線形代数学の基礎（副読本）
(理・工・医・薬)

石田明男・大嶋康裕・古島幹雄

2020 年 8 月 26 日

はじめに

このノートは理工医薬系初年時の線形代数の講義内容を比較的紙面をとって解説したもので，事後学習や期末試験準備用に利用してほしい．誤植やミスもあるかも知れないので，その時は，ishida@kumamoto-nct.ac.jp, yohshima@ed.sojo-u.ac.jp,wagami@kumamoto-u.ac.jp までお知らせ頂きたい．また，内容に関する質問も受け付けますので気軽に質問してください．

目 次

1　ベクトル概説

1.1　n 次元列ベクトル

n 個の実数を縦に並べたもの

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を n **次元列ベクトル**（単に n 次元ベクトル）という．各 $x_1, x_2, \ldots$ を $\boldsymbol{x}$ の**成分**という．n 次元列ベクトル全体の集合を n **次元列ベクトル空間**と呼び $\mathbb{R}^n$ で表す．即ち，

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ は実数} \right\}$$

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ の 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ およびスカラー（実数）λ に対し，その和およびスカラー積を次で定義する：

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$　　(2) $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

定義 1.2. (1) **（零ベクトル）**：各成分がすべて 0 であるベクトル．

$$0 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(2) **（単位基本ベクトル）**

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を n 次元 単位基本ベクトルという．

(3) （**ベクトルの相等**）：２つのベクトルは対応する成分が等しいときに等しいという．即ち，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} x_1 = y_1\,,\ \ldots,\ x_i = y_i\,,\ \ldots\ ,\ x_n = y_n$$

と定義する．特に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

命題 1.1. $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$（列ベクトル）に対して，

(1) $(\lambda \pm \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \pm \mu\boldsymbol{x}$.

(2) $\lambda(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} \pm \lambda\boldsymbol{y}$.

(3) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}\ (= \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

(4) $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

次のベクトル

例題 1.1. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおく．その時,

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

を得る．（右辺を成分表示すれば分かる）

定義 1.3. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ が平行であるとは,

$$\boldsymbol{x} = c\,\boldsymbol{y}$$

を満たす $c \neq 0$ が存在するときをいう．このとき，$\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$ と表す. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が平行でないとき $\boldsymbol{x} \not\parallel \boldsymbol{y}$ と表す．

命題 1.2. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ が平行でないとき，a, b を未知数とする（一次）方程式 $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の解は $a = b = 0$ に限る．

証明.（背理法で示す）$a = b = 0$ でないと仮定する．そのとき，$a \neq 0$ 又は $b \neq 0$ である．今，$a \neq 0$ とすると，$b \neq 0$ である．何故なら，$b = 0$ とすれば，$a\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．しかし，$a \neq 0,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ より $a\boldsymbol{x} \neq 0$ なので矛盾．こうして $a \neq 0$ ならば $b \neq 0$ が従う. $\therefore\quad \boldsymbol{x} = -\dfrac{b}{a}\boldsymbol{y}$ かつ $c = -\dfrac{b}{a} \neq 0$. 故に $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$ となる．これは $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ が平行でないという仮定に反する．以上の考察により $a = b = 0$ を得る． □

注意 1.1. ベクトルの平行性を一般化したものがベクトルの一次従属性である（後述）.

1.2 n 次元行ベクトル

n 個の実数を横に並べたもの

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

を n **次元行ベクトル**という．n 次元行ベクトル全体の集合を n **次元行ベクトル空間**とよび $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ で表す．即ち，

$$\widetilde{\mathbb{R}}^n = \left\{ \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ は実数} \right\}$$

定義 1.4. $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ の２つのベクトル $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ およびスカラー（実数）λ に対し，列ベクトルのときと同様に，その和およびスカラー積を次で定義する：

(1) $\widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \ldots & x_n + y_n \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$

(2) $\lambda \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \ldots & \lambda x_n \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$.

定義 1.5. (1) （**零ベクトル**）

$$\widetilde{\boldsymbol{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$$

(2) （**単位基本ベクトル**）

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を n 次元**単位基本行ベクトル**という．

(3) （**ベクトルの相等**）

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{y}} \Longleftrightarrow x_1 = y_1\,,\ \ldots, x_i = y_i\,,\ \ldots\,,\ x_n = y_n$$

と定義する．

注意 1.2 (命題 1 に対応). $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{\boldsymbol{z}} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$（行ベクトル）に対して,

(1) $(\lambda \pm \mu)\widetilde{\boldsymbol{x}} = \lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} \pm \mu\widetilde{\boldsymbol{x}}$.

(2) $\lambda(\widetilde{\boldsymbol{x}} \pm \widetilde{\boldsymbol{y}}) = \lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} \pm \lambda\widetilde{\boldsymbol{y}}$.

(3) $\boldsymbol{x} + (\widetilde{\boldsymbol{y}} + \widetilde{\boldsymbol{z}}) = (\widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{y}}) + \widetilde{\boldsymbol{z}}$ $(= \widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{y}} + \widetilde{\boldsymbol{z}})$

(4) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\lambda\widetilde{\boldsymbol{x}} + \mu\widetilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$

例題 1.2. $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ とおく．そのとき,

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = x_1\widetilde{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\widetilde{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots + x_n\widetilde{\boldsymbol{e}}_n$$

を得る．（右辺を成分表示すれば分かる．）

定義 1.6. ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ が平行であるとは,

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} = c\,\widetilde{\boldsymbol{y}}$$

を満たす $c \neq 0$ が存在するときをいう．このとき，$\widetilde{\boldsymbol{x}} \parallel \widetilde{\boldsymbol{y}}$ と表す. $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ と $\widetilde{\boldsymbol{y}}$ が平行でないとき $\widetilde{\boldsymbol{x}} \nparallel \widetilde{\boldsymbol{y}}$ と表す.

例題 1.3 (命題 2 に対応). $\widetilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ と $\widetilde{\boldsymbol{y}} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき，a, b を未知数とする（一次）方程式 $a\widetilde{\boldsymbol{x}} + b\widetilde{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$ の解は $a = b = 0$ に限る.

証明. 証明略

1.3 転置ベクトル

定義 1.7 (行の転置は列，列の転置は行). (1) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が列ベクトルのとき ${}^t\boldsymbol{x}$ は行ベクトルとなる：

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$$

(2) $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ が行ベクトルのとき ${}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}$ は列ベクトルになる:

$$\widetilde{\mathbb{R}}^n \ni \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

例題 1.4. ${}^t({}^t\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad {}^t({}^t\widetilde{\boldsymbol{x}}) = \widetilde{\boldsymbol{x}}$

証明. $\boldsymbol{x}$ が列ベクトルのとき.

$$
{}^t({}^t\boldsymbol{x}) = {}^t\left({}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}
$$

行ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ のときも同様. □

例.

$$
{}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^t\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

1.4 ベクトルの内積

定義 1.8. n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ の**内積** $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を

$$
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{=} {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n
$$

で定義する.

注意 1.3. ベクトルの内積とは行ベクトルと列ベクトルの（上記の意味の）積で定義されるスカラー量である. <u>内積は後述する行列の積の特別な場合である</u>.

例題 1.5. 列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し

(i) $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqq 0.$

$$
\therefore \quad \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}
$$

$\|\boldsymbol{x}\|$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（ノルム）という. 特に,

$$
\|\boldsymbol{x}\| = 0 \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \\
\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \\
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \left\| \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{2} \right\|^2 \\
\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 &= 2\left(\left\| \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{2} \right\|^2 \right) \quad \text{(中線定理)}
\end{aligned}
$$

2　連立１次方程式系と行列

2.1　連立一次方程式系の行列表現

線形代数とは一言でいえば $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする m 個の連立一次方程式の系

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{cases} \tag{2.1.1}
$$

の解法や解についての性質などを調べる学問である．これらを統一的に扱うために行列や行列式の概念が必要になる．そこで,

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

とおいて，連立一次方程式 $(2, 1, 1)$ を

$$
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.1.2}
$$

とかく．ここで，A を**係数行列**，$\boldsymbol{x}$ を**未知数ベクトル** といい，(2.1.2) を連立一次方程式系 (2.1.1) の（形式的）行列表現という．

2.2　行列について

mn 個の数（実数または複素数）$a_{ij}\quad(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ を次のように並べた

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を (m,n) **行列**という．ここで m は行（横の列）の数を，n は列（縦の列）の数を表している．特に，$m=n$ のとき，即ち，(n,n) 行列を n 次**正方行列**という．

$\boxed{\text{行列 } A \text{ の行ベクトル，列ベクトル}}$

- $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$: 1 行ベクトル．
- $\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$: 2 行ベクトル．
- $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$: i 行ベクトル．
- $\widetilde{\boldsymbol{a}}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$: m 行ベクトル．
- $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$: 1 列ベクトル．　　$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$: 2 列ベクトル．
- $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$: j 列ベクトル．　　$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$: n 列ベクトル．

とおく.

注意 2.1. ▶ a_{ij} を行列 A の (i,j) 成分（i 行 j 列成分）という.

- ▶ 行列 A の (i,j) 成分を $(A)_{ij}$ と表す．こうして，$(A)_{ij}=a_{ij}$.
- ▶ 上から順に 1 行,2 行,$\ldots$, m 行といい，左から順に 1 列,2 列,$\ldots$, n 列という.（(i,j) 成分 a_{ij} は上から i 番目，左から j 番目にある成分）

注意 2.2. n 次元列ベクトルは $(n,1)$ 行列と見なすことができ，m 次元行ベクトルは $(1,m)$ 行列と見なすことができる．こうしてベクトルは行列の特別な場合とみなすことができる.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & {\color{blue}a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & {\color{blue}a_{2j}} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\color{red}a_{i1}} & {\color{red}a_{i2}} & \ldots & \underline{{\color{green}a_{ij}}} & \ldots & {\color{red}a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & {\color{blue}a_{mj}} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ {\color{red}\widetilde{\boldsymbol{a}}_i} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & {\color{blue}\boldsymbol{a}_j} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

をそれぞれ行列 A の<u>行ベクトル表示</u>および<u>列ベクトル表示</u>という．ここで, $\boldsymbol{a}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{a}}_j$ は **2.2** で定義したベクトルである

2.3 行列の相等，和，スカラー積

定義 2.1. (1) 二つの行列 A,B に対し $A=B$ とは

- ▶ <u>A の行の数 $=B$ の行の数</u>かつ<u>A の列の数 $=B$ の列の数</u>（このとき，A と B はサイズ（または型）が等しいという.）
- ▶ 各 (i,j) に対し $(A)_{ij}=(B)_{ij}\quad(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$

のときをいう.

(2) サイズ（型）が等しい行列 A,B および $(i,j)\quad(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ に対し，その和については

$$(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}$$

スカラー積については

$$(\lambda\cdot A)_{ij}=\lambda\cdot(A)_{ij}$$

と定義する.

注意 2.3. (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad = \quad (a_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$

と書くこともある.

(2)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mj} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1j}+b_{1j} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2j}+b_{2j} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \ldots & a_{ij}+b_{ij} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mj}+b_{mj} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \Longleftrightarrow (a_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$$

(3)

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1j} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2j} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{ij} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mj} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij} \Longleftrightarrow \lambda\,(a_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$$

2.4　転置行列

(m,n) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ とは A の行と列を入れ替えた行列．即ち，

(1) A が (m,n) 行列ならば ${}^tA$ は (n,m) 行列である．

- ▶ ${}^tA$ の 1 行ベクトルの転置ベクトル $=$ A の 1 列ベクトル
- ▶ ${}^tA$ の 2 行ベクトルの転置ベクトル $=$ A の 2 列ベクトル
- ▶ ${}^tA$ の k 行ベクトルの転置ベクトル $=$ A の k 列ベクトル

(2) 成分については ${}^tA$ の (i,j) 成分は A の (j,i) 成分である．

$$\left({}^tA\right)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji} \quad (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$$

(3) ${}^tA$ を成分表示すれば

$${}^tA = {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(4) ベクトル表示すれば

$${}^tA = {}^t\begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_1 & {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_i & \dots & {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix}$$

$${}^tA = {}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

例題 2.1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ を示せ.

証明. 各 (i,j) に対して左辺の (i,j) 成分と右辺の (i,j) 成分が等しいことを示せばよい（定義 2.1 を見よ）

$$ {}^t(A+B)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = {}^t(A)_{ij} + {}^t(B)_{ij} = \left({}^tA + {}^tB\right)_{ij} $$

2.5　基本演習問題とその解答

演習問題 2.1.

(1)　(i)　$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(ii)　${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) 次のベクトルの内積を求めよ.

$$ \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \right\rangle = {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = ap + bq + cr $$

(3)

$$ 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 9 & 6 \\ 18 & 9 & 27 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 11 & 19 & 18 \\ 32 & 25 & 45 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix} $$

(4) 連立一次方程式の行列表示

$$ \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} $$

(5) ベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ に対し，シュワルツの不等式

$$ |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| $$

が成立する.

証明. 実数 t に対し，

$$0 \leqq \|t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\, t + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

即ち，全ての実数 t に対し

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\, t + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq 0 \quad \text{（絶対不等式）}$$

が成り立つ．こうして判別式 $D = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq 0$ でなければならない．

$$\therefore \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2$$

両辺の平方根をとってシュワルツの不等式を得る． □

(6) X, Y を未知行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A & \cdots \quad (6.1) \\ 3X + 4Y = B & \cdots \quad (6.2) \end{cases}$$

を解く．$(6.2) \times 3 - (6.1) \times 4$ より，$\underline{X = -4A + 3B}$. $(6.1) \times 3 - (6.2) \times 2$ より，$\underline{Y = 3A - 2B}$.

(7)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

を解け．

$$2\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(8) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする．内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

実際，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \therefore \quad 2x + y = 0.$ よって，$x = c$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.6 行列の積の定義

定義 2.2. 二つの行列 A, B の積 $A \cdot B$ は「A の列の数」$=$「B の行の数」のときに定義される．そこで，A を (m, n) 行列とすれば B は (n, ℓ) 行列でなければならず，結果，積 AB は (m, ℓ) 行列である．標語的には $(m, n) \times (n, \ell) = (m, \ell)$ と覚えておこう．

注意 2.4. もし，積 $B \cdot A$ が定義されるとすれば，「B の列の数」$=$「A の行の数」である（前者の列の数$=$後者の行の数）．よって，$A \cdot B$ も $B \cdot A$ も定義できるとすれば，A を (m, n) 行列とするなら B は (n, m) 行列でなければならない．従って，$A^t \cdot A$ および ${}^tA \cdot A$ はどちらも定義可能である．しかし，一般には，$A^t \cdot A$ は m 次正方行列であり，${}^tA \cdot A$ は n 次正方行列である．特に，n 次正方行列 A に対し，$A \cdot {}^tA$, ${}^tA \cdot A$ は両方 n 次正方行列である．

そこで，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m &= \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mj} & \ldots & b_{n\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_j & \ldots & \boldsymbol{b}_\ell \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b}_\ell = \begin{pmatrix} b_{1\ell} \\ b_{2\ell} \\ \vdots \\ b_{i\ell} \\ \vdots \\ b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

とおく．

このとき，$A\cdot B$ の (i,j) 成分$(A\cdot B)_{ij}$を A のi 行ベクトルと B のj 列ベクトルの内積として次のように定義する．即ち，

$$(A\cdot B)_{ij}=\widetilde{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{b}_j=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{kj}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

こうして，

$$\begin{aligned}A\cdot B&=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1\ell}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2\ell}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{i\ell}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{n\ell}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{a}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_j & \dots & \boldsymbol{b}_\ell\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{a}}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \widetilde{\boldsymbol{a}}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_1\cdot\boldsymbol{b}_j & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_1\cdot\boldsymbol{b}_\ell\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \widetilde{\boldsymbol{a}}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_2\cdot\boldsymbol{b}_j & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_2\cdot\boldsymbol{b}_\ell\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{b}_1 & \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{b}_j & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\cdot\boldsymbol{b}_\ell\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\cdot\boldsymbol{b}_1 & \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\cdot\boldsymbol{b}_2 & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\cdot\boldsymbol{b}_j & \dots & \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\cdot\boldsymbol{b}_\ell\end{pmatrix}:\qquad (m,l)\ \text{行列}\end{aligned}$$

注意 2.5 (まとめ)． (1) (m,n) 行列と $(n.\ell)$ 行列の積は (m,ℓ) 行列である．

(2) A の i 行ベクトルと B の j 列ベクトルの内積が $A\cdot B$ の (i,j) 成分である．

(3) A を (m,n) 行列 B を (n,m) 行列とすれば積 $A\cdot B$ および $B\cdot A$ は定義できる．このとき，$A\cdot B$ は (m,m) 行列（m 次正方行列という）であり $B\cdot A$ は

(n,n) 行列（n 次正方行列）である．$m \neq n$ ならば $A \cdot B \neq B \cdot A$（行列のサイズが違う）．例え，$m = n$ であっても一般には $A \cdot B \neq B \cdot A$ である．

例.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 2.2. 次の行列の積を計算せよ．

(1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4+7+12 & -2+1+9 & 1+1-6 \\ 4+0+4 & -2+0+3 & 1+0-2 \\ 16+21+36 & -8+3+27 & 4+3-18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & -1 \\ 73 & 22 & -11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+2+1 & -1-2+1 & 3-4-5 \\ -2-6+1 & 2+6+1 & -6+12-5 \\ 2-2+1 & -2+2+1 & 6+4-5 \\ 1-6+5 & -1+6+5 & 3+12-25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -7 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+3+4+3 = 12$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \\ -10 & -15 & -5 & 10 \\ 4 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

特に，$\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} p & q & r & s \end{pmatrix}$ とおく．そのとき，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q & r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} a \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ b \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ c \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ d \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq & ar & as \\ bp & bq & br & bs \\ cp & cq & cr & cs \\ dp & dq & dr & ds \end{pmatrix}$$

注意 2.6. $\boldsymbol{x}$ を n 次元列ベクトル，$\widetilde{\boldsymbol{y}}$ を m 次元行ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{x} \cdot \widetilde{\boldsymbol{y}}$ は$\underline{(m,n)\text{ 行列}}$である．又，${}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$（内積）はスカラーであり，$\boldsymbol{x} \cdot {}^t\boldsymbol{x}$ は n 次正方行列である．こうして，$n \geqq 2$ ならば ${}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x} \cdot {}^t\boldsymbol{x}$ である．

(5) $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ b^2+2ac & 2ab & a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 3ab^2+3a^2c & 3a^2b & a^3 \end{pmatrix}$$

（問）$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ x_n & a^n & 0 \\ y_n & x_n & a^n \end{pmatrix}$ とおいて x_n,y_n を求めよ．

2.7 正方行列

ここでは n 次正方行列を扱う．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

特別な正方行列（0 および 1 に対応する行列）として

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{0}} \\ \widetilde{\mathbf{0}} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{0}} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{0}} \end{pmatrix} : \quad \text{ゼロ（零）行列}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_j & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_m \end{pmatrix} : \quad \text{単位行列}$$

注意 2.7. 正方行列 $A, B, C, \dots$ に対しては積 $AB,\ BA,\ ABC, A^n, \dots$ などが定義できる．

定義 2.3. n 次正方行列 A に対し

$$A^n = A \cdot (A^{n-1}) \quad (n \geqq 2)$$

と帰納的に定義する．

例題 2.3.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ x_n & b^n \end{pmatrix}^n$$

但し，$x_n = c\,\dfrac{b^n - a^n}{b - a}$ 特に，$b = a$ なら $x_n = \lim_{b \to a} \dfrac{b^n - a^n}{b - a} = na^{n-1}$ と解釈．

定義 2.4. 正方行列 A に対し，

$$AX = XA = E = E_n$$

を満たす正方行列 X が存在するとき X を A の**逆行列**とよび，$X := A^{-1}$ で表す．こうして，

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

注意 2.8. <u>逆行列は</u>対象とする行列が<u>正方行列でなければ意味がない</u>．

注意 2.9. n 次正方行列 A に対し，その逆行列は必ずしも存在しない．

例題 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し，$AX = XA = E$ となる 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ は存在しない．

実際，

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

こうして，$AX = E$ となる 2 次行列 X は存在しない．しかし，$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ と於けば，

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となり，X は A の逆行列である．

逆行列の存在は $AX = E$ の表す連立一次方程式系の一意解（唯一つの解）の存在そのものであり，この観点から次節で議論したい．

3 連立 1 次方程式系の解法と行列式

3.1 $ax = b$ の解について（中学の数学）

(1) $a \neq 0$ の時は，解は $x = \dfrac{b}{a} (= a^{-1} \cdot b)$（$a^{-1}$ を a の逆数という）「一意解または唯一つの解」

(2) $a = 0$ の時は以下の 2 つの場合がある．

(i) $b = 0$ ならば，$0x = 0$ なので，x は何でも良い（全ての実数）「不定解または解は不確定」

(ii) $b \neq 0$ ならば，$0x = b \neq 0$ となり，方程式として解くことは不可能である「不能解」

$$ax = b \text{ の解} : \begin{cases} (1) \quad a \neq 0 \Longrightarrow x = \dfrac{b}{a} = a^{-1} \cdot b \ (\text{一意解}) \\ (2) \quad a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{(i) } b = 0 \longrightarrow \text{不定解} \\ \text{(ii) } b \neq 0 \longrightarrow \text{不能解} \end{cases} \end{cases}$$

例題 3.1. (1) $2x = 1$ の解を求めよ（一意解：$x = \dfrac{1}{2}$ ）．

(2) $0x=0$ の解を求めよ（不定解：x は全ての実数）.

(3) $0x=1$ の解を求めよ（不能解：解がない）.

3.2 2元連立一次方程式

$$(\spadesuit) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdots (3.2.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdots (3.2.2) \end{cases} \quad \overset{\text{行列表示}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

そこで,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$(\spadesuit) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \overset{\text{ベクトル表示}}{\Longleftrightarrow} x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$$

と表される．これは前節 **3.1** の一次方程式 $ax=b$ の２次元ヴァージョンである．連立一次方程式 ($\spadesuit$) を消去法（後に学ぶ掃出し法の特別な場合）で解く．

まず，(3.2.1) $\times a_{22} -$ (3.2.2) $\times a_{12}$ および (3.2.2) $\times a_{11} -$ (3.2.1) $\times a_{21}$ から

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 &= a_{22}b_1 - b_2a_{21} & \cdots (3.2.3) \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 &= a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & \cdots (3.2.4) \end{aligned}$$

を得る.

定義 3.1. 行列 $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の**行列式**を

$$|X| = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} ps - rq$$

で定義する.

その時，定義から

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

より簡単に

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}.$$

と書くこともある．その時,

$$a_{22}b_1 - a_{21}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} \quad , \quad a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と表される．(3.2.3), (3.2.4) より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

を得る．よって，

定理 3.1 (クラメールの公式)**.** 連立一次方程式

$$(\spadesuit) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}$$

の解は行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ならば，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}$$

3.3　２次正方行列の逆行列

さて，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
として一次方程式

$$(\clubsuit) \quad AX = E \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の解の存在（解 X の存在）について調べる．まず，($\clubsuit$) を連立一次方程式として記述すると

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{11}\boldsymbol{a}_1 + x_{21}\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 \\ x_{12}\boldsymbol{a}_1 + x_{22}\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

定理 1（クラメールの公式）より，行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば

$$\begin{cases} x_{11} = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}} \\ x_{21} = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12} = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}} \\ x_{22} = \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

$$\therefore X = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2|} \begin{pmatrix} |\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{a}_2| & |\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{a}_2| \\ |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{e}_1| & |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{e}_2| \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

以上より

定理 3.2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件は行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

であり，この時,

$$A^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2|} \begin{pmatrix} |\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{a}_2| & |\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{a}_2| \\ |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{e}_1| & |\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{e}_2| \end{pmatrix}$$

注意 3.1. 一般に n 次正方行列 A についても逆行列 A^{-1} が存在するための条件は行列式（行列式の一般的定義は後述）

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

である.

例題 3.2. 2 次元の行列式の定義から直接計算により次が成り立つことを確かめることができる.

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$

(5) $|AB| = |A| \cdot |B| = \left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix}$, 即ち,

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

証明. (3),(5) のみ示す.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とおく.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{12} & b_1 \\ \lambda a_{21} + \mu a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \\
&= b_2(\lambda a_{11} + \mu a_{12}) - b_1(\lambda a_{21} + \mu a_{22}) \\
&= \lambda(a_{11}b_2 - a_{21}b_1) + \mu(a_{12}b_2 - a_{22}b_1) \\
&= \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\right| \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) - a_{21}a_{12}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

演習問題 3.1. (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 4$ とする. この時 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 6 \quad \therefore \quad a = 10.$

(2) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (4-6)(2+4) = -12$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5-6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ の解はクラメールの公式より

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{17}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{5}{17}$$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=A^{-1}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とおく.

$$\begin{cases} x_{11}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=-\dfrac{1}{2}, \quad x_{21}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{5}{4} \\ x_{12}=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=\dfrac{3}{4}, \quad x_{22}=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3.4 3元連立1次方程式

連立1次方程式

(♣) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \cdots (3.4.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \cdots (3.4.2) \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \cdots (3.4.3) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

を考える.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(\clubsuit) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

と表される．

(3.4.2), (3.4.3) より，

$$\begin{cases} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1 \cdots (3.4.4) \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 \cdots (3.4.5) \end{cases}$$

２次元クラメールの公式より

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} b_2 - a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3 - a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots (3.4.6) \\ \\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3 - a_{31}x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \cdots (3.4.7) \end{cases}$$

(3.4.2), (3.4.3) の両辺に $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ を掛けて，(3.4.6), (3.4.7) を (3.4.1) に代入し x_1 で括ると，

$$\begin{aligned} &\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \right) x_1 \\ &= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (3.4.8) \end{aligned}$$

なので，例題 3.2-(1) を用いて，

$$\begin{aligned} \therefore \quad &\left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) x_1 \\ &= b_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \cdots (3.4.9) \end{aligned}$$

そこで，

定義 3.2.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

とおき，この $|A|$ を行列 A の**行列式**という．

注意 3.2 (サラスの公式).

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
\left(= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)
$$

$$
\left(= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})
$$

(3.4.9) より

$$
\begin{aligned}
|A|\ x_1 &= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_2 \cdots (3.4.4)' \\ a_{31}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{32}x_2 \cdots (3.4.5)' \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3 \cdots (3.4.4)'' \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 - a_{33}x_3 \cdots (3.4.5)'' \end{cases}
$$

に 2 次元クラメールの公式を適用して，次を得る．

$$
\begin{aligned}
|A|\ x_2 &= a_{11}\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A|\ x_3 &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

以上より，

定理 3.3 (3 次元クラメールの公式). 連立 1 次方程式系

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ は A の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}}$$

と表される.

注意 3.3. $n \geqq 4$ 次正方行列の行列式についてはサラスの方法に相当するものはない．行列式の一般的な定義を与える必要が出てくる（後述）

事実 3.1 (3 次行列式の性質). 3 次行列式 $|X| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix}$ および 3 次元列ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，次の (1) ∼ (4) が成り立つことをサラスの公式を用いて確かめることができる（各自試みよ）.

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix}$：（交代性）

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = 0$（同じ列がある）

(3) $\begin{vmatrix} k\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & k\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & k\boldsymbol{z} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix}$（列の定数倍）

(4)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{u} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}+\boldsymbol{u} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{u} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

さらに,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1^3} x_i\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{3} y_j\boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{z} = \sum_{k=1}^{3} z_k\boldsymbol{w}_k$$

とおくと，線形性を繰り返し適用し

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} x_iy_jz_k \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_i & \boldsymbol{v}_j & \boldsymbol{w}_k \end{vmatrix} \tag{3.4.10}$$

を得る.

3.5　３次元行列式の定式化

３次行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ において，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \sum_{i_2}^{3} a_{i_2 2}\boldsymbol{e}_{i_2},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 1}\boldsymbol{e}_{i_3}$$

但し，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，サラスの公式より容易に

$$\text{(3.5.a)}\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{(3.5.b)}\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{(3.5.c)}\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_j \end{vmatrix} = 0 \quad (1 \leqq i, j \leqq 3)$$

が分かる．今，多重線形性 (3.4.10) より，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sum_{i_1=1}^{3} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1} & \sum_{i_2}^{3} a_{i_2 2}\boldsymbol{e}_{i_2} & \sum_{i_3=1}^{3} a_{i_3 1}\boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\sum_{i_3=1}^{3} a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで (3.5.a),(3.5.b),(3.5.c) より，

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix} = \pm 1 & i_1, i_2, i_3 \text{ は相異なる} \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix} = 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が分かる．そこで，３文字の順列全体の集合

$$\mathfrak{S}_3 = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)\}$$

を考える（３次対称群ともいう）．その時，$\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{e}_{i_3}$ が全て異なる場合についてのみ和をとれば良い（それ以外は 0 だから）ので，結果的に

$$\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\sum_{i_3=1}^{3} a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathcal{S}_3} a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \boldsymbol{e}_{i_3} \end{vmatrix}$$

を得る．そこで，

$$\left|\boldsymbol{e}_{i_1} \quad \boldsymbol{e}_{i_2} \quad \boldsymbol{e}_{i_3}\right| = \mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, i_3)\left|\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3\right| = \mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, i_3)$$

とおくと，最終的に

$$|A| = \left|\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3\right| = \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathcal{S}_3} \mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, i_3)\ a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}$$

特に，(3.5.a),(3.5.b) より，

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}\,(1,2,3) = \mathrm{sgn}\,(2,3,1) = \mathrm{sgn}\,(3,1,2) = 1\\ \mathrm{sgn}\,(1,3,2) = \mathrm{sgn}\,(3,2,1) = \mathrm{sgn}\,(2,1,3) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.5.1)\quad |A| = \left|\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3\right| &= \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathcal{S}_3} \mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, i_3)\ a_{i_1 1}a_{i_2 2}a_{i_3 3}\\ &= \mathrm{sgn}\,(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}\,(2.3.1)a_{21}a_{32}a_{13} + \mathrm{sgn}\,(3,1,2)a_{31}a_{12}a_{23}\\ &+ \mathrm{sgn}\,(1,3,2)a_{11}a_{32}a_{23} + \mathrm{sgn}\,(3,2,1)a_{31}a_{22}a_{13} + \mathrm{sgn}\,(2,1,3)a_{21}a_{12}a_{33}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}\end{aligned}$$

4　正方行列の行列式（読み流し可）

4.1　置換と符号

1 から n までの数の順列を $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 又は $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ で表す．このような順列は全部で $n!$ 個ある．上段の $1 \sim n$ は並べる順番を指し，下段は n 個の数を左から順に $i_1, i_2, \ldots, i_n$ と並べた状態を示している．写像の言葉で言えば σ は 1 対 1 写像：

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \ldots, \sigma(k) = i_k, \ldots, \sigma(n) = i_n$$

特に，集合として

$$\{1, 2, \ldots, n\} \overset{一致}{=} \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$$

この意味で，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(k) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書いたりする．一つの写像 $\sigma : \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$ は一つの順列を与えるので，$1 \sim n$ までの数の順列全体の集合は $\{1,2,\dots,n\}$ から $\{1,2,\dots,n\}$ への写像全体の集合と同一視できる．そこで，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_n &= \left\{\sigma \ : \ \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow{\sigma} \{1,2,\dots,n\} \text{ は 1 対 1 写像} \right\} \\ &= \left\{(i_1,i_2,\dots,i_n) \ : \ i_1,i_2,\dots,i_n \text{ は } 1 \sim n \text{ までの数の順列} \right\}\end{aligned}$$

とおく．この時，$\mathfrak{S}_n$ の元を**置換**という．$\mathfrak{S}_n$ の個数は $|\mathfrak{S}_n| = n!$ である．

又，$\epsilon(k) = k \ (1 \leqq k \leqq n)$ なる置換，即ち，

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

を**単位置換**という．又，置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

を σ の**逆置換**という．σ^{-1} の上段の $i_1,i_2,\dots,i_n$ を $1 \sim n$ の順に並べ換え，対応する下段の数を $j_1,j_2,\dots,j_n$ と並べる，

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \ell & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_\ell & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

例. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ $\quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$ に対し，積 $\sigma \cdot \tau$ を合成写像

$$\sigma \cdot \tau := \tau \circ \sigma : \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow{\sigma} \{1,2,\dots,n\} \xrightarrow{\tau} \{1,2,\dots,n\}$$

$$(\sigma \cdot \tau)(k) = \tau\left(\sigma(k)\right)$$

で定義する．$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ は全体として $1,2,\dots n$ と一致している．こうして，各 $\sigma(k)$ は置換 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$ の上段 $1,2,\dots n$ のどれかである．例えば，仮に $\sigma(k) = \ell$ とすれば，$(\sigma \cdot \tau)(k) = \tau(\sigma(k)) = \tau(\ell)$ となる．

こうして,

$$(\sigma\cdot\tau)(1)=\tau(\sigma(1))=j_1,\quad (\sigma\cdot\tau)(2)=\tau(\sigma(2))=j_2,\dots$$
$$(\sigma\cdot\tau)(k)=\tau(\sigma(k))=j_k,\quad (\sigma\cdot\tau)(n)=\tau(\sigma(n))=j_n$$

とおくと,

$$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&\dots&k&\dots&n\\ j_1&j_2&\dots&j_k&\dots&j_n\end{pmatrix}$$

となる.

例. (1) $\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 2&4&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 1&3&4&2\end{pmatrix}$

$$1\to 2\to 1,\quad 2\to 4\to 3,\quad 3\to 1\to 4,\quad 4\to 3\to 2$$

または,

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1&3\\ 1&3&4&2\end{pmatrix}$$

より

$$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 2&4&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4&1&3\\ 1&3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ 1&3&4&2\end{pmatrix}$$

(2) $\sigma\cdot\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\\ 1&2&\dots&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ 1&2&\dots&n\end{pmatrix}=\epsilon.$

$$\sigma^{-1}\cdot\sigma=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\\ 1&2&\dots&n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\ i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\\ i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}=\epsilon$$

注意 4.1. $\mathfrak{S}_n$ は置換の積を演算として群をなす．即ち，

(1) <u>単位元の存在</u>：全ての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，$\sigma \cdot \epsilon = \epsilon \cdot \sigma = \sigma$ となる $\epsilon \in \mathfrak{S}_n$ が存在する．

(2) <u>逆元の存在</u>：σ に対し $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ が唯一つ存在し，$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \epsilon$ を満たす．

(3) <u>結合律</u>：$\sigma, \tau, \eta \in \mathfrak{S}_n$ に対し，$(\sigma \cdot \tau) \cdot \eta = \sigma \cdot (\tau \cdot \eta)$ を満たす．

事実 4.1. ▶ $\tau \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\tau \cdot \mathfrak{S}_n = \{\tau \cdot \sigma \ : \ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{\tau^{-1} \cdot \sigma \ : \ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{S}_n.$$

▶ $\{\sigma^{-1} \ : \ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \mathfrak{S}_n$.

定義 4.1. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots & k_j & \dots & k_n \end{pmatrix}$ に於いて i 番目の数 k_i と j 番目の数 k_j を入れ替える操作 (i,j) を**互換**（transposition）という．即ち，

$$(i,j)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_j & \dots & k_i & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

注意 4.2. (1) $(i,j) = (j,i)$

(2) $(i,j)^{-1} = (j,i) = (i,j) \quad \therefore (i,j) \cdot (i,j) = (i,j) \cdot (j,i) = (i,i) = \epsilon$.

(3) 一般に $(i,j) \cdot (k,\ell) \neq (k,\ell) \cdot (i,j)$ である．

例. (1) $(2,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $(1,3)(2,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $(1,4)(1,3)(2,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1,4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \epsilon.$

$\therefore \quad (1,4)(1,3)(2,4)\sigma = \epsilon \quad \therefore \sigma = (2,4)^{-1}(1,3)^{-1}(1,4)^{-1}\epsilon = (2,4)(1,3)(1,4)$

命題 4.1. 任意の置換 σ は互換の積として表される．即ち，

$$\sigma = (i_1, j_1)(i_2, j_2)\cdots(i_k, j_k)$$

と表される．

証明. ▶ $\sigma = (i_1, i_2, \dots i_n)$ とおく．

▶ $i_1, i_2, \dots, \imath_n$ は全体として $1, 2, \dots, n$ と一致しているので，

▶ $i_1, i_2, \dots, i_n$ の中でどれかの i_k については $i_k = 1$ である．

▶ 1 番目の i_1 と k 番目の $i_k = 1$ を入れ換えて，即ち，互換 $(1\ k)$ と σ の積をとると，

$$(1\ k)\sigma = (1, i_2, \dots, i_n)$$

を得る．

▶ 一方，$i_2, \dots i_n$ は全体として $2, 3, \dots, n$ と一致しているので，その中に $i_\ell = 2$ なるものがある．

▶ そこで，互換 $(2, \ell)$ との積をとれば，

$$(2\ \ell)(1, k)\sigma = (1, 2, j_3, \dots, j_n)$$

を得る．

▶ この操作（互換）を下記のように繰り返して，最終的に

$$(i_1, i_2, \dots i_n) \to (1, i_2', i_3', \dots i_n') \to (1, 2, i_3', \dots,) \to (1, 2, 3, i_4' \dots) \dots \to (1, 2, 3, \dots, n) = \epsilon$$

とできる．

▶ $(i_k, j_k) \cdots (i_2, j_2)(i_1, j_1)\sigma$ より左から順に $(i_k, j_k), \dots, (i_2, j_2), (i_1, j_1)$ を掛けてゆけば $(i_p, j_p) \cdot (i_p, j_p) = \epsilon$ より，最終的に

$$\sigma = (i_1, j_1)(i_2, j_2) \cdots (i_k, j_k)$$

を得る．こうして，σ は互換の積で表される．

□

定義 4.2. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_i & \dots & k_n \end{pmatrix}$ が**偶置換**とは偶数回の互換を繰り返すことにより単位置換にもってこれるとき，即ち，

$$(i_{2p}, j_{2p}) \cdots (i_2, j_2) \cdot (i_1, j_1)\, \sigma = \epsilon \ (\text{単位置換})$$

とできるときをいう．このとき，σ は<u>偶数個の互換の積</u>

$$\sigma = (i_1, j_2) \cdot (i_2, j_2) \cdots (i_{2p}, j_{2p})$$

と表される．σ が**奇置換**であるとは，奇数個の互換の積

$$\sigma = (i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) \cdots (i_{2q+1}, j_{2q+1})$$

と表されるときをいう．

注意 4.3. （各自調べよ）

(1) 任意の置換 σ は互換の積として表されるが，その表し方は一意的でない．しかし σ を互換の積で表したときの互換の個数の偶奇性は σ に対し一意的に決まる：「線形代数入門-p.74」斎藤正彦（東京大学出版会）．つまり，

(2) 置換は偶数個の互換の積として表されるか又は奇数個の互換の積として表されるかのいずれかである．即ち，$\mathfrak{S}_n^+$ を偶置換全体の集合，$\mathfrak{S}_n^-$ を奇置換全体の集合とすれば

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^+ \cup \mathfrak{S}_n^-, \quad \mathfrak{S}_n^+ \cap \mathfrak{S}_n^- = \emptyset$$

定義 4.3. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を一つの置換とする．そのとき，そのとき，$\mathrm{sgn}\ \sigma$ （σ の符号）を

$$\mathrm{sgn}\ \sigma = \begin{cases} +1 & \text{if } \sigma \in \mathfrak{S}_n^+ \\ -1 & \text{if } \sigma \in \mathfrak{S}_n^- \end{cases}$$

と定義する．

注意 4.4. $1 \sim n$ の順列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ と置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ とは 1 対 1 に対応する．従って，偶置換に対応して偶順列，奇置換に対応して奇順列なる概念を定義することができる．即ち，

- 順列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ が**偶順列**とは，$i_1, i_2, \ldots, i_n$ の 2 文字の入れ替えを偶数回繰り返して**自然な順列** $(1, 2, \ldots, n)$ にできるときであり，**奇順列**とは 2 文字の入れ替えを奇数回繰り返しての自然な順列 $(1, 2, \ldots, n)$ にできるときと定義する．

- 偶順列全体の集合と $\mathfrak{S}_n^+$ は同一視できる．一方，奇順列全体の集合と $\mathfrak{S}_n^-$ は同一視できる．

- 順列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ に対しても置換の時と同様に，符号 $\mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ が定義でき，

$$\mathrm{sgn}\,(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \begin{cases} +1 & \text{if } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ は偶順列} \\ -1 & \text{if } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ は奇順列} \end{cases}$$

例.

$$(4,3,1,5,2) \xrightarrow{4\leftrightarrow 1} (1,3,4,5,2) \xrightarrow{3\leftrightarrow 2} (1,2,4,5,3) \xrightarrow{4\leftrightarrow 3} (1,2,3,5,4) \xrightarrow{5\leftrightarrow 5} (1,2,3,4,5)$$

$$\therefore \quad \mathrm{sgn}\ (4,3,1,5,2) = +1$$

3.5 節で定義した 3 次行列式をもとに n 次行列式の定義を与える.

定義 4.4. n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

に対し,

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ (i_1,i_2,\dots,i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

を行列 A の行列式という.

例題 4.1.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2)\in\mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}\,(i_1,i_2) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \\ &= \mathrm{sgn}\,(1,2) a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\,(2,1) a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,i_3)\in\mathfrak{S}_3} \mathrm{sgn}\,(i_1,i_2,i_3) a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \\ &= (3.5.1) \text{ を見よ.} \end{aligned}$$

命題 4.2. (1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_j} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_j} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0$

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j{}' + \boldsymbol{a}_j{}'' & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j' & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j'' & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & c\cdot\boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = c\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$

証明. (1): $\tau=(i,j)$ とおく．その時，$\tau(i)=j,\ \tau(j)=i,\ \tau(k)=k\ (k\neq i,j)$.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_j} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} & \dots & \boldsymbol{a}_{\tau(i)} & \dots & \dots & \boldsymbol{a}_{\tau(j)} & \dots & \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\ \cdot a_{\sigma(\tau(1))\,1}\cdot a_{\sigma(\tau(i))\,i}\cdots a_{\sigma(\tau(j))\,j}\cdots a_{\sigma(\tau(n))\,n} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\ \cdot a_{\tau\sigma(1)\,1}\cdot a_{\tau\sigma(i))\,i}\cdots a_{\tau\sigma(j)\,j}\cdots a_{\tau\sigma(n)\,n} \\
&= \mathrm{sgn}\,\tau \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\cdot\mathrm{sgn}\ \tau\ \cdot a_{\tau\sigma(1)\,1}\cdots a_{\tau\sigma(i)\,i}\cdots a_{\tau\,\sigma(j)\,j}\cdots a_{\tau\sigma(n)\,n} \\
&= \mathrm{sgn}\ \tau \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\tau\ \cdot a_{\tau\sigma(1)\,1}\cdots a_{\tau\sigma(i)\,i}\cdots a_{\tau\,\sigma(j)\,j}\cdots a_{\tau\sigma(n)\,n} \\
&\overset{\mu=\tau\,\sigma}{=} \mathrm{sgn}\ \tau \sum_{\mu\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \mu\ \cdot a_{\mu(1)\,1}\cdots a_{\mu(i)\,i}\cdots a_{\mu(j)\,j}\cdots a_{\mu(n)\,n} \\
&= \mathrm{sgn}\,\tau \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_i & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \qquad (\because \mathrm{sgn}\,\tau=\mathrm{sgn}\,(i,j)=-1)
\end{aligned}
$$

(2): (1) より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \overset{i}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{a}}_i} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0$$

(3),(4) は行列式の定義から容易に分かる． □

命題 4.3. 正方行列 A,B に対し

(1) $|{}^tA|=|A|$.

(2) $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

証明. (1) : 定義から $|{}^tA|=\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}\ \sigma\ a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

$\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$ は全体として $1,2,\dots,n$ と一致しているので, $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$ を小さい順から並べ直し，対応する上段の数を $k_1,k_2,\dots,$ と書く．

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

このことより

$$\sigma^{-1}(j)=k_j\ (1\leqq j\leqq n) \quad\therefore\quad \sigma^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \left|{}^tA\right| = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\ a_{1\sigma(1)}\cdots a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma\ a_{k_1 1}\cdots a_{k_j j}\cdots a_{k_n n}$$
$$= \sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \sigma^{-1}\ a_{\sigma^{-1}(1)\,1}\cdots a_{\sigma^{-1}(j)\,j}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)\,n} \quad (\because \mathrm{sgn}\ \sigma = \mathrm{sgn}\ \sigma^{-1})$$
$$\overset{\sigma^{-1}=\tau}{=} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\ \tau\ a_{\tau(1)\,1}\cdots a_{\tau(j)\,j}\cdots a_{\tau(n)\,n}$$
$$= |A|$$

(2): 定義に立ち返っての証明は結構面倒である．視点を変えた証明は「線型代数入門：斎藤正彦（東京大学出版会）pp.80 ～を見よ」

注意 4.5 (命題 4.2 の行ベクトル表示版). 行列 A の i 行ベクトルを $\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ と置く．その時,

$$(1):\ \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} \qquad (2):\ \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ c\cdot\widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = c\cdot \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} \qquad (3):\ \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i' + \widetilde{\boldsymbol{a}}_i'' \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i' \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i'' \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix}$$

証明. (1)： 命題 4.3-(1) より,

$$\begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = \left| {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \ \ \ldots \ \ \overset{i}{{}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_j} \ \ \ldots \ \ \overset{j}{{}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_i} \ \ \ldots \ \ {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_n \right| = -\left| {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \ \ \ldots \ \ {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_i \ \ \ldots \ \ {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_j \ \ \ldots \ \ {}^t\widetilde{\boldsymbol{a}}_n \right| = - \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix}$$

(2),(3) も同様に命題 5 -(1) を適用して示すことができる．

4.2　行列式の展開

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

単位基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて，$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k$ と表す．

$$\begin{aligned} \therefore \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{e}_k & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \overset{j}{\check{\boldsymbol{e}}_k} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \cdots (4.2.1) \end{aligned}$$

最後の項については

$$\spadesuit \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

という事実を用いた．次に，(4.2.1) の最後の項

$$\clubsuit \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を具体的に計算してみよう．

$$
\clubsuit = \begin{vmatrix}
0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix}
1 & a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{k\,j-1} & a_{k\,j+1} & \dots & a_{kn} \\
0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,j-1} & a_{k-1\,j+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\
0 & a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,j-1} & a_{k+1\,j+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

そこで，

$$
\Delta_{kj} := \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,j-1} & a_{k-1\,j+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\
a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,j-1} & a_{k+1\,j+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

と置くと，

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_k & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = (-1)^{k-1}\Delta_{kj}
$$

ここに，Δ_{kj} は行列 A から k 行と j 列を除いた残りの $(n-1)$ 次の行列の行列式（行列 A の (k,j) **余因子**という）．

$$
|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j-1}(-1)^{k-1}\Delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j-2}\Delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta_{kj}
$$

これを行列式 $|A|$ の j **列展開**という．一方，$|{}^tA| = |A|$ より

$$
|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{ik}
$$

を得る．これを行列式 $|A|$ の i **行展開**という

4.3 行列式の計算公式

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_j & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix}$ について以下は公式としてまとめたものである．$\boldsymbol{a}_j$（A の j 列ベクトル）$\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$（$A$ の i 行ベクトル）の各成分は 4.2 節で記載してた通り．また，Δ_{ij} は A の i 行ベクトルおよび j 列ベクトルを除いた残りの $(n-1)$ 次行列の行列式-(i,j) 余因子-を表す．

(1) $\Big(|A|$ の k 列と $j(\neq k)$ 列を入れかえた行列の行列式$\Big) = -|A|.$

(2) $\Big(|A|$ の i 行と $k(\neq i)$ 行を入れかえた行列の行列式$\Big) = -|A|.$

(3) $\Big(|A|$ の j 列ベクトルを c 倍した行列の行列式$\Big) = c \cdot |A|.$

(4) $\Big(|A|$ の i 行ベクトルを d 倍した行列の行列式$\Big) = d \cdot |A|.$

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_k & \ldots & \boldsymbol{a}_k & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0$

(6) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_{j-1} & \boldsymbol{x}_j & \boldsymbol{x}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_j & \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_{j-1} & \boldsymbol{x}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}$

(7)

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_k \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_n \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}}_k \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{x}}_n \end{vmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_k \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_k \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{(iii)} \quad \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j + c\widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n \end{vmatrix}$$

(8)

$$\Delta_{kj} = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,j-1} & a_{k-1\,j+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,j-1} & a_{k+1\,j+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

とおく．

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta_{kj} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\Delta_{kj}$$

特に，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11}$$

(x) A_n を n 次正方行列 B_m を m 次正方行列，O_{nm} を (n,m) 零行列，C_{mn} を (m,n) 行列とし，$m+n$ 次行列式

$$\begin{vmatrix} A_n & O_{nm} \\ C_{mn} & B_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n & C_{nm} \\ O_{mn} & B_m \end{vmatrix} = |A_n|\cdot|B_m|$$

(線型代数入門：斎藤正彦（東京大学出版会を参照)

4.4 行列式の計算問題演習

演習問題 4.1. (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ a+5 & a+6 & a+7 & a+8 \\ a+9 & a+10 & a+11 & a+12 \\ a+13 & a+14 & a+15 & a+16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 2 & 3 \\ a+5 & 1 & 2 & 3 \\ a+9 & 1 & 2 & 3 \\ a+13 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ a+5 & 1 & 1 & 1 \\ a+9 & 1 & 1 & 1 \\ a+13 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+3}a_n \cdots a_1 =$
$(-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_n \cdots a_2 a_1 = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$

(4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -1 & -14 \\ 0 & -11 & -5 & -6 \\ 0 & -11 & -3 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -11 & -1 & -14 \\ -11 & -5 & -6 \\ -11 & -3 & -13 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 11 & 1 & 14 \\ 11 & 5 & 6 \\ 11 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 14 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 11(-4+16) = 132$

演習問題 4.2. ${}^tA = -A$ なる正方行列を交代行列という．交代行列の行列式 $|A| = 0$.
実際，$|A| = |{}^tA| = |-A| = -|A| \quad \therefore 2|A| = 0 \quad \therefore \quad |A| = 0$

演習問題 4.3. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ の 2 行展開をせよ．

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 4 \cdot \Delta_{21} + (-1)^{2+2} \cdot 3 \cdot \Delta_{22} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \Delta_{23} + (-1)^{2+4} \cdot 5 \cdot \Delta_{24}$$

$$\therefore |A| = -4\Delta_{21} + 3\Delta_{22} - 2\Delta_{23} + 5\Delta_{24}$$

サラスの公式（$\Delta 2k$ は 3×3 行列式）より

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 21, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$
$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad \Delta_{24} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 22$$

$$\therefore \quad |A| = 69$$

4.5　クラメールの公式（n 次元版）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は各 j に対して

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots x_j\boldsymbol{a}_j + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \quad \text{i.e.} \quad \boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{a}_k$$

と表すことができる．今，$|A|$ の j 列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{b}$ で置き換える．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \overset{j}{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= x_j \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

実際，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{if} \quad k \neq j$. 即ち，$k = j$ 以外は行列式の値は 0 である．(同じ列を含む行列の行列式は 0 であった)．こうして，$k = j$ のときを考えればよい．このとき，$\underline{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \neq 0}$ ならば，

クラメールの公式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow x_j = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}} \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

を得る．

4.6　正則行列，逆行列，随伴行列

定義 4.5. A を n 次正方行列とする．A を**正則行列**とは $AX = XA = E$（n 次単位行列）となる n 次行列 X が存在するときをいう．（このとき，X を A の逆行列とよび，$X = A^{-1}$ で表した）．

注意 4.6. $|AX| = |XA| = |E| = 1$ より，$|AX| = |A| \cdot |X| = 1 \quad \therefore \quad |A| \neq 0$.

命題 4.4. n 次正方行列 A が正則行列ならば $|A| \neq 0$ である．逆に，$|A| \neq 0$ ならば A は正則行列で $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$ が成り立つ．

注意 4.7. A^{-1} は $\dfrac{1}{A}$ ではない．$n \geqq 2$ に対して $\dfrac{1}{A}$ は定義できない（概念がない）

次に，正則行列の逆行列 $X = A^{-1}$ を求めよう．n 次正方行列 A，未知の行列 X および n 次単位行列 E に対し，

$$AX = E$$

を満たす X を以下のように求める．まず A, X, E の列ベクトル表示をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{12} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_j & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_j & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

と置く．その時，$AX = E$ より，

$$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_j & \dots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \dots & A\boldsymbol{x}_j & \dots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_j & \dots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j \quad \overset{\text{同義}}{\Longleftrightarrow} \quad x_{1j}\boldsymbol{a}_1 + x_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_{kj}\boldsymbol{a}_k + \cdots x_{nj}\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

クラメールの公式より $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_j & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \neq 0$ ならば,

$$x_{kj} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \overset{k}{\check{\boldsymbol{e}}_j} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_k & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \overset{k}{\check{\boldsymbol{e}}_j} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}}{|A|} \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

ここで，右辺の分母

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \overset{k}{\check{\boldsymbol{e}}_j} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} &= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_{k-1} & \boldsymbol{a}_{k+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1\ k-1} & a_{1\ k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_{j1} & \dots & a_{j\ k-1} & a_{j\ k+1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\ k-1} & a_{n\ k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{j1} & \dots & a_{j\ k-1} & a_{j\ k+1} & \dots & a_{jn} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1\ k-1} & a_{1\ k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{j-1\ 1} & \dots & a_{j-1\ k-1} & a_{j-1\ k+1} & \dots & a_{j-1\ n} \\ 0 & a_{j+1\ 1} & \dots & a_{j+1\ k-1} & a_{j+1\ k+1} & \dots & a_{j+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n\ k-1} & a_{n\ k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{k+j-2} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ k-1} & a_{1\ k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{j-1\ 1} & \dots & a_{j-1\ k-1} & a_{j-1\ k+1} & \dots & a_{j-1\ n} \\ a_{j+1\ 1} & \dots & a_{j+1\ k-1} & a_{j+1\ k+1} & \dots & a_{j+1\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ k-1} & a_{n\ k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{j+k} \Delta_{jk}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \overset{k}{\check{\boldsymbol{e}}_j} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = (-1)^{j+k} \Delta_{jk}$$

$\widetilde{a}_{jk} = (-1)^{j+k}\,\Delta_{jk}$ とおくと，X の (k, j) 成分について

$$(X)_{kj} = x_{kj} = (-1)^{j+k} \frac{\Delta_{jk}}{|A|} = \frac{\widetilde{a}_{jk}}{|A|}$$

そこで

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \dots & \widetilde{a}_{j1} & \dots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{j2} & \dots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1k} & \widetilde{a}_{2k} & \dots & \widetilde{a}_{jk} & \dots & \widetilde{a}_{nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \dots & \widetilde{a}_{jn} & \dots & \widetilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく．$\widetilde{A}$ を A の**随伴行列**という．このとき，

命題 4.5.

$$A \cdot \widetilde{A} = |A| \cdot E$$

こうして，$|A| \neq 0$ ならば，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\widetilde{A}\,.$$

5　連立 1 次方程式の解法

5.1　掃出し法

まず，次の 連立 1 次方程式：

$$(6.1.1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

は $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる．

注意 5.1. $m = n$ かつ $|A| \neq 0$ ならば (6.1.1) の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ に限る（一意解）．一方，$m \neq n$ の時は，A の行列式 $|A|$ は定義されないので，行列式を用いない別の方法（掃き出し法）を考える．ここで，掃き出し法とはひとことで述べれば「連立1次方程式の同値変形法」である．

例. 次の２つの連立１次方程式は同値である．

$$(1)\quad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -3x + 5y = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 0y = 2 \\ 0x + y = 1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 0x - 0y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad 2x - y = 1$$

$$(3)\quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 0x - 3y - 6z = 0 \\ 0x - 6y - 12z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x + 0y + (-1)z = 0 \\ 0x + y + 2z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

これらの同値変形は係数行列に着目すれば次の操作 (**基本変形**) でなされている．

(1) ある行の定数倍を他の行に加える．

(2) ある行を定数倍する

(3) 二つの行の入れ換え

これらの操作は消去法として中・高校数学で広く知られている．そこで，これらの操作をある種の行列の（左からの）積として定義する．

5.2 行列の基本変形

定義 5.1. m 次単位行列 E_m を行ベクトル表示

$$E_m = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_m \end{pmatrix}$$

する，この時，次の行列 (I).(II).(III) を定義する．

(I) $P(i,j) = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_m \end{pmatrix}$ ：単位行列 E_m の i 行と j 行を入れ換えた m 次正方行列

(II) $P(i|c) = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vdots \\ c \cdot \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_m \end{pmatrix}$ ：E_m の i 行を c 倍した行列

(III) $P(i,j|c) = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \\ \vdots \\ c \cdot \widetilde{\boldsymbol{e}}_i + \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_m \end{pmatrix}$ ：E_m の i 行を c 倍して j に加えた行列

$P(i,j), \quad P(i|c), \quad P(i,j|c)$ をそれぞれ基本変形の行列（(I),(II),(III)）という．

注意 5.2. 基本変形行列の行列式について，

(1) $|P(i,j)| = -1$

(2) $|P(i|c)| = c$

(3) $|P(i,j|c)| = 1$

命題 5.1. (m,n) 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_j \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix}$ に於いて

(I) $\underline{P(i,j)\cdot A}$ ： A の i 行と j 行を入れ換えた行列

(II) $\underline{P(i|c)\cdot A}$ ：A の i 行を c 倍した行列

(III) $\underline{P(i,j|c)\cdot A}$ ： A の i 行を c 倍して j 行に加えた行列

注意 5.3. 行列 A に基本変形 (I),(II),(III) を施すとは行列

$$P(i,j)A, \quad P(i|c)A, \quad P(i,j|c)A$$

を扱うことを意味する．実際は基本変形は基本変形行列を掛けるという面倒くさいことはしないでその操作および操作の結果を矢印を繋いで記述する．

例題 5.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)：1 行の (-4) 倍を 2 行に加え，1 行の (-7) 倍を 3 行に加える．
(2)：2 行を $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ 倍，3 行を $\left(-\dfrac{1}{6}\right)$ 倍する．
(3)：2 行の (-1) 倍を 3 行に加える．
(4)：2 行の (-2) 倍を 1 行に加える．

最後の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は簡約行列と呼ばれるものである（後述）．

例題 5.2. $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 20 & 45 & 5 & 65 \\ 0 & 16 & 36 & 4 & 50 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 25 \\ 0 & 8 & 18 & 2 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)：1 行と 2 行の入れ換え

(2)：1 行の -8 倍を 2 行に，(-7) 倍を 3 行に，(-3) 倍をを 4 行に加える.

(3)：2 行を $\frac{1}{5}$ 倍， 3 行を $\frac{1}{2}$ 倍.

(4)：2 行の (-2) 倍を 3 行， 4 行に加える.

(5)：3 行の (-1) 倍.

(6)：2 行の $\dfrac{1}{4}$ 倍

(7)：2 行の 3 倍を 1 行に加える.

注意 5.4. 行列の基本変形の目的は基本変形操作を繰り返し行うことにより，最終的には例題 5.2 にあるような簡約行列まで持ってくることである．この操作は操作の順番などによっても幾通りもある，どういう基本変形が適当かは行列による.

5.3 階段行列と行列の簡約化

次の形の行列を**階段行列**と呼び，

$$E_r^* = E(m,r)^* = \begin{pmatrix} \ldots & \mathbf{1} & * & \ldots & * & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & * & \ldots & * & * & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & \ldots & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & * & \vdots & * \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{1} & \ldots & * \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \cdots & \\ \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

次の形の行列を**簡約行列**と呼ぶ.

$$E_r = E(m,r) = \begin{pmatrix} \dots & \mathbf{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & * & \dots & * & 0 & * & * & 0 & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{1} & * & * & 0 & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} & \dots & * \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

即ち，

$$E_r = E(m.r) = (* \ \cdots \ * \ \boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_2 \ \cdots \ * \ \boldsymbol{e}_r \ * \ \cdots \ *)$$

行列の列を入れ替えて $\boldsymbol{a}_j^* = \begin{pmatrix} a_{1j}^* \\ a_{2j}^* \\ \vdots \\ a_{rj}^* \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (r+1 \leqq j \leqq n)$

とおくと，

$$E_r = E(m.r) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \dots & \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{a}_{r+1}^* & \dots & \boldsymbol{a}_j^* & \dots & \boldsymbol{a}_n^* \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1r+1}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2r+1}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1}^* & \dots & a_{rn}^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

としてよい．

注意 5.5. **階段行列**と**簡約行列**の違いは $\mathbf{1}$ の上は全て $\mathbf{0}$ になっているかどうかである．タイプ (III) の基本変形を有限回施せば 明らかに

$$\textbf{（階段行列）} E_r^* \Longrightarrow E_r \textbf{（簡約行列）}$$

とできる．

一般には次が成立する．

定理 5.1. A を (m,n) 行列とする．そのとき，有限回の基本変形の繰り返し（即ち，基本変形の行列 (I).(II).(III) 達を A の左から順番に掛ける）により最終的には簡約行列 $E(n,r)$ まで変形できる．即ち，有限個の基本変形の積からなる行列 P によりまり $PA = E(n,r)$ とできる．

定義 5.2.

$$\text{rank } A = r\ (\leqq m,n) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} A \ \overset{\text{基本変形}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}\ E(m,r)$$

5.4 連立 1 次方程式の拡大係数行列

連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

に対し，

$$(A : \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を**拡大係数行列**という．今，rank $A = r$ とすれば，タイプ (I),(II),(III) の適当な基本変形行列 $P_1, P_2, \dots, P_s$ を選び $P = P_s P_{s-1} \cdots P_1$ と置くとき，

$$P \cdot A = E(m,r) \Longrightarrow P \cdot (A\boldsymbol{x}) = P \cdot \boldsymbol{b} \Longrightarrow (P \cdot A)\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \quad \therefore \quad E(m,r)\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

簡単のため，

$$E(m,r) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & a^*_{1\,r+1} & \dots & a^*_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & \dots & 1 & a^*_{r\,r+1} & \dots & a^*_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} E_r & A^*_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \dots \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{a}^*_{r+1} & \dots & \boldsymbol{a}^*_n \end{vmatrix}$$

とする．また，$\boldsymbol{b}^* = P\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_r^* \\ b_{r+1}^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{pmatrix}$ とおく．これは，ベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分を A の基本変形に合わせて基本変形したベクトルである．

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad E(m,r)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^*$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + \sum_{k=r+1}^{n} a_{1k}{}^* x_k = b_1^* \\ x_2 + \sum_{k=r+1}^{n} a_{2k}{}^* x_k = b_2^* \\ \cdots\cdots \\ x_r + \sum_{k=r+1}^{n} a_{2k}{}^* x_k = b_r^* \\ 0 = b_{r+1}^* \\ \vdots \\ 0 = b_n^* \end{cases}$$

こうして，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するためには $b_{r+1}^* = b_{r+2}^* = \cdots = b_m^* = 0.$ でなければならない．この時，解は唯一つとは限らない（不定解）．特に，$m \geqq n$ かつ rank $A = n$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は唯一つ存在する（一意解）．以上より，

定理 5.2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するための必要十分条件は拡大係数行列 $\widetilde{A} = (A : \boldsymbol{b})$ の階数と A の階数が一致する時，即ち

$$\text{rank } \widetilde{A} := \text{rank } (A : \boldsymbol{b}) = \text{rank } A$$

例題 5.3. (7.1.1) $\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$ $\Longleftrightarrow$ 拡大係数行列$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上記の操作は,

(1)：1行と2行を入れ換える.

(2)：1行の (-1) 倍を，それぞれ3行，4行に加える.

(3)：2行と3行を入れ換える.

(4)：2行 (-1) 倍を1行に，(-3) 倍を3行に，(-2) 倍を4行に加える.

(5)：3行 (-4) 倍を1行に，1倍を2行に加える.

こうして (7.1.1) は次の連立1次方程式と同値である.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 7 \\ x_2 + x_3 = -2 \\ x_4 = -1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = 7 - x_3 \\ x_2 = -2 - x_3 \\ x_4 = -1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = 7 - t \\ x_2 = -2 - t \\ x_3 = t \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

従って $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-t \\ -2-t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意の実数) □

例題 5.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解く．拡大係数行列の基本変形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -5 \\ 7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

に於いて，3行目 $(0\ 0\ 0\ -4) \neq (0\ 0\ 0\ 0)$ なのでこの連立方程式に解はない.

ここで，上記操作は

(1):1行の (-4) 倍を2行に，(-7) 倍を3行に加える.

(2):2行を (-3) で割り，3行を (-6) で割る.

(3):2行の (-2) を1行に，(-1) を3行に加える. □

注意 5.6. A を n 次正方行列とし，$\mathrm{rank}\ A = n (\Longleftrightarrow |A| \neq 0)$ とする．そのとき,

▶ (I).(II),(III) の基本変形行列 $P_1, P_2, \ldots P_s$ を選んで

$$P_s \cdot P_{s-1} \cdots P_1 \cdot A = E(n,n) = E_n \text{ (単位行列)}$$

とできる．$P = P_s \cdot P_{s-1} \cdots P_1$ とおくと $|P| \neq 0$. そこで，A を係数行列とする連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える．このとき，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow P(A\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{b} \Longrightarrow (PA)\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \Longrightarrow E_n\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^*$$

このことは，拡大係数行列 $\widetilde{A} = (A, \boldsymbol{b})$ に対し，基本変形を繰り返し

$$\widetilde{A} = (A, \boldsymbol{b}) \longrightarrow (E_n, \boldsymbol{b}^*) \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1^* \\ a_{21} & \ldots & a_{1n} & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n^* \end{pmatrix} \cdots \longrightarrow \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n^* \end{pmatrix}$$

とできることを示している．即ち，拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ に於いて A を基本変形して単位行列 E までもってきた時の**「おつり」**$\boldsymbol{b}^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_n^* \end{pmatrix}$ が求める解である．このように基本変形の繰り返しで連立 1 次方程式の解を求めることができるのである．これを「掃き出し法」による連立 1 次方程式の解法という．

▶ 同じような考え方を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の行列版である次の行列方程式に対し適用する．

$$AX = B$$

但し，A, B は n 次正方行列で rank $A = n$ とし X を未知の行列とする．今，基本変形行列の積からなる行列 $P = P_s \cdot P_{s-1} \cdots P_1$ に対し，

$$PA = E(n,n) = E = E_n$$

$$\underline{AX = B} \Longrightarrow \underline{P(AX) = PB} \Longrightarrow \underline{(PA)X = PB} \Longrightarrow \underline{EX = PB} \quad \therefore X = PB =: B^*$$

このことを，拡大係数行列 $(A\ ; B)$ を用いて言い直せば

$$P(A; B) = (PA\ ; PB) = (E\ ; PB) \Longleftrightarrow (A\ ; B) \cdots \to \cdots (E\ ; B^*)$$

すなわち，A を基本変型の繰り返しで単位行列 E に変形したときの**「おつり」**の B^* が解の行列である．特に，$B = E$ のとき，$AX = E$ の解は $X = PE = P$ である，この X は A の逆行列であるので，

$$A^{-1} = P$$

即ち，基本変形操作 $(A\,;E)\cdots\longrightarrow\cdots(E\,;P)$ により，逆行列は求めることができる．

例題 5.5. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求めよ．

拡大係数行列の基本変形

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\\2&3&1&2&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-2&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-5&-10&-1&0&0&1\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&5&1&0&-1&0\\0&2&5&10&1&0&0&-1\\0&1&5&6&2&-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(4)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-6&-1&0&2&0\\0&1&2&5&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&3&1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(5)}\begin{pmatrix}1&0&0&-6&-2&0&4&-1\\0&1&0&5&3&0&-5&2\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{(6)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{pmatrix}\qquad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{問}}$ (1) ∼ (6) はどのような基本変形したかを確認せよ． □

例題 5.6. 次の行列方程式 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&0\\3&1&1\end{pmatrix}$ の解を掃き出し法で求めよ．

以下の拡大係数行列の基本変形により

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&3\\1&2&1&1&2&0\\2&1&1&3&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&3\\0&1&0&1&1&-3\\0&-1&-1&3&-1&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0&6\\0&1&0&1&1&-3\\0&0&-1&4&0&-8\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0&6\\0&1&0&1&1&-3\\0&0&1&-4&0&8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&0&-2\\0&1&0&1&1&-3\\0&0&1&-4&0&8\end{pmatrix}\qquad\therefore\quad X=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&1&-3\\-4&0&8\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{問}}$ どのような基本変形をしたかを確認せよ．

5.5　一次独立性と一次従属性

k 個の m 次元（列）ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\} \subset \mathbb{R}^m$ に対し，

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0} \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

とおく．

定義 5.3. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるとは，$x_1, x_2 \dots, x_k$ を未知数とする連立 1 次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

の解が $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ に限るときをいう．即ち，

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{k1} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \\ \vdots & \vdots & \vdots\&\vdots\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

とおく．そのとき，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{k1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限るとき．また，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立でないとき 1 次従属という．

命題 5.2. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} = r \ (\leqq \min\{m, k\})$ とする．そのとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $r = k$.

証明. A は適当な基本変形を繰り返すことにより簡約行列に変形できる：

$$A \cdots \longrightarrow \cdots E(m, r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a^*_{1r+1} & \dots & a^*_{1k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a^*_{2r+1} & \dots & a^+_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a^*_{rr+1} & \dots & a^*_{rk} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

今，基本変形の行列を P とすれば，

$$PA = P\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{a}_{r+1} & \dots & \boldsymbol{a}_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r & P\boldsymbol{a}_{r+1} & \dots & P\boldsymbol{a}_k\end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j \geqq 1)$ なので

$$\boldsymbol{a}_j^* = P\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j}^* \\ a_{2j}^* \\ \vdots \\ a_{rj}^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0} \quad (j \geqq r+1) \tag{6.1.1}$$

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} E(m,r)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{cases} x_1 + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{1j}^* x_j = 0 \\ x_2 + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{2j}^* x_j = 0 \\ \vdots \\ x_r + \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{rj}^* x_j = 0 \end{cases}$$

$r = k$ ならば $E(m,k)\boldsymbol{x} = 0$ より $\boldsymbol{x} = 0$．よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ は 1 次独立である．また，$r < k$ ならばこれらのベクトルは 1 次独立でないことを示そう．今，$\boldsymbol{a}_j^* = P\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0}$ $\quad (r+1 \leqq j \leqq k)$ より

$$x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1}^* + \dots + x_k\boldsymbol{a}_k^* = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{1j}^* x_k \\ \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{2j}^* x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=r+1}^{k} a_{rj}^* x_k \end{pmatrix} \not\equiv \boldsymbol{0} \quad \text{（恒等的に零ベクトルでない）}$$

実際，$F = x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1}^* + \dots + x_k\boldsymbol{a}_k^* \equiv \boldsymbol{0}$ なら，$\dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \boldsymbol{a}_j^* = \boldsymbol{0}$ となり $\boldsymbol{a}_j^* \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾する．よって，$(t_{r+1}, \dots, t_k) \neq (0, \dots, 0)$ で

$$t_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1}^* + \dots + t_k\boldsymbol{a}_k^* \neq 0$$

を満たすものが存在する．従って，ある $1 \leqq i \leqq r$ があって，

$$\sum_{j=r+1}^{k} t_j a_{ij}^* \neq 0$$

とできる．よって，$x_i = -\sum_{j=r+1}^{k} t_j a_{ij}^* \neq 0$．こうして，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立でない．

注意 5.7. (6.1.1) より $r+1 \leqq j \leqq k$ に対し，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_j^* = P\boldsymbol{a}_j &= a_{1j}^*\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}^*\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{rj}^*\boldsymbol{e}_r \\
&= a_{1j}^*P\boldsymbol{a}_1 + a_{2j}^*P\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{rj}^*P\boldsymbol{a}_r \\
&= P(a_{1j}^*\boldsymbol{a}_1 + a_{2j}^*\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{rj}^*\boldsymbol{a}_r)
\end{aligned}$$

$|P| \neq 0$ より， P^{-1} が存在する．よって，

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}^*\boldsymbol{a}_1 + a_{2j}^*\boldsymbol{a}_2 + \cdots + a_{rj}^*\boldsymbol{a}_r \quad (r+1 \leqq j \leqq k)$$

すなわち，$\boldsymbol{a}_j$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\}$ の**一次結合（線形結合）**として表される．

定義 5.4. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ と実数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ のスカラー積の和

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の**線形結合**（一次結合）といい，それらベクトルの 1 次結合全体の集合

$$\Big\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \Big\rangle_{\mathbb{R}^n} := \Big\{ x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r \ : \ x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R} \Big\}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ で**張られる空間**という．

定理 5.3. (m,n) 行列 A を列ベクトル表示 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とする．このとき，

$$\mathrm{rank}\ A = \Big\{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ の中の一次独立なベクトルの最大数} \Big\}$$

証明. 右辺における最大数を $r\ (\leqq n)$ とする．順番を入れ換えることにより $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を 1 次独立なベクトルとする．今，$s = \mathrm{rank}\ A > r$ ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ は 1 次独立．これは r の最大性に反する．一方，$s < r$ ならば $\boldsymbol{a}_r$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ の 1 次結合として表される．よって $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次従属である．これは，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の 1 次独立性に反する． □

6　ベクトル空間（部分空間）

6.1　定義と例

定義 6.1. $\mathbb{R}^m$ の部分集合 V が（部分）ベクトル空間（部分空間）とは

(1) $\mathbf{0} \in V$.

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$.

(3) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\lambda \cdot \boldsymbol{x} \in V$

例. (m, n) 行列 A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

の解全体（**解空間**という）：

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

は部分空間（ベクトル空間）である.

補題 6.1. $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ が部分空間であるためには $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ でなければならない.

証明. $\mathbf{0} \in V$ より　$\mathbf{0} = A\mathbf{0} = \boldsymbol{b}$　$\therefore$　$\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$. 故に $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ ならば V は部分空間ではない. □

例.　(1) $V_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ \ x_1 - x_3 = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

と記述できるから部分空間である.

(2) $V_2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \ x_1 - x_3 = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

実際，(1) の行列 A に対して，

$$V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}\}.$$

補題 6.1 により V_2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない．

(3) ▶ $A = O$（零行列）のとき，

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid O\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \mathbb{R}^n$$

▶ $A = E$（単位行列）のとき，

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

6.2 基底と次元

例題 6.1. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ について

$$V := \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \right\rangle_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

証明. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_m = \sum_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{a}_i$$

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + y_r\boldsymbol{a}_m = \sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{a}_i$$

$$\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} = \lambda\sum_{i=1}^{m} x_i\boldsymbol{a}_i + \mu\sum_{i=1}^{r} y_i\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{m}(\lambda x_i + \mu y_i)\boldsymbol{a}_i \in V$$

□

定義 6.2. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_r$ が部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ の**基底**であるとは次の 3 つの条件を満たす時をいう．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r \in V$

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立．即ち，$\mathrm{rank}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r) = r$

(3) $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}}$. 即ち，$V$ の任意の元 $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i$$

で表される

定義 6.3. $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間とする．そのとき，V の基底の数を**次元**といい，$\dim V$ で表す．

注意 6.1 (V の基底を求める方法)**.**

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,| A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

なる一次独立ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r$ を求める．

まず，基本変形操作により

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \cdots \longrightarrow \cdots \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \dots \boldsymbol{e}_{i_1} & \dots & \boldsymbol{e}_{i_2} & \dots & \boldsymbol{e}_{i_r} & \boldsymbol{0} \dots & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

と変形されたとする．このとき，$\mathrm{rank}\ A = r$ である．基本変形では列の入れ替えは行っていないことに注意して，各単位基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{i_k}$ に対応する A の左から i_k 番目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_{i_k}$ とすれば

$$V = \left\langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r} \right\rangle$$

□

命題 6.1. $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,| A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ となる行列 A が存在する．

解. $\boldsymbol{x} \in V = \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}}$ をとる．そのとき，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$$

と表される．$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} = r$ より，基本変形の行列（の積）P が存在して，

$$P\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

とできる．

$$\therefore \quad P\,\boldsymbol{x} = P\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

そこで，$E(n-r) = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \boldsymbol{e}_{r+1} & \dots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$，$A = E(n-r)\cdot P$ とおく．そのとき，

$$A\,\boldsymbol{x} = E(n-r)\cdot P\,\boldsymbol{x} = E(n-r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

$$\therefore \quad A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

実際，容易に

$$E(n-r)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = O_n$$

が分かる．ゆえに，

$$\Big\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \Big\rangle_{\mathbb{R}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

□

命題 6.2. V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間で $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ および $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_r\}$ をそれぞれ V の基底とする．そのとき，r 次正則行列 C で

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} \cdot C$$

を満たすものが存在する．

証明. $\left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots \boldsymbol{a}_r \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots \boldsymbol{b}_r \right\rangle_{\mathbb{R}}$ より，$c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{rj} \in \mathbb{R}$ があって，

$$\boldsymbol{b}_j = c_{1j}\boldsymbol{a}_1 + c_{2j}\boldsymbol{a}_2 + \dots + c_{rj}\boldsymbol{a}_r \quad (1 \leqq j \leqq r)$$

と表される．

$$\therefore \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

同様に，

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_r\end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rr} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r\end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rr} \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rr} \end{pmatrix} = CD = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1r} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \dots & \delta_{rr} \end{pmatrix}$$

とおくと，$1 \leqq i \leqq r$ に対し

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{k=1}^{r} \delta_{ki}\boldsymbol{a}_k \quad \therefore \quad \sum_{k \neq i} \delta_{ki}\boldsymbol{a}_k + (\delta_{ii} - 1)\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ は 1 次独立だから

$$\delta_{ki} = 0 \ (k \neq i), \ \delta_{ii} = 1$$

こうして $CD = E_r$（r 次単位行列）．こうして $D = C^{-1}$．以上より，C は r 次正則行列である． □

6.3　演習問題と略解

$\boxed{1}$ 次の各問のベクトルについて次の 3 つの作業をせよ．

(i)　1 次独立な最大個数を r を求めよ．

(ii)　r 個の 1 次独立なベクトルを前の方から順に並べよ．

(iii)　他のベクトルを（ii）で上げたベクトルの 1 次結合として表せ．

(1)　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_3^* & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{a}_5^* \end{pmatrix}$

$\therefore$　rank $A = 3$. また，$\boldsymbol{e}_1 . \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4$ に対応する A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1 . \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立となる，$\boldsymbol{a}_3^* = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$,　$\boldsymbol{a}_5^* = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4$. こうして，

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$$

(2)　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_3^* & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{a}_5^* \end{pmatrix}$

$\therefore$ rank $= 3$. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4$ に対応する $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が一次独立,

$$\boldsymbol{a}_3^* = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a}_5^* = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

より,

$$\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_5 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{a}_4^* & \boldsymbol{a}_5^* \end{pmatrix}$$

$\therefore$ rank $= 3$, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に対応する $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立,

$$\boldsymbol{a}_4^* = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_5^* = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3$$

$\boxed{2}$ 次の部分空間（解空間）の次元と 1 組の基底を求めよ.

(1)

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \dim W = 2 \end{aligned}$$

解. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 25 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-3&5\\0&1&1&2&-5\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\to\begin{pmatrix}1&0&10&0&3\\0&1&0&5&-7\\0&0&1&-3&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad\therefore\quad\begin{cases}x_1+3x_5=0\\x_2+5x_4-7x_5=0\\x_3-3x_4+2x_5=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x_5\\-5x_4+7x_5\\3x_4-2x_5\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_4\begin{pmatrix}0\\-5\\3\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\7\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\in\left\langle\begin{pmatrix}0\\-5\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\7\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

より示される.

(2)

$$\begin{aligned}W&=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\mid\begin{array}{l}x_1-2x_2+x_3+2x_4+3x_5=0\\2x_1-4x_2+3x_3+3x_4+8x_5=0\end{array}\right\}\\&=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad\dim W=3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&1&2&3\\2&-4&3&3&8\end{pmatrix}\boldsymbol{x}\to\begin{pmatrix}1&-2&0&3&1\\0&0&1&-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad\therefore\begin{cases}x_1-2x_2+3x_4+x_5=0\\x_3-x_4+x_5=0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2-3x_4-x_5\\x_2\\x_4-2x_5\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\in\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

(3)

$$\begin{aligned}W&=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\mid\begin{array}{l}x_1+2x_2-x_3=0\\3x_1-3x_2+2x_3=0\end{array}\right\}\\&=\left\langle\begin{pmatrix}\frac{-1}{9}\\\frac{5}{9}\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad\dim W=1\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{9}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{9}\end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \therefore \begin{cases} x_1 + \frac{1}{9}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{9}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{9}x_3\\ \frac{5}{9}x_3\\ x_3\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\\ \frac{5}{9}\\ 1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\\ \frac{5}{9}\\ 1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\5\\9\end{pmatrix} \right\rangle$$

(4)

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \\ &= < \begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}, \quad \dim W = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & -1\\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}x_3 - 2x_4\\ \frac{5}{2}x_3 - 2x_4\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{3}$

$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が部分空間 W の基底であるとき，次のベクトルの組は W の基底となるか調べよ．

(1) $\boldsymbol{b}_1 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$

(2) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$

略解)

(1) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)A$,　但し，$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, rank $A = 3$ ゆえ基底である．

(2) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)A$,　但し，$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, rank $A = 2$ ゆえ基底でない．

7　線形写像（一次写像）

7.1　線形写像の定義と性質

定義 7.1. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像（または一次写像）であるとは，次を満たすとき：

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$.

(2) 実数（スカラー）$c \in \mathbb{R}$ およびベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

注意 7.1.　► (2) より $f(0\cdot\boldsymbol{x}) = 0\cdot f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \therefore \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

► $a, b \in \mathbb{R}$ および $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，(1),(2) より，$f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$.

定理 7.1. $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．そのとき，(m,n) 行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ と表せる．

証明. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k$ と表す．$\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ $(1 \leqq i \leqq n)$ は単位基本ベクトルである．

$$f(\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\boldsymbol{e}_k) = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \ldots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

今，$\boldsymbol{a}_j = f(\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{R}^m$ $(1 \leqq j \leqq n)$ とおき，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ とおくと，A は (m,n) 行列であり

$$f(\boldsymbol{x}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\,\boldsymbol{x}$$

□

7.2　線形写像の核と像

定義 7.2. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の**核** $\mathbf{Ker}(f)$ および**像** $\mathbf{Im}(f)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \mathbf{Ker}(f) &= \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\big\} \\ \mathbf{Im}(f) &= \big\{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \ :\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\big\} \end{aligned}$$

注意 7.2. 線型写像 $f(\boldsymbol{x})$ に対し, $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \dots & f(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$ とおくと A は (m,n) 行列で $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と表される．そのとき，

(i) $\mathbf{Ker}(f)$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間である．

実際，$\mathbf{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \ : \ A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\}$ である．

(ii) $\mathbf{Im}(f)=\left\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right\rangle_{\mathbb{R}}$

実際，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{Im}(f)$ をとる．そのとき，$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ となるベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ が存在する．$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{e}_k$ と表されるので，

$$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})=f(\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{e}_k)=\sum_{k=1}^{n}x_kf(\boldsymbol{e}_k)\in\left\langle f(\boldsymbol{e}_1),f(\boldsymbol{e}_2),\dots,f(\boldsymbol{e}_n)\right\rangle$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y}\in\left\langle f(\boldsymbol{e}_1),f(\boldsymbol{e}_2),\dots,f(\boldsymbol{e}_n)\right\rangle=\left\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n\right\rangle$$

$\therefore\quad \underline{\mathbf{Im}(f)\subset\left\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right\rangle_{\mathbb{R}}}$.

逆に，$\boldsymbol{y}\in\left\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right\rangle_{\mathbb{R}}$ をとれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}&=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=c_1f(\boldsymbol{e}_1)+c_2f(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+c_nf(\boldsymbol{e}_n)\\&=f(c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{e}_n)=f\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=f(\boldsymbol{c})\in\mathbf{Im}(f)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{Im}(f)\quad\therefore\quad \underline{\left\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\right\rangle_{\mathbb{R}}\subset\mathbf{Im}(f)}$. 以上より，主張 (ii) を得る． □

7.3　Ker(f), Im(f) の基底と次元

まず，$\underline{\mathbf{Ker}(f)\text{ の基底と次元について考えよう}}$.

線形写像 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m\iff f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$，但し，$A$ は (m,n) 行列で $\mathrm{rank}\ A=r$ とする．基本変形を繰り返すことにより，簡略行列まで変形されるとする（実際は必ずしも番号順に並ばないが，議論を簡単にするのためにこのような仮定をおく)：

$$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\longrightarrow E(n,r)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \dots & \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{b}_{n-r}\end{pmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(1 \leqq k \leqq n-r)$ とおく．今

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad E(n,r)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$E(n,r)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を連立一次方程式として書き直すと，

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{i=1}^{n-r} b_{1i} x_{r+i} = 0 \\ x_2 + \sum_{i=1}^{n-r} b_{2i} x_{r+i} = 0 \\ \vdots \\ x_r + \sum_{i=1}^{n-r} b_{ri} x_{r+i} = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -x_{r+1}\boldsymbol{b}_1^* - x_{r+2}\boldsymbol{b}_2^* - \cdots - x_n \boldsymbol{b}_{n-r}^* \in \left\langle \boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^* \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

ここに，

$$\boldsymbol{b}_1^* = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2^* = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_k^* = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{b}_{n-r}^* = \begin{pmatrix} b_{1r} \\ b_{2r} \\ \vdots \\ b_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

今，rank $\left(\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^*\right) = n - r$ なので $\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^*$ は 1 次独立である．また，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}(f)$ が $\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^*$ の 1 次結合で表されるから，$\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^*$ は $\mathbf{Ker}(f)$ の基底である．こうして，

$$\mathbf{Ker}(f) = \left\langle \boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_2^*, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-r}^* \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \therefore \dim \mathbf{Ker}(f) = n - r = n - \text{rank } A$$

この事から $\mathbf{Ker}(f)$ の（1つの）基底と次元がわかる．

次に，$\mathbf{Im}(f)$ の基底と次元について考えよう．

基本変形により

$$A \cdots \longrightarrow \cdots E(n, r) = \begin{pmatrix} \ldots & \boldsymbol{e}_{i_1} & \ldots & \boldsymbol{e}_{i_2} & \ldots & \boldsymbol{e}_{i_r} & \ldots \end{pmatrix}$$

を得る．$\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_r}$ に対応する $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ の列ベクトルを $\left\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\right\}$ とする（行変形なので並びの順は変わらない）．このとき，$k \neq i_1, \ldots, i_r$ に対し，$P(\boldsymbol{a}_k)$ は $\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_r}$ の 1 次結合で表される．故に，$\boldsymbol{a}_k$ は $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ の 1 次結合で表される．即ち，$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ は $\mathbf{Im}(f)$ の基底である．こうして

$$\mathbf{Im}(f) = \left\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \therefore \quad \dim \mathbf{Im}(f) = \text{rank } A = r$$

以上より，

定理 7.2. 線型写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad ; \quad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に於いて，

(1) $\dim \mathbf{Ker}(f) = n - \text{rank } A$

(2) $\dim \mathbf{Im}(f) = \text{rank } A$

(3) $\dim \mathbf{Ker}(f) + \dim \mathbf{Im}(f) = n$

8　固有値と固有ベクトル

8.1　行列の対角化（イントロ）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \text{ を } n \text{ 次正方行列とする．}$$

今，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$（または $\mathbb{R}$）に対してそれぞれ，**零ベクトルでない**ベクトル

$$\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_1, \mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_2, \cdots, \mathbf{0} \neq \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$$

が存在して

$$(8.1.1) \qquad \begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \\ A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A\boldsymbol{x}_n = \lambda_n \boldsymbol{x}_n \end{cases}$$

が成り立つとする．このとき，

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) &= (A\boldsymbol{x}_1, A\boldsymbol{x}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \lambda_2\boldsymbol{x}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Q = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ とおくと，Q は n 次正方行列であり，

$$AQ = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得る．

もし，$|Q| \neq 0$ ならば，逆行列 Q^{-1} が存在して

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得る．これを，行列 A の**対角化**という．一般には，$|Q| \neq 0$ とは限らない．

$$|Q| \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rank}\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = n$$

8.2 行列の固有値と固有ベクトル

A を n 次正方行列とする．零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ およびスカラー $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

をみたすとき，λ を A の**固有値**という，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\lambda)$ を λ に対する**固有ベクトル**という．（実際，λ が決まれば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\lambda)$ が決まる）

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{x} \neq 0$ より，$|A - \lambda E| = \det(A - \lambda E) = 0$ を得る. 何故なら，$|A - \lambda E| \neq 0$ ならば，逆行列 $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に反する．故に，$|A - \lambda E| = 0$ でなければならない. 一方,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

は行列式を展開することにより，

$$\lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A| = 0 \quad \cdots \quad (8.2.1)$$

を得る．但し, $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$（$A$ のトレースという）.

定義 8.1. n 次方程式 (8.2.1) を行列 A の<u>固有方程式（特性方程式）</u>という.

定理 8.1. 固有方程式 (8.2.1) は複素数の範囲で重解も含め n 個の解を持つ．それらを，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とおくと，解と係数の関係から，

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n &= (-1)^n |A| \end{aligned}$$

を得る.

注意 8.1. ▶ $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ から

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

を得る.

▶ $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ から

$$\therefore \quad \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

を得る.

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda + (\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33})\,\lambda - |A| = 0$$

ここに，Δ_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ は A から i 行 i 列を除いた残りの 2 次行列式.

例題 8.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ の固有方程式と固有値を求め，対角化可能なら対角化せよ..

解.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= 6 + 2 - 6 = 2 \\ \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 3 = -9 \\ \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -36 + 35 = -1 \\ \Delta_{33} &= \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9 \\ |A| &= -72 - 21 - 15 + 70 + 18 + 18 = -2 \end{aligned}$$

よって固有方程式は

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + (-9 - 1 + 9)\lambda + 2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

よって固有値は $\lambda = -1,\ 1,\ 2.$

次に，$\lambda = -1, 1, 2$ に対する固有ベクトルを求める．$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ かつ $|A - \lambda E| = 0$ より，$\mathrm{rank}\ (A - \lambda E) < 3$ であることに注意.

► $\lambda = -1 \Longrightarrow (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 7 & -3 & -7 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \therefore\ x_1 = x_3,\ x_2 = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x}(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► $\lambda = 1 \longrightarrow (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -7 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad x_1 = 2x_3,\ x_2 = x_3$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► $\lambda = 2 \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -7 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$

$$\therefore \quad (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \quad x_1 = x_3,\ x_2 = -x_3$$

こうして

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{x}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

今，$|Q| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}(-1) & \boldsymbol{x}(1) & \boldsymbol{x}(2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ よって，Q^{-1} が存在し，

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.3 固有空間

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とし，

$$V(\lambda) := \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Big\} = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Big\}$$

とおく．明らかに $\boldsymbol{0} \in V(\lambda)$ であり，$|A - \lambda E| \neq 0$ ゆえ，

$$\text{rank } (A - \lambda E) < n.$$

注意 8.2. (1) 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ は固有ベクトルではないが，固有空間の元ではある．このように $\boldsymbol{0}$ ベクトルが加わることで $V(\lambda)$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間になる．

(2) 正方行列 A の各成分は実数であっても固有値は虚数になり得る．結果，固有ベクトルも複素ベクトルになる．こうして，$A - \lambda E$ は複素行列（複素数を成分にもつ行列）になる．また，固有空間 $V(\lambda)$ は複素数空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間と見る．即ち，

$$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} \in V$$

が成り立つ．そこで，$\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}$ が $\mathbb{C}$ 上 1 次独立を

$$\alpha\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

と定義する．一方，複素行列の基本変形に於いては定数倍を複素数倍と考える．これを $\mathbb{C}$ 上の基本変形という．

例. $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立である．しかし，$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ より，C 上は 1 次独立でない．即ち，

$$\dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = 2, \quad \dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} = 1$$

例えば,

$$\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}\text{ 上の基本変形}} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ とは出来ないが,}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{C}\text{ 上の基本変形}} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ と出来る}$$

このように,固有値が実数か虚数かで固有空間も $\mathbb{R}^n$ の部分空間と見るか $\mathbb{C}^n$ の部分空間と見るかに分かれる点に留意しつつ基本変形を行う必要がある.

そこで,$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とおく.基本変形によって行列 $(A - \lambda E)$ の簡約化:

$$(A - \lambda E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B(\lambda) = (\boldsymbol{v}_1^{(\lambda)}, \boldsymbol{v}_2^{(\lambda)}, \cdots, \boldsymbol{v}_n^{(\lambda)})$$

を行う.そのとき,

$$V(\lambda) := \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\Big\} = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid B(\lambda)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\Big\}$$

は $\mathbb{K}^n$ の部分空間である.この $V(\lambda)$ を A の固有値 λ に対する**固有空間**という.定理 7.2 より

定理 8.2. $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間として,

$$d(\lambda) := \dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}\ (A - \lambda E).$$

補題 8.1. $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{\boldsymbol{0}\}\ \ (\lambda \neq \mu)$.

証明. $\boldsymbol{x} \in V(\lambda) \cap V(\mu)$ とすると,$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$. よって,

$$(\lambda - \mu)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

$\lambda \neq \mu$ より,$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. □

補題 8.2. $V(\lambda) = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r\rangle_{\mathbb{K}}$. 但し,$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は $V(\lambda)$ の基底.そのとき,

$$A\Big(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_r\Big) = \Big(\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{x}_r\Big)\, E_r(\lambda).$$

但し,$E_r(\lambda)$ は次の形の r 次正方行列

$$E_r(\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} = \lambda\, E_r$$

証明.

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_r\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \dots & A\boldsymbol{x}_r\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{x}_1 & \lambda\boldsymbol{x}_2 & \dots & \lambda\boldsymbol{x}_r\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_r\end{pmatrix}E_r(\lambda)\end{aligned}$$

補題 8.3. $V(\lambda) = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r \rangle$, $V(\mu) = \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_s \rangle$ ならば,

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r,\ \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_s\}$$

は一次独立である.

証明. $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{x}_i + \sum\limits_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$. とする. $a_i = b_j = 0\ (1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq s)$ を示せば良い. 両辺に A を掛けて,

$$\sum_{i=1}^{r} A(a_i\boldsymbol{x}_i) + \sum_{j=1}^{s} A(b_j\boldsymbol{y}_j) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda a_i\boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{s} \mu b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$$

一方, $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{x}_i + \sum\limits_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$ より両辺に λ を掛けて

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda a_i\boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{s} \lambda b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}.$$

$$\therefore \quad (\lambda - \mu)\sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$$

$\lambda \neq \mu$ なので $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$. 一次独立性から, $b_j = 0\ (1 \leqq j \leqq s)$. よって,

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

を得る. $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立性から

$$a_i = 0\ (1 \leqq i \leqq r).$$

故に $a_i = b_j = 0\ (1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq s)$. $\square$

補題 8.4. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ を正方行列 A の相異なる固有値とし，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ をそれぞれ固有値 λ_i $(1 \leqq i \leqq m)$ に対する固有ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は 1 次独立である．

証明. $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ の中で 1 次独立なベクトルの最大数を r とし，番号をつけ直して，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ を 1 次独立とする．そのとき $r = m$ を示せばよい．実際，$r < m$ ならば，r の最大性から，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_k$ $(k > r)$ は 1 次独立でない（1 次従属）．よって，

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{x}_r + c_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

を満たす $c_1, \ldots, c_r, c_k$ で $(c_1, \ldots, c_r, c_k) \neq (0, 0 \ldots, 0)$ なるものがのが存在する．今，$c_k = 0$ ならば，$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の 1 次独立性から，$c_1 = \ldots = c_r = 0$. こうして，$(c_1, \ldots, c_r, c_k) = (0, 0 \ldots, 0)$. これは矛盾．こうして，$c_k \neq 0$. こうして，$r < k \leqq m$ に対し，

$$\boldsymbol{x}_k = -\frac{c_1}{c_k}\boldsymbol{x}_1 - \cdots - \frac{c_r}{c_k}\boldsymbol{x}_r \quad \cdots \quad (8.4.1)$$

今，$A\boldsymbol{x}_k = -\dfrac{c_1}{c_k}A\boldsymbol{x}_1 - \cdots - A\dfrac{c_r}{c_k}\boldsymbol{x}_r$ より

$$\therefore \quad \lambda_k\boldsymbol{x}_k = -\lambda_1\frac{c_1}{c_k}\boldsymbol{x}_1 - \cdots - \lambda_r\frac{c_r}{c_k}\boldsymbol{x}_r \quad \cdots \quad (8.4.2)$$

(8.4.1) の両辺に $-\lambda_k$ を掛けて，(8.4.2) に辺々加えれば

$$(\lambda_k - \lambda_1)\frac{c_1}{c_k}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_r)\frac{c_r}{c_k}\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

を得る．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ の 1 次独立性から

$$(\lambda_k - \lambda_1)\frac{c_1}{c_k} = (\lambda_k - \lambda_2)\frac{c_2}{c_k} = \ldots = (\lambda_k - \lambda_r)\frac{c_r}{c_k} = 0$$

が従う．ここで，固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ は相異なることから $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq r)$ である．こうして，

$$\frac{c_1}{c_k} = \frac{c_2}{c_k} = \ldots = \frac{c_r}{c_k} = 0 \quad \therefore \quad c_1 = \ldots = c_r = 0$$

そのとき，(8.4.1) より $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ となり，固有ベクトルは零ベクトルでないことに反する．以上で $r = m$ を得る． □

次に，固有方程式 $\lambda^n - \mathrm{tr}A\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A| = 0$ の解について，**代数学の基本定理**から複素数の範囲で重複も許して n 個の解を持つことが知られている．そこで，固有方程式の相異なる解を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ とすると，因数定理から

$$\lambda^n - \mathrm{tr}A\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A| = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_k}$$

と因数分解できる．このとき，各 n_j $(1 \leqq j \leqq k)$ を固有値 λ_j の**重複度**という．即ち，$\underline{\lambda = \lambda_j \text{ は固有方程式の } n_j \text{ 重解（重根）}}$ということである．特に，

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

そこで, 各相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ に対する固有空間を $V(\lambda_1), V(\lambda_2), \ldots, V(\lambda_k)$ とし，$V(\lambda_j)$ の次元 $\dim V(\lambda_j) = d_j$ とおき，その基底を

$$\left\{ \boldsymbol{v}_1^{(\lambda_j)}, \boldsymbol{v}_2^{(\lambda_j)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_j}^{(\lambda_j)} \right\}$$

とおく．

演習問題 8.1. 以下の $d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ 個のベクトル達

$$\left\{ \underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(\lambda_1)}, \boldsymbol{v}_2^{(\lambda_1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_1}^{(\lambda_1)}}_{d_1}, \underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(\lambda_2)}, \boldsymbol{v}_2^{(\lambda_2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_2}^{(\lambda_2)}}_{d_2}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{v}_1^{(\lambda_k)}, \boldsymbol{v}_2^{(\lambda_k)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_k}^{(\lambda_k)}}_{d_k} \right\}$$

は 1 次独立.

命題 8.1. $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n$ ならば A は対角化可能であり，逆も正しい.

証明. 上記の記号のもと，$n \times d_j$ 行列

$$P_j := P(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^{(\lambda_j)} & \boldsymbol{v}_2^{(\lambda_j)} & \ldots & \boldsymbol{v}_{d_j}^{(\lambda_j)} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$AP_j = AP(\lambda_j) = P(\lambda_j) E_{k_j}(\lambda_j) = P_j E_{d_j}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad A \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \ldots & AP_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 E_{d_1} & P_2 E_{d_2} & \ldots & P_k E_{d_k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r_2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E_{r_k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．但し，E_{d_j} は次の形の d_j 次対角行列で対角成分に λ_j が d_j 個並ぶ.

$$E_{d_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

である．

$$E(\lambda_1,\dots,\lambda_k)=\begin{pmatrix} E_{d_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & E_{d_2} & 0 & 0\\ \dots & \ddots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & E_{d_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$$

とおく．今

$$d_1+d_2+\cdots+d_k=n$$

ならば，$P=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & \dots & P_k\end{pmatrix}$ は n 次正方行列で P の n 個の列ベクトルは 1 次独立なので $|P|\neq 0)$，即ち，P は正則行列で

$$AP=PE(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$$

となり，

$$P^{-1}AP=E(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$$

即ち，行列 A は対角化可能である．

逆に，A は対角化可能とする．今，A は重複も許して n 個の固有値 $\lambda_1,\dots,\dots,\lambda_k$ をもつ，それぞれの重複度を $n_1,n_2,\dots,n_k$ とする，即ち，

$$\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{n_1}\quad\underbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_1}_{n_2}\quad\dots\dots,\underbrace{\lambda_k,\dots,\lambda_k}_{n_k}$$

とする．そのとき，正則行列 P があって，$P^{-1}AP=\widehat{E}(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ を得る．そこで n_j 次正方行列

$$E_{n_j}=\begin{pmatrix}\lambda_j & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_j & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j\end{pmatrix}$$

とおき，

$$
\widehat{E}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & E_{n_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}
$$

は n 次正方行列で対角線上に λ_1 が n_1 個，λ_2 が n_2 個，. .，λ_k が n_k 個並ぶ．

定理 8.2 より，

$$
\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}\ (A - \lambda_i E) = n - \mathrm{rank}\ (\lambda_i E - A)
$$

一方，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rank}\ (\lambda_i E - A) &= \mathrm{rank}\ \left(P^{-1}(\lambda_i E - A)P\right) = \mathrm{rank}\ \left(P^{-1}\lambda_i EP - P^{-1}AP\right) \\
&= \mathrm{rank}\ \left(\lambda_i E - \widehat{E}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\right) \\
&= \mathrm{rank}\ \widehat{E}\left(\overbrace{\lambda_i - \lambda_1}^{n_1}, \overbrace{\lambda_i - \lambda_2}^{n_2}, \ldots, \overbrace{\ 0\ }^{n_i}, \overbrace{\lambda_i - \lambda_{i+1}}^{n_{i+1}}, \ldots, \overbrace{\lambda_i - \lambda_k}^{n_k}\right) \\
&= n_1 + \cdots + n_{i-1} + n_{i+1} + \cdots + n_k \\
&= n - n_i
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad d_i = \dim V(\lambda_i) = n_i
$$

よって，$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ を得る． □

命題 8.2. 実対称行列（$A = {}^tA$）の固有値は実数である．

証明. $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq 0$) とする．複素ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ の内積は

$$
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle = {}^t\boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{w}_i
$$

で定義されるので，$\overline{A} = A$, ${}^tA = A$ に注意すれば

$$
\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = {}^t(A\boldsymbol{x}) \cdot \overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \left({}^tA \cdot \overline{\boldsymbol{x}}\right) = \left\langle \boldsymbol{x}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{x}) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{x} \right\rangle = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle
$$

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を上式に代入して

$$
\langle \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x} \rangle ,
$$

ここで，$\|\boldsymbol{x}\|^2 = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}$ より，

$$\lambda\, {}^t\boldsymbol{x} \cdot \overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x} \cdot \overline{\lambda \boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\, {}^t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2 = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \quad \therefore \quad (\lambda - \overline{\lambda})\|\boldsymbol{x}\|^2 = 0$$

$\boldsymbol{x} \neq 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$. こうして λ は実数である. □

命題 8.3. Aを実対称行列とし, 異なるAの固有値λ, μに対する固有空間を$V(\lambda)$, $V(\mu)$ とする．固有ベクトル $\boldsymbol{x} \in V(\lambda)$, $\boldsymbol{y} \in V(\mu)$ に対し，内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ である．

証明. $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle$ より，$\langle \lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y} \rangle$ $\therefore$ $(\lambda - \mu)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. $\lambda \neq \mu$ より $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$. □

9 正規直交基底

9.1 ベクトルの直交性の復習

二つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ の 内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle &= {}^t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \end{aligned}$$

にて定義した．また，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2} \geq 0$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ の**大きさ**（または**ノルム**）と呼んだ．容易に

$$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \quad \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \quad (\text{i.e. } a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0).$$

内積に関しては

$$\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rangle, \quad \langle \lambda\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b} \rangle = \lambda\mu \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$$

より，ベクトルの 1 次結合どうしの内積は以下のようになる．

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \boldsymbol{b}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle$$

定義 9.1. 2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**直交**する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$ と定義する．

注意 9.1. 2次元，3次元の場合は，幾何学的な意味での直交性そのものであることが分かる（ベクトルのなす角が $\dfrac{\pi}{2}$ ！）

定義 9.2. n 個のベクトルの系 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**直交系**とは

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \ \ (1 \leq i \neq j \ \leq n)$$

のときをいう．さらに，$\|\boldsymbol{a}_1\| = \|\boldsymbol{a}_2\| = \ldots = \|\boldsymbol{a}_n\| = 1$ ならば**正規直交系**という．

定理 9.1. n 個のベクトルの系 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が直交系ならば，それらは1次独立である．

証明. $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \, \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{a}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ との内積とる．$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0$, $(i \neq j)$ を考慮すれば

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = c_j \|\boldsymbol{a}_j\| = c_j = 0$$

を得る． $\therefore \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n$. こうして，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は1次独立である．

9.2 直交行列

定義 9.3. 実n次正方行列 $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ (列ベクトル表示) は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が**正規直交系**であるとき，**直交行列**と呼ばれる．

定理 9.2. $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ が直交行列 $\overset{\text{必要・十分}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ が全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ について成り立つ．

証明. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ と置くと，

$$P\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i, \ P\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_i \boldsymbol{a}_j$$

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

より,

$$\begin{aligned}
\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y}\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{n} y_i \boldsymbol{a}_j \right\rangle \\
&= \sum_{1\leq i,\, j\leq n} x_i y_j \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i\rangle + \sum_{i\neq j} x_i y_j \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle
\end{aligned}$$

□

命題 9.1. $\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}\rangle$, 但し, ${}^tA$ は A の転置行列.

証明. $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, ${}^tA = B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ とおくと $b_{ij} = a_{ji}$ であった.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \quad 1 \leqq i, j \leqq n$$ と

おく.

$$\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{y} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j.$$

一方,

$$\begin{aligned}
\left\langle \boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}\right\rangle &= \langle \boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{b}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} y_j x_i a_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j
\end{aligned}$$

よって,

$$\left\langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}\right\rangle.$$

□

演習問題 9.1. n 次正方行列 A および単位基本列ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し，$\langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle$, $(1 \leq i, j \leq n)$ ならば，$A = E$（単位行列）である事を示せ．特に，直交行列 P について，${}^tP \cdot P = E$ が成り立つことを示せ．

解. $a_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$ より $A = (a_{ij}) = (\delta_{ij}) = E.$

即ち，

$$(*) \cdots \langle \boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle \Longrightarrow A = E$$

次に，P は直交行列だから $\langle P\boldsymbol{e}_i, P\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle$ 一方，

$$\langle P\boldsymbol{e}_i, P\boldsymbol{e}_j\rangle = \left\langle \boldsymbol{e}_i, {}^tPP\boldsymbol{e}_j\right\rangle \quad \therefore \quad \left\langle \boldsymbol{e}_i, {}^tPP\boldsymbol{e}_j\right\rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\rangle$$

$(*)$ から ${}^tP\,P = E.$ □

9.3 Gram-Schmidt の直交化のアルゴリズム

Gram-Schmidt の直交化法とは n 個の 1 次独立な基底から 正規直交基底を作るアルゴリズムを与えるものである．まず，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ を一つの基底とする．この時

1: $\boldsymbol{u}_1 := \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$

2: $\boldsymbol{u}_2 := \dfrac{\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1\rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_2}{\|\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1\rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_2\|}$

3: $\boldsymbol{u}_3 := \dfrac{\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2\rangle \boldsymbol{u}_2 + \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1\rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_3}{\|\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2\rangle \boldsymbol{u}_2 + \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1\rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_3\|}$

$\vdots$

r: $\boldsymbol{u}_r := \dfrac{\langle \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{u}_{r-1}\rangle \boldsymbol{u}_{r-1} + \langle \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{u}_{r-2}\rangle \boldsymbol{u}_{r-2} + \cdots - \boldsymbol{a}_r}{\|\langle \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{u}_{r-1}\rangle \boldsymbol{u}_{r-1} + \langle \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{u}_{r-1}\rangle \boldsymbol{u}_{r-2} + \cdots - \boldsymbol{a}_r\|}$

この時，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は正規直交基底であり，

$$< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n >_{\mathbb{R}} = < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n >_{\mathbb{R}}$$

が成立する．

例題 9.1. $\left\{ \boldsymbol{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を正規直交化せよ．

$(\because)$ Gram-Schmidt のアルゴリズムより $||\boldsymbol{a}_1|| = \sqrt{2}$，$\therefore\ \boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

次に，$\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{||\langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_2||}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

最後に，$\langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle \boldsymbol{u}_2 + \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_3 = \dfrac{5}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ より，

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{||(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{a}_3||}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

以上より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

演習問題 9.2. 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 λ は実数でない，しかも固有ベクトルも複素ベクトルである（実ベクトルでない）.

実際， 固有方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ より，$\lambda = 1 + i,\ 1 - i$. 実固有空間

$$W_{\mathbb{R}}(1 + i; A) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid A\boldsymbol{x} = (1 + i)\boldsymbol{x}\right\} = \boldsymbol{0}$$

即ち，$A\boldsymbol{x} = (1 + i)\boldsymbol{x}$ を満たす実ベクトルは $\boldsymbol{0}$ しかないのである．しかし，

$$W_{\mathbb{C}}(1 + i) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \mid A\boldsymbol{x} = (1 + i)\boldsymbol{x}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \neq \boldsymbol{0}$$

同様に.

$$W_{\mathbb{C}}(1 - i) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \mid A\boldsymbol{x} = (1 - i)\boldsymbol{x}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \neq \boldsymbol{0}$$

こうして，固有空間は**複素ベクトル空間**となる．対角化する行列は複素行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

で，対角化

$$P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

を得る．

演習問題 9.3. 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の<u>対角化</u>と <u>上三角化</u>について調べよ．

固有方程式は $(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ より，固有値は $\lambda = 1,\ -1$. 固有空間はそれぞれ，

$$W(1;A) = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}},\ W(-1;A) = < \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$$

従って，$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる，ところが，P は<u>直交行列でない</u>．そこで，Schmidt の直交化法で基底

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

を正規直交基底に取り替える．こうして得られた正規直交基底は次の通り：

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

そこで，$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ とおくと，Q は直交行列であり，

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -4\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

（上三角行列）を得る．これを，直交行列による**上三角化**という．

定理 9.3 (照明略). 実正方行列の固有値が全て実数ならば直交行列によって上三角化できる．

9.4 直交行列による対角化

定理 9.4. n 次の実対称行列 A は直交行列 P によって対角化できる．

証明. 数学的帰納法によって示す．

(I): $n = 1$ の時は A 自身が対角行列であるから自明．

(II): $n-1$ 次までの実対称行列について定理の主張は正しいと仮定する．

n の場合について，λ_1 を A の固有値とし，$\boldsymbol{x}_1$ を λ_1 に対する固有ベクトルとする．A は実対称行列だから λ_1 は実数である．

$$\boldsymbol{q}_1 := \frac{\boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1||}$$

と置くと，$A\boldsymbol{q}_1 = \lambda_1\boldsymbol{q}_1$ かつ $||\boldsymbol{q}_1|| = 1$. $\boldsymbol{q}_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の一組の基底

$$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

をとる．これは可能である．実際，1 次元部分空間 $W =< \boldsymbol{q}_1 >$ の直交補空間

$$W^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}_1) = 0\}$$

は $n-1$ 次元部分空間だから，W^* の基底を適当に選べばよい．Gram-Schmidt の直交化法でこれらを正規直交化する，これを，$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ とすると，これらは $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底だから，n 次正方行列

$$Q := (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n)$$

は直交行列である．即ち，

$$Q \cdot {}^t Q = {}^t Q \cdot Q = E$$

が成立する．従って，

$$\underline{{}^tQ = Q^{-1}} \cdots\cdots\cdots (10.2.1)$$

を得る．

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= Q^{-1}A(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n) \\ &= Q^{-1}(\underline{A\boldsymbol{q}_1}, A\boldsymbol{q}_2, \ldots, A\boldsymbol{q}_n) \\ &= Q^{-1}(\underline{\lambda_1\boldsymbol{q}_1}, A\boldsymbol{q}_2, \ldots, A\boldsymbol{q}_n) \\ &= (\lambda_1 Q^{-1}\boldsymbol{q}_1, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_2, \ldots, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \end{aligned}$$

$Q\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{q}_1$ より，$Q^{-1}\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{e}_1$．よって，

$$\begin{aligned} Q^{-1} \cdot A \cdot Q &= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_2, \ldots, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ : & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdots\cdots (10.2.2) \end{aligned}$$

の形に書ける．今，

$$\begin{aligned} {}^t(Q^{-1} \cdot A \cdot Q) &= {}^tQ \cdot {}^t A \cdot {}^t(Q^{-1}) \\ &= Q^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^t({}^tQ) \quad (\because) \quad Q^{-1} = {}^tQ \quad \text{by (10.2.1)} \\ &= Q^{-1} \cdot A \cdot Q \end{aligned}$$

従って，$Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ は対称行列である．

よって (10.2.2) より，B は $n-1$ 次の対称行列で

$$\begin{aligned} Q^{-1} \cdot A \cdot Q &= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_2, \ldots, Q^{-1}A\boldsymbol{q}_n) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ : & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdots\cdots (**) \end{aligned}$$

を得る．数学的帰納法の仮定より B は $n-1$ 次の直交行列 R を用いて対角化される，　即ち，

$$R^{-1} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そこで,

$$P := Q\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とおくと,

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1} \cdot Q^{-1} \quad = \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1} \cdot Q^{-1}$$

$$\begin{aligned}
P^{-1} \cdot A \cdot P \quad &= \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \underbrace{Q^{-1} \cdot A \cdot Q} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}BR & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \quad \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{array}\right)
\end{aligned}$$

以上で証明終わる. $\square$