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来を下回っている
- ▶ （両側検定）$|t| > t_{n-1}(0.05) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来通りでない

12.2 母分散の検定

χ^2-検定（有意水準 5%) 母集団が正規分布母集団でこれまでの経験や情報から母分散は σ_0^2 であったことが知られているまたは確認されている．そこで，母集団は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うという仮説をおく．これが帰無仮説 H_0：「$\sigma^2 = \sigma_0^2$」である．

上側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$（母分散は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$（母分散は従来より上回っている）

下側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$（母分散は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$（母分散は従来より下回っている）

両側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$（母分散は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$（母分散は従来と異なっている）

この時，標本分散 S^2 に対し，$\chi^2 = \dfrac{n\mathrm{S}^2}{\sigma_0^2}$ は自由度 $n-1$ の χ^2-分布に従う．そこで，χ^2 の実現値を $\chi^2 = \dfrac{ns^2}{\sigma_0^2}$ おく．

検定結果

- （上側検定）$\chi^2 > \chi^2_{n-1}(0.05) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.

  結論：母分散は従来を上回っている

- （下側検定）$\chi^2 < \chi^2_{n-1}(0.95) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.

  結論：母分散は従来を下回っている

- （両側検定）$\chi^2 > \chi^2_{n-1}(0.025)$ or $\chi^2 < \chi^2_{n-1}(0.975) \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.

  結論：母平均は従来通りでない

13 正規分布母集団とは限らない場合についての検定(有意水準 5%

正規分布とは限らない母集団の母平均が経験的に μ_0 だと知られているとする．母分散を σ^2 とおく．今，母集団からの n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を抽出する．その時,

$n \to \infty$（十分大）ならば，標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ は近似的に正規分布 $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う（**中心極限定理**）.

このことから,

(1) σ^2 が既知ならば，z-検定（(17.2.1-(2))

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

(2) σ^2 が未知ならば，中心極限定理を応用して，分散 σ^2 は標本分散 S^2 で近似されることが知られている．こうして，$n \to \infty$ ならば，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に $N(\mu_0, \frac{s}{\sqrt{n}})$ に従うとして良い．

$$z^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

とおくと，

上側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$（母平均は従来より上回っている）

下側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$（母平均は従来より下回っている）

両側検定

- 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$（母平均は従来言われている通り）
- 対立仮説 $H_1 : \mu \neq \mu_0$（母平均は従来と異なっている）

検定結果

- （上側検定） $z^* > 1.65 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来を上回っている
- （下側検定）$z^* < -1.65 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来を下回っている
- （両側検定）$|z^*| > 1.96 \Longrightarrow H_0$ を棄却し H_1 を採択.
  結論：母平均は従来通りでない

例題 13.1 (z-検定). (1) ある家電メーカーの電球の平均寿命は従来 $\mu_0 = 1500$ 時間であった．製品改良により平均寿命が長くなったと主張したい．そこで，新製品 50 を抽出しして平均寿命を検査したら $\overline{x} = 1520$ 時間であった．このメーカーの主張は信用できるかを有意水準 5% で検定せよ．新製品の寿命時間は正規分布 $N(\mu, 100^2)$（標準偏差 100 時間）に従うとする．

帰無仮説 H_0：「$H_0 = 1500$」としたとき，対立仮説は従来の平均寿命より長くなった，即ち，対立仮説 H_1：「$\mu > 1500$」の上側検定となる．今，

$$z^* = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = \frac{1520 - 1500}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = \sqrt{2} = 1.4142$$

より，$z^* > 1.65$ ならば H_0 棄却，H_1 採択（従来より平均寿命は長くなった）．一方，$z^* < 1.65$ ならば H_0 採択，H_1 棄却（平均寿命は従来と変わらない）．

$z^* < 1.65$ より，H_0 採択，H_1 棄却である．即ち，平均寿命は有意水準5% で従来と変わらないと結論が出た． □

(2) 高校3年生対象の全国一斉模試で，得点の全国平均は $\mu_0 = 48.6$ 点であった．熊本県の受験生 $n = 225$ 人の得点の平均は（全国平均より低い）48 点で，標準偏差は $s = 5.6$ であった．熊本県の受験生のレベルは全国レベルと同じであるとみて良いかを有意水準 5% で検定する．但し，熊本県の受験生の点数は正規分布に従うとする．

帰無仮説は熊本県の受験生の得点は全国レベル H_0：「$\mu = \mu_0 = 48.6$」とし，対立仮説は全国レベルでない H_1：「$\mu \neq 48.6$」とする両側検定となる．但し，熊本県の受験生の点数は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う．分散 σ^2 は未知で，σ^2 は中心極限定理から $s^2 = (5.6)^2$ で近似できる．一方，225 個の標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) = N(48.6, \dfrac{5.6^2}{\sqrt{225}})$ に従う．そこで

$$z^* = \frac{\overline{x} - 48.6}{\frac{5.6}{\sqrt{225}}} = \frac{48 - 48.6}{\frac{5.6}{\sqrt{225}}} = -1.61$$

$|z^*| = 1.61 \neq 1.96$ より H_0 は棄却できない（採択）．こうして有意水準 5% で H_1 は棄却される．つまり，全国レベルと異なるとは言えない（全国並みであろう） □

例題 13.2 (t-検定). ある研究所では体の発育促進剤を開発中である．そこで，飼育中のネズミ 10 匹に対し，生後 3 ヶ月間この薬を投薬した結果，この 10 匹のネズミの体重の平均が 530g，標準偏差の値が $s = 20g$ になった．一方，投薬しなかったときのネズミの生後 3 ヶ月の体重のへいきんは 520g であった．この新薬はネズミの発育に効果があると言って良いかを有意水準 5% で検定せよ．ただし，体重は正規分布に従うとする．

新薬を投薬したネズミの体重は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．ここで，分散 σ^2 は不明である．そこで，帰無仮説 H_0 :「$\mu = \mu_0 = 520$」（平均体重に変化なし）とし，対立仮説 H_1 :「$\mu > \mu_0 = 520$」（平均体重が増えた）として検定する．母分散 σ^2 が不明より，不偏分散の値 $\widehat{s}^2$ と標本分散の値 s^2 の関係は

$$\widehat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{10}{9}20^2$$

の関係があるので，10 匹の体重の標本平均は $\overline{x} = 530$ より

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\widehat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{530 - 520}{\frac{20}{\sqrt{9}}} = 1.5$$

$t_{n-1}(0.1) = t_9(0.1) = 1,833$ より $t = 1.5 < t_9(0.1)$. よって，H_0 は棄却されない（H_0 は採択）．すなわち，新薬の効果はあったとは言えない．

例題 13.3 (χ^2-検定). 従来，直径の標準偏差が $0.03cm$ のボルトを製造していた精密機器メーカーが新製法を開発した．新製品 20 個を無作為に抽出したら，標準偏差 $0.02cm$ であった．新製法によって直径のバラツキは小さくなったといえるだろうか？

小さくなったといえるだろうか？というので，帰無仮説 H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.03^2$, 対立仮説 H_1 : $\sigma^2 < 0.03^2$ なる左側検定を行う（自由度 19 のカイ二乗検定）である．実現値は $\chi^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{20\times 0.02^2}{0.03^2} = 8.89$.

$$\chi^2 = 8.89 < 10.12 = \chi^2_{19}(0.95)$$

ゆえ，有意水準 0.05 で H_0 を棄却し H_1 を採択．即ち，バラツキは小さくなったと言える． □

13.1 演習問題

13.2 推定の問題

練習問題 13.1. (1) ある小学校の新入学男子生徒 $n = 900$ 人の平均身長（標本平均）$\overline{x} = 116.2cm$. 過去の資料から小学校新入学男子生徒の身長は正規分布 $N(\mu, 4.86^2)$ に従うと考えられる．このとき，平均身長の推定に対する 95% 信頼区間を求めよ．

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[116.2 - 1.96\frac{4.86}{\sqrt{900}}\ ,\ 116.2 + 1.96\frac{4.86}{\sqrt{900}}\right]$$

数値計算すれば，平均身長 μ に対する 95% 信頼区間は

$$[115.8\ ,\ 116.6] \Longleftrightarrow 115.8 \leqq \mu \leqq 116.6.$$

であることが分かる． □

(2) 蛍光灯の新製品から 9 本無作為抽出し寿命を測定したところ平均寿命（標本平均）は $\overline{x} = 1260$ 時間．一方，この不偏分散 $\widehat{\mathrm{S}}^2$ の実現値 $\widehat{s}^2 = 2675$，因みに，標本分散値は $s^2 = \dfrac{21400}{9} = 2378$ であった．このとき，新製品の平均寿命 μ の推定に対する 95% 信頼区間を求めよ．但し，新製品の寿命は正規分布に従うことが分かっている．

この場合，母分散 σ^2 が不明である．サンプル数 n が大きければ中心極限定理から母分散 σ^2 は標本分散 S^2 で近似でき，その実現値を s^2 としたとき，平均寿命は正規分布 $N(\mu, \dfrac{s^2}{n})$ に近似的に従うとして信頼区間は

$$\left[\overline{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

として求めることができるが，サンプル数 n が小さいので，中心極限定理は適用できない．不偏分散 U^2 をに対し

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{U}{\sqrt{n}}}$$

は自由度 $n-1$ の t-分布に従う事から 95% 信頼区間は求まる：

$$\left[\overline{x} - t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + t_{n-1}(0.05)\frac{u}{\sqrt{n}}\right]$$

今，$\overline{x} = 1260$，$u = \sqrt{2675}$，$n = 9$，$t_8(0.05) = 2.31$ より，

$$\left[1260 - 2.31\frac{51.7}{3}\ ,\ 1260 + 2.31\frac{51.7}{3}\right] = [1220\ ,\ 1300]$$

ゆえに，95% の確率で μ は $1220 \leqq \mu \leqq 1300]$ を満たす（という言い方もできる） □

(3) 問題 (2) において，母分散 σ^2 の推定に対する 95% 信頼区間を求めよう．

$\chi^2 = \dfrac{n\mathrm{S}^2}{\sigma^2}$ は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従うので，分散 σ^2 の推定に対する 95% 信頼区間は

$$\left[\frac{n\mathrm{S}^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}\ ,\ \frac{n\mathrm{S}^2}{\chi^2_{n-1}(0.975)}\right] = \left[\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.025)}\ ,\ \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(0.975)}\right]$$

$n=9$, $nS^2=21400$, $\chi_8^2(0.025)=15.51$, $\chi_8^2(0.975)=2.73$ より，信頼区間は

$$\left[\frac{21400}{15.51}\ ,\ \frac{21400}{2.73}\right]=[1379.7\ ,\ 7873.9]\Longleftrightarrow 1379.7\leqq\sigma^2\leqq 7873.9$$

13.3 検定の問題

練習問題 13.2. 有意水準 5% で仮説検定をせよ．

(1) （上側 z-検定）: ある都市の１８歳男性の平均身長は, 数年前の調査では $171cm$ 出会った．今回，１８歳男性 $n=150$ 人を選び測定したら平均値が $\overline{x}=172cm$ であった．この大都市の１８歳男性の平均身長は，前回調査時より伸びたと言えるかを検定せよ．但し，１８歳男性の身長は標準偏差 $5.6cm$ の正規分布 $N(\mu,5.6^2)$ に従うとする．

帰無仮説 H_0:「$\mu=\mu_0(=171)$」(平均身長は前回の調査と同じ) 対立仮説は H_1：「$\mu>171$」（前回調査より伸びた）．帰無仮説は $N(\mu,5.6^2)=N(\mu_0,5.6^2)=N(171,5.6^2)$ を仮定している事になる．こうして,

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{172-171}{\frac{5.6}{\sqrt{150}}}=2.187$$

に対し，上側検定する．$z>1.65$ より H_0 は棄却される．こうして，H_1 が採択される．結果，前回より，平均身長は伸びたと言える． □

(2) （両側 z-検定）: 日本人 900 人を選び，体温を測定したら平均 $36.8°C$，標準偏差 $3°C$ であった．この結果から日本人の平均体温は $36.6°C$ とみて良いか..但し，人の体温は正規分布 $N(\mu,\sigma^2$ に従うとする．

帰無仮説は H_0：「$\mu=\mu_0=36.8$」（平均体温は $36.6°C$ とみて良い）．対立仮説 H_1：「$\mu\neq\mu_0$」（平均体温は $36.6°C$ とは言えない）の両側検定である．$n=900$ は大きいので，中心極限定理から母分散 σ^2 は 3^2 で近似できる．従って，帰無仮説のもと平均体温は $N(36.8,\dfrac{3}{\sqrt{900}})$ に従うと思って良い．

$$|z|=\frac{36.8-36.6}{\frac{3}{\sqrt{900}}}=2>1.96$$

寄って，H_0 は棄却される（平均体温は $36.6°C$ とは言えない） □

(3) （t-検定）：海水浴場 $n = 17$ 箇所から採取した海水を調べた結果 1_{cc} あたりの大腸菌の数は平均が 330 個で不偏分散 $\hat{s}^2 = 50^2$ であった．1_{cc} あたりの大腸菌の数 300 個見て良いかを検定せよ．1_{cc} あたりの大腸菌の数は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う．

帰無仮説は H_0：「$\mu = \mu_0 = 300$」（大腸菌の数は 300 と見て良い）. 対立仮説は H_1：「$\mu \neq \mu_0$」（大腸菌の数は 300 とは言えない）の両側検定である．今，データ数 n は多くないので，中心極限定理は適用できない（σ^2 を標本分散 $s^2 = \frac{16}{17}u^2$ で近似できない．帰無仮説のもと正規分布 $N(\mu_0, \sigma^2) = N(300, \sigma^2)$ に従うとして良い．こうして，

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{U}{\sqrt{n}}} = \frac{330 - 300}{\frac{50}{\sqrt{17}}} = 2.47$$

は自由度 $n-1$ の t-分布に従う．$t_{16}(0.05) = 1.7459$ より $|t| = 2.47 > 1.746$. 故に，H_0 は棄却される（H_1 採択）. 即ち,」大腸菌の数は 300 とはみなせない. $\square$

(3) （χ^2-検定）：ある正規分布母集団から抽出したサイズ $n = 10$ の標本平均 $\overline{x} = 4.5$, 標本分散 $s^2 = 0.118$ であった．母分散に対する仮設 H_0：「$\sigma^2 = 0.07$」を上側検定せよ．

対立仮説 H_1：「$\sigma^2 > 0.07$」の上側検定.

$$\chi^2 = \frac{n\mathrm{S}^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う. $\chi^2 = \dfrac{1.18}{0.07} = 16.86 < 16.92 = \chi^2_9(0.05)$ より，H_0 は棄却できない. $\square$