文系学生のための線形代数入門

古島幹雄 [*]　　大嶋康裕 [†]　　石田明男 [‡]

令和元年

目 次

[*]熊本大学　数理科学総合教育センター (wagami@kumamoto-u.ac.jp)
[†]崇城大学
[‡]熊本高等専門学校

本講義ノートは令和元年度の熊本学園大学での講義内容をまとめたものである．

1　はじめに

この講義ノートは高校 2 年次までの数学の知識の一部を仮定しているが，なるべく無理なく理解できるよう解説している．同じような内容を何度も繰り返し説明しているので文字や記号や数式にも自然に慣れてくると思う．初学者は理論より計算によって正しい答えを導き出すことが大事である．問題が解けるようになったら原理的な事も学習してほしい．本ノートでは 2×2-行列および 3×3-行列について解説しているが，考え方は，一般の行列についても基本的には同じである．本ノートを授業のサブテキストとして活用していただければ幸いである．

2　一次方程式 $ax=b$ の解

$$\begin{cases} a\neq 0 \Longrightarrow x=\dfrac{b}{a} \longrightarrow \text{一意解（解は唯一つ）} \\ \\ a=0 \Longrightarrow \begin{cases} b=0 \longrightarrow \text{不定解（解は唯一つでない）} \\ \\ b\neq 0 \longrightarrow \text{不能解（解はなし）} \end{cases} \end{cases}$$

実際は，$a\neq 0$ の場合以外は意味がない．

3　連立二元一次方程式の解法（消去法）

$$(*)\ \begin{cases} {\color{red}a}x+{\color{blue}b}y=p \ \cdots\ (1) \\ {\color{blue}c}x+{\color{red}d}y=q \ \cdots\ (2) \end{cases}$$

$(1)\times d-(2)\times b$ および $(2)\times a-(1)\times c$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} ({\color{red}a}{\color{red}d}-{\color{blue}b}{\color{blue}c})x &= {\color{red}d}p-{\color{blue}b}q \ \cdots\ (3) \\ ({\color{red}a}{\color{red}d}-{\color{blue}b}{\color{blue}c})y &= -{\color{blue}c}p+{\color{red}a}q \ \cdots\ (4) \end{aligned}$$

よって，$\Delta := ad-bc\neq 0$ ならば，連立一次方程式 $(*)$ の解は

公式 1.

$$(\spadesuit)\quad \begin{cases} x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} = \dfrac{pd - qb}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{-cp + aq}{ad - bc} = \dfrac{aq - cp}{\Delta} \end{cases}$$

問題 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

(解)

$a = 2,\ b = 3\ c = 3,\ d = -5\ ; p = 7,\ q = 1$ を公式に代入

$$\begin{cases} x = \dfrac{(-5) \times 7 - 3 \times 1}{2 \times (-5) - 3 \times 3} = \dfrac{-38}{-19} = 2 \\ y = \dfrac{-3 \times 7 + 2 \times 1}{2 \times (-5) - 3 \times 3} = \dfrac{-19}{-19} = 1 \end{cases}$$

4　連立一次方程式の行列表示

連立一次方程式 $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表記される.

例題 1.　(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$

5　$2 \times 2-$ 行列式

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$\Delta := |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \times d - c \times b = ad - bc$$

を行列 A の行列式という.

例題 2. (1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 4 \times 3 = 14 - 12 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (-3) \times (-7) - 5 \times 2 = 21 - 10 = 11$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 3 \times 15 - 6 \times 10 = 45 - 60 = -15$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

(6) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times (-1) = 5$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) = 3$

(8) $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$

(9) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x & 1 \end{vmatrix} = x - x(x+1) = -x^2$

6 クラメールの公式

行列式の定義から

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - qb, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - cp$$

を得る．このことと，公式 1 (♠) から，次を得る．

定理 6.1 (クラメールの公式)**.**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

即ち，連立２元１次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

の解 (x, y) は行列式 $|A| = ad - bc \neq 0$ ならば,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{pd - qb}{ad - bc} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{aq - cp}{ad - bc} \end{aligned}$$

である.

問題 2. (1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

(2) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-19}{7},\ y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-17}{7}$$

(3) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ $\quad \therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3},\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{11}{3}$

7　（２次の）行列式の性質

2×2-行列式または 2 次の行列式は次で定義された．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

例題 3.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2a = b \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これは，$ab \neq 0$ ならば 1 行ベクトル $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ と 2 行ベクトル $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ は平行であることを示している．

例題 4. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおく．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad \therefore \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = c$$

$$\therefore \quad \begin{cases} a_{12} = ca_{11} \\ a_{22} = ca_{21} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} \\ ca_{21} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = c \cdot \boldsymbol{a}_1$$

2 行ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ は 1 行ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の k 倍である，即ち，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は平行である．

定理 7.1.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}_2 = c \cdot \boldsymbol{a}_1 \Longrightarrow \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & c \cdot \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = 0$$

次も容易に確かめることができる．

公式 2. (1) $\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

(3) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} \\ a_{21}+q & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11}+p)a_{22} - (a_{21}+q)a_{12} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (pa_{22} - qa_{12}) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} \\ a_{21}+q & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & a_{12} \\ q & a_{22} \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+p \\ a_{21} & a_{22}+q \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+q) - a_{21}(a_{12}+p)$$
$$= a_{11}a_{22} + qa_{11} - a_{21}a_{12} - pa_{21}$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (qa_{11} - pa_{21})$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+p \\ a_{21} & a_{22}+q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & p \\ a_{21} & q \end{vmatrix}$$

(5) $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

公式 3. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$
とおくと，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + c\cdot\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 + c\cdot\boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & c\cdot\boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} + c\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$$

8 連立二元一次方程式の行列表示

$$(7.1) \quad \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

これは，$ax = b$ と同じ形である．

一方，(7.1) は

$$(7.2)\quad x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

と表わすことができる．

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$(7.3)\quad x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

とも表わすことが出来る．(7.3) を，連立一次方程式のベクトル表示という．

9 行列の特別な場合としてのベクトル

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$： 1×2-行列または 2 次の行ベクトル

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$： 2×1-行列 または 2 次の列ベクトル

(3) n 次の行ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ を$\underline{1 \times n\text{-行列}}$とみなす．

4) n 次の列ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$ を$\underline{n \times 1\text{-行列}}$とみなす．

10 行列の和，差および定数倍（スカラー積）

$$(1.1)\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}, \quad (1.2)\quad k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$(2.1)\quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}, \quad (2.2)\quad k\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kc \end{pmatrix}$$

$$(3.1)\quad \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \end{pmatrix}, \quad (3.2)\quad k\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \end{pmatrix}$$

例題 5. (1)

$$\begin{aligned} 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}$

(3) $2\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \end{pmatrix}$

問題 3.

$$3\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

ならば，$a = 2, b = 4$ を示せ．

11 行列のベクトル表示

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}$$

と表される．これを，それぞれ行列 A の列ベクトル表示 および行ベクトル表示という．

例題 6. (1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．そのとき，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおく．そのとき，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

例題 7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ のとき,

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$$

12　ベクトルの内積と行列の積

ベクトルの内積を定義しよう．まず，列ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を $n \times 1$-行列とみなし，$\boldsymbol{a}$ の転置行列 ${}^t\boldsymbol{a}$ を

$${}^t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

で定義する.

このとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >$ を

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = {}^t\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

で定義する.

注意 1. 標語的には

$$\boxed{\text{内積＝（行ベクトル）・（列ベクトル）}}$$

次に行列の積を定義しよう.

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対し,

その積 AB は A の行ベクトルと B の列ベクトルの内積を成分に持つ行列である.

そこで，以下のように，A の行ベクトル成分と B の列ベクトル成分を取り出す.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$$

定義 12.1.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{a}_1 \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と定義する.

注意 2. 行列 A, B に対し，その積 $A \cdot B$ は A の列の数 $=$ B の行の数のときに定義できる.

(1) $A \cdot B$ の行の数は A の行の数と同じであり，

(2) $A \cdot B$ の列の数は B の列の数と同じである.

即ち，A が $m \times \ell$-行列とし，B が $k \times n$-行列とする．積 $A \cdot B$ は $\ell = k$ のときのみ定義され，積 AB は $m \times n$-行列である．標語的には

$$AB = (m \times \ell) \cdot (\ell \times n) = (m \times n)$$

注意 3. n 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ を n 次元行ベクトル（$1 \times n$-行列）で表し，$\boldsymbol{v}$ を n 次元列ベクトル（$n \times 1$-行列）で表したときの行列としての積で定義する．$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ は $(1 \times n) \cdot (n \times 1) = 1 \times 1$-行列（即ち，スカラー）となる．そこで，

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

と表し

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$$

と定義するのである．内積はスカラーであることに注意せよ．

注意 4. $A\cdot B$ が定義できても $B\cdot A$ が定義できるとは限らない．

実際 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}$ は定義できないが，$\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\21\end{pmatrix}$ は定義できる．

行列の積 AB の (i,j) 成分は A の i 行ベクトルと B の j 列ベクトルの内積である．

例題 8.

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

故に，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases}ax+by=p\\cx+dy=q\end{cases}$$

を得る．

問題 4. (1) $\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=2\times(-3)+3\times7=15$

(2) $\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\times2&-3\times3\\7\times2&7\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-9\\14&21\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+3\times2&2\times3+3\times6\\-1\times1+2\times2&-1\times3+2\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&24\\3&9\end{pmatrix}$

問題 5. (1) $\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5\\14&10\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ：（単位行列）

(3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ：（零行列）

13 逆行列

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆行列とよび，$X = A^{-1}$ とかく．故に

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

注意 5. 行列 A の逆行列 A^{-1} は常に存在するとは限らない．存在するための必要十分条件は行列式 $|A| \neq 0$ である．

$(*)$ は連立 1 次方程式で表すと

$$(**) \quad \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1 \cdots (1) \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0 \cdots (2) \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \cdots (3) \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1 \cdots (4) \end{cases}$$

ここで，$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ は未知数である．

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ のとき，(1), (3) より, また，(2), (4) より，連立 1 次方程式 $(*)$ をクラメールの公式を用いて解くと

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

ここで，

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

は A の行列式である．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をベクトルを用いて表示する．まず，この場合，行列は<u>列ベクトル表示</u>で考える．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}$$

とおく．

$$AX = E \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 \\ A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2 \end{cases}$$

クラメールの公式から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{|A|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{|A|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{|A|} & \dfrac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}}{|A|} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} {}^*\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix}}{|A|} & \dfrac{\begin{vmatrix} {}^*\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}}{|A|} \end{pmatrix}$$

問題 6 (逆行列). (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{5} \\ -\dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \because \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{2} & \dfrac{-2}{-2} \\ \dfrac{-3}{-2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \because \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \because \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{2} & \dfrac{2}{2} \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \because \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

14　消去法（掃き出し法）

次の操作を行列の行の基本変形という：

(I) ある行を k 倍するまたは k で割る.（ただし，$k \neq 0$.）

(II) ある行の k 倍を他の行に加える.

(III) 行を入れ換える.

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を次のように行列で表す

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$$

そこで，基本変型 (I),(II) を繰り返し実行して，

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & p^* \\ 0 & 1 & q^* \end{pmatrix}$$

に変形できたとき，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \text{ の解は } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^* \\ q^* \end{pmatrix}$$

例題 **9.**　(1)　1 行を ①，2 行を ② で表す．

$$\begin{cases} 2x+5y=9 \\ 3x+4y=10 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times(-\frac{2}{7})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-\frac{5}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x=2,\ y=1$$

(2)

$$\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x=2,\ y=-1$$

(3)

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times d} \begin{pmatrix} ad & bd & pd \\ c & d & q \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-b)} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 & pd-qb \\ c & d & q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①\times(ad-bc)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{pd-qb}{ad-bc} \\ c & d & q \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{pd-qb}{ad-bc} \\ 0 & d & \frac{d(qa-pc)}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times d^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{pd-qb}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{qa-pc}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$\therefore x=\frac{pd-qb}{ad-bc}\,,\quad y=\frac{qa-pc}{ad-bc}$$

15　行列の対角化

$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列を対角行列という．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる $|P| \neq 0$ なる行列 P があるならそれを見つけよう．このような行列 P が存在するとき，行列 A は対角化可能という．

例題 10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

16　与えられた行列を対角化する行列

$\begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \alpha\boldsymbol{x}_1 \\ A\boldsymbol{x}_2 = \beta\boldsymbol{x}_2 \end{cases}$ となる $\left(\alpha,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}\right)$, $\left(\beta,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}\right)$, $(\alpha \neq \beta)$ が存在すれば

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{x}_1 & \beta\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\boldsymbol{x}_1 & \beta\boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$|P| \neq 0$ ならば P^{-1} が存在するので P^{-1} を左から掛けて

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を得る．

17　α, β, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の求め方

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，２次方程式

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

の解を α, β とする．特に，$b \neq 0, \alpha \neq \beta$ の場合を考える．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\alpha - a}{b} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\beta - a}{b} \end{pmatrix}$$

とおくと，容易に

$$A\boldsymbol{x}_1 = \alpha\boldsymbol{x}_1, \quad A\boldsymbol{x}_2 = \beta\boldsymbol{x}_2$$

が分かる．$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\alpha - a}{b} & \dfrac{\beta - a}{b} \end{pmatrix}$ とおけば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を得る．

問題 7.　(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，２次方程式

$$\lambda^2 - (2+2)\lambda + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = \underline{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0}$$

の解は $\lambda = 1,\ 3$ である．従って，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-2}{1} & \dfrac{3-2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

とおくと，自動的に

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，２次方程式

$$\lambda^2 - (1+1)\lambda + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = \underline{\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0}$$

の解は $\lambda = 1 - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}$ である．従って，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{2} - 1}{1} & \dfrac{1 + \sqrt{2} - 1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおくと，自動的に

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，２次方程式

$$\lambda^2-(1+3)\lambda+1\cdot 3-1\cdot 2=\underline{\lambda^2-4\lambda+1=0}$$

の解は $\lambda=2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$ である．従って，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2} & \dfrac{2+\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと，自動的に

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

18　３次の行列

５つのタイプの３次の行列がある．

▶ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を 3×3-行列または$\underline{(3,3)\text{-行列}}$という．

▶ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ を 2×3-行列または$\underline{(2,3)\text{-行列}}$という．

▶ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ を 1×3-行列または $(1,3)$-行列，実際は<u>3 次行ベクトル</u>ともいう．

▶ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ を 3×2-行列または$\underline{(3,2)\text{-行列}}$という．

▶ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ を 3×1-行列または $(3,1)$-行列という．実際は，<u>3 次列ベクトル</u>ともいう．

19　３次の行列の積の定義

行列の積の一般ルールは

$$\boxed{(m,\ell)\text{-行列と }(\ell,n)\text{-行列の積は }(m,n)\text{-行列である．}}$$

今，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $(3,3)$-行列と $(3,3)$-行列の積は $(3,3)$-行列である

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

但し，

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$$

注意 6. 一般に，(m,ℓ) 行列 A の (i,k) 成分を $(A)_{ik}$,(ℓ,n) 行列 B の (k,j) 成分を $(B)_{kj}$ とおくそのとき，積 AB の (i,j) 成分は

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} (A)_{ik}\cdot(B)_{kj}$$

で定義する．

(2) $(2,3)$-行列と $(3,3)$-行列の積は $(2,3)$-行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

(3) $(3,3)$-行列と $(3,2)$-行列の積は $(3,2)$-行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

(4) $(2,3)$-行列と $(3,2)$-行列の積は $(2,2)$-行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

(5) $(3,2)$-行列と $(2,3)$-行列の積は $(3,3)$-行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

注意 7.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i\ell} \end{pmatrix} \ (1 \leqq i \leqq m)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_\ell \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{\ell j} \end{pmatrix} \ (1 \leqq j \leqq n)$$

とおく．そのとき，

定義 19.1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ell} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{\ell 1} & b_{\ell 2} & \dots & b_{\ell n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_\ell \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

例題 11. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 & 50 \\ 32 & 77 & 122 \\ 50 & 122 & 194 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \\ 50 & 122 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$

20　３次行列式と３元連立１次方程式に対するクラメールの公式

３元連立１次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

または

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \ \cdots \ (21.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \ \cdots \ (21.2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \ \cdots \ (21.3) \end{cases}$$

の解 (x_1, x_2, x_3) の公式（クラメール公式）を導く．(21.2), (21.3) より，

$$\begin{cases} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - a_{31}x_1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 - a_{21}x_1 \\ b_3 - a_{31}x_1 \end{pmatrix}$$

よって，

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_2 - a_{21}x_1 & a_{23} \\ b_3 - a_{31}x_1 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - x_1 \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 - a_{21}x_1 \\ a_{32} & b_3 - a_{31}x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + x_1 \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

これを (21.1) に代入し，分母を払って x_1 を括ると

$$x_1 \left(a_{11} - a_{12} \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + a_{13} \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \right) = b_1 - a_{12} \frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + a_{13} \frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_1 \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$
$$= b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}$$

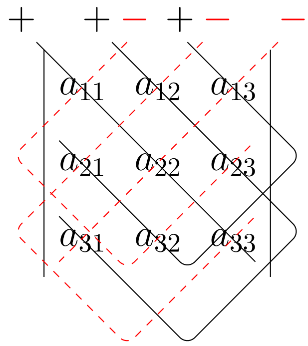
こうして，

$$x_1 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_2 & a_{23} \\ b_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}}$$

を得る．そこで，

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12}) \\
&\quad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})
\end{aligned}
$$

を 3×3-行列式または3次の行列式という．



簡単な計算により

公式 4.

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

今，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} & \boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{a}_2 &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \boldsymbol{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{a}_3 &= \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \boldsymbol{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とおく．そのとき，

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \quad \text{と表される．}
$$

次に，３次行列式をベクトルを用いて表す.

公式 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{21}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}$$

次に３次の行列式の性質について述べる.

定理 20.1. (1) （行の入れ換え）

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

(2) （定数倍）

$$c\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c\cdot\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ c\cdot\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ c\cdot\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) （基本変形）

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + c\cdot\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + c\cdot\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 + c\cdot\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 + c\cdot\boldsymbol{a}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

(5)

$$\frac{1}{c}\begin{vmatrix} c\cdot\boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ c\cdot\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ c\cdot\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix}$$

問題 **8.** (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(45-48)+2\cdot(42-36)+3\cdot(32-35)=0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2\cdot(12-15)+5\cdot(12-6)+(-3)\cdot(5-8)=33\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 2\cdot 0\cdot 6+1\cdot 5\cdot 8+4\cdot 3\cdot 5-(4\cdot 0\cdot 8+5\cdot 3\cdot 2+6\cdot 5\cdot 1) \\ &= 40+60-(30+30)=40\end{aligned}$$

21　３次行列の逆行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす行列

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

が存在するとき，これを A の逆行列という．即ち，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$AX=E$$

を満たす行列 X を A の逆行列といい，$X=A^{-1}$ で表す．

逆行列 X が存在するためには

$$|A| \neq 0$$

でなければならない．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とおく．そのとき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

と表される．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & A\boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}$$

よって，連立 1 次方程式系

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 \\ A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2 \\ A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

を得る．クラメールの公式から A の逆行列は $|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$$

である. 但し,

$$
\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_1} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_1} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_1} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_2} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_2} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_2} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_3} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_3} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_3} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \end{pmatrix}
$$

定理 21.1.

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_1} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_2} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \color{red}{\boldsymbol{e}_3} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_1} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_2} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \color{red}{\boldsymbol{e}_3} & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \\ \\ \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_1} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_2} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} & \dfrac{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \color{red}{\boldsymbol{e}_3} \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right|} \end{pmatrix}
$$

例題 12. 次の行列

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

の逆行列を求める.

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \color{blue}{\boldsymbol{x}_1} & \color{blue}{\boldsymbol{x}_2} & \color{blue}{\boldsymbol{x}_3} \end{pmatrix}
$$

とおく.

まず, A の行列式は

$$
|A| = \left| \begin{matrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{matrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 1 - (3 + 2 + 2) = 1
$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 9. 逆行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

を示せ.

22　演習 1

問題 10.　(1) $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ をみたす a, b を求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の内積 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ を求めよ.

(3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ を満たす k を求めよ.

問題 11. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} =$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$

問題 12. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} =$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

問題 13. クラメールの公式

(1) $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ -5x + 6y = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$

問題 14. （掃き出し法）

(1) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 6 \\ -3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2y+z=2 \\ x+2z=3 \end{cases}$

問題 15. 対角化

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について

(i) A の固有方程式の解を求めよ（実数解）.

(ii) A を対角化する行列 P を求め，A を対角化せよ.

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について

(i) A の固有方程式の解を求めよ（虚数解）.

(ii) A を対角化する行列 P を求め，A を対角化せよ.

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について

(i) A の固有方程式の解を求めよ（実数解）.

(ii) A を対角化する行列 P を求め，A を対角化せよ.

23　演習 2

問題 16. (1) ベクトルの内積 $\left\langle \begin{pmatrix} -a \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$ を求めよ.

$-2a+5a=3a$

(2) $\begin{pmatrix} -3 \\ b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ -2b \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ を満たす k を求めよ.

$-3=6k, \quad b=-2kb \Longrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$

問題 17. 次の行列の積を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} a & -3 \\ -5 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-6 & ab-6b \\ 2a-5 & 2ab-5b \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & a & 1 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & b \\ 1 & -2 & b \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & a-1 & ab \\ a+8 & -2a-8 & ab+4b \\ -a+3 & 3a-1 & -ab+2b \end{pmatrix}$

問題 18. 次の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

問題 19. クラメールの公式を用いて次の連立 1 次方程式の解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x - 7y = 4 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{27}{31}\ ,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{10}{31}$$

(2) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{5}\ ,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6}{5}$$

問題 20. (1) $\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -4a^2 + 18a - 7$

(2) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

24　演習３

問題 21.　(1) ベクトルの内積 $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ を求めよ．

$(-3)\cdot 2 + 5\cdot 3 = 9$

(2) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を満たす k を求めよ．$-3 = 6k \quad \therefore k = -\dfrac{1}{2}$

問題 22. 次の行列の積を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 10 & -12 & 6 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

問題 23. 次の逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -5 & 3 & -4 \\ -8 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

問題 24. クラメールの公式を用いて次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} -2x + 7y = 8 \\ 5x + 9y = 1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{65}{53}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{42}{53}$$

(2) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = -2 \\ 3x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{17}{27}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{27}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{28}{27}$$

問題 25. (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 7$

(2) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

25　3×3 行列の基本変形

25.1　基本変形行列

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（単位基本ベクトル）}$$

$$E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（単位行列）}$$

とおく.

1. (i) $P_i(c)$: E に i 行を $c \neq 0$ 倍した行列

$$
\begin{aligned}
P_1(c) &= \begin{pmatrix} c \cdot \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_2(c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ c \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_3(c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ c \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ii) $P_{ij} = P_{ji} \quad (1 \leqq i, j \leqq 3,\ i \neq j)$: E に i と j 行を入れ替えたした行列

$$
\begin{aligned}
P_{12} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P_{23} &= \begin{pmatrix} \cdot\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
P_{31} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(iii) E の i 行の c 倍を j 行に加えた行列

$$
\begin{aligned}
P(1,2;c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ c \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P(2,1;c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 + c \cdot \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P(2,3;c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ c \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \\
P(3,2;c) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 + c \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$P(1,3;c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ c\cdot\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(3,1;c) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1+c\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25.2 ３次正方行列の基本変形

３次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

に対して、

(i) $P_i(c)\cdot A$ ：A の i 行を c 倍して得られる行列.

(ii) $P_{ij}\cdot A$ ：A の i 行と j 行を入れ替えて得られる行列.

(iii) $P(i,j:c)\cdot A$ ：A の i 行を c 倍したものを j 行に加えたもの

例題 13. (i)

$$P_2(c)\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c\cdot a_{21} & c\cdot a_{22} & c\cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$P_{13}\cdot A = A = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$P(1,2:c)\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c\cdot a_{11}+a_{21} & c\cdot a_{12}+a_{22} & c\cdot a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

注意 8. $P_m(c')P_{k\ell}P(i,j:c)\cdot A$ は A の i 行を c 倍して j 行に加え，さらに，その行列の k 行と ℓ 行を入れ替えたのち，その行列の m 行を c' 倍して得られる行列．このように，基本変形の操作は基本変形の行列を左から順にかけてゆくことで達成される．

注意 9. 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ は基本変形行列 $\{P_i(c),\ P_{ij},\ P(i,j:c)\}$ に属する行列を左から順次適当に掛けて得られる行列（基本変形の操作を有限回繰り返して）最終的には次の (I),(II),(III) の何れかに変形される．

(I) 以下のとき，rank $A = 1$（A の階数（ランク）は 1）という．

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(II) 以下のとき，rank $A = 2$（A の階数（ランク）は 2）という．

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(III) 以下のとき，rank $A = 3$（A の階数（ランク）は 3）という．

$$A \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26　3元連立1次方程式の掃き出し法による解法

3元連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + jz = r \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & j & r \end{pmatrix}$$

も基本変形 (i), (ii), (iii) を用いて解くことが出来る．結論としては, 基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & j & r \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p* \\ 0 & 1 & 0 & q* \\ 0 & 0 & 1 & r* \end{pmatrix}$$

と変形できたとき，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p* \\ q* \\ r* \end{pmatrix}$$

例題 14. (1)

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ -3x+5y+2z=4 \\ 5x-6y+3z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 10 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\times(-5)]{②+①\times3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & \frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 19 \\ 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{19}{2} & -23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times\frac{2}{19}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{19}{2} & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+②\times\frac{27}{2}]{①+②\times\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②+③\times(-1)]{①+③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=3 \\ x+z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+②\times1]{①+②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[②+③\times(-1)]{①+③\times1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問題 26. 次の連立一次方程式の解を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ 3x+y+5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad (x, y, z) = (1, 2, -1)$$

問題 27. $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -3x + 4y + 5z = 8 \end{cases}$ の解を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$x = 8, y = -7, z = 12$$

問題 28. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = 1 \\ -2x + y + 3z = 2 \end{cases}$ の解を掃き出し法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

27　3×3 行列の固有値

3×3-行列（３次正方行列ともいう）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の固有値を λ とし λ に付随する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\lambda) \neq 0$ とおくと

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$$

を得る．

注意 10. A の固有値は複素数の場合もあることに注意．

また，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，

$$\therefore \quad (A - \lambda E) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

ここで，行列式 $|A - \lambda E| \neq 0$ ならば，逆行列 $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = (A - \lambda E)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ に反するので，$|A - \lambda E| = 0$ である．従って，A の固有値 λ は**固有方程式**と呼ばれる（３次）方程式

$$|A - \lambda E| = 0$$

の解である．具体的には，次の形の３次方程式の解である．

$$|A - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33})\lambda - |A| = 0$$

但し，Δ_{ii} $(1 \leqq i \leqq 3)$ は行列 A から i 行 i 列を除いた残りの 2×2 行列式，即ち

$$
\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\Delta_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
\Delta_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

例題 15.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

の固有方程式は

$$
\lambda^3-(1+1+1)\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)\lambda+\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0
$$

即ち，

$$
\therefore \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda - 25 = 0
$$

である．

例題 16.

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}
$$

の固有値 λ を求めよ．

解答

固有方程式は

$$
\lambda^3-(1+2+3)\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right)\lambda+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0
$$

$$
\therefore \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 1, 2, 3
$$

27.1 固有空間

3×3 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の固有値を λ（一般に固有値 λ は複素数である) とし

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\cdot\boldsymbol{x}$$

を満たすベクトル全体の集合を

$$\boldsymbol{V}(\lambda)=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^3\ (\text{or } \boldsymbol{C}^3)\ :\ Ax=\lambda\cdot\boldsymbol{x}\right\}\subset\boldsymbol{R}^3\ (\text{or } \boldsymbol{C}^3)$$

にて表し，固有値 λ に付随する**固有空間**という．このとき，$A\mathbf{0}=\lambda\mathbf{0}(=\mathbf{0})$ より，$\boldsymbol{V}(\lambda)$ は零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む．従って

$$\boldsymbol{V}^*:=\boldsymbol{V}(\lambda)\setminus\{\mathbf{0}\}$$

は 3×3 行列 A の固有値 λ に対する<u>固有ベクトル全体の集合</u>である．固有空間 $\boldsymbol{V}(\lambda)$ の性質

(1) $\mathbf{0}\in\boldsymbol{V}(\lambda)$.

(2) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{V}(\lambda)$ および実数 α,β に対し，$\underline{\alpha\cdot\boldsymbol{x}_1+\beta\cdot\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{V}(\lambda).}$

$$(\because)\quad A(\underline{\alpha\cdot\boldsymbol{x}_1+\beta\cdot\boldsymbol{x}_2})=\alpha A\boldsymbol{x}_1+\beta A\boldsymbol{x}_2=\alpha\lambda\boldsymbol{x}_1+\beta\lambda\boldsymbol{x}_2=\lambda(\underline{\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2})$$

命題 27.1. $\lambda\neq\mu\Longrightarrow V(\lambda)\cap V(\mu)=\{\mathbf{0}\}$.

証明. $\boldsymbol{x}\in V(\lambda)\cap V(\mu)$ をとる．$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}\quad\therefore\quad(\lambda-\mu)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad\therefore\quad\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

命題 27.2. 3 次正方行列 A が 3 個の相異なる実固有値（固有値が実数）$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ を持つとする．各 λ_i $(1\leqq i\leqq 3)$ に付随する固有空間を $V(\lambda_i)$ $(1\leqq i\leqq 3)$ とおく．このとき，

$$V(\lambda_1)+V(\lambda_2)+V(\lambda_3)=V(\lambda_1)\oplus V(\lambda_2)\oplus V(\lambda_3)=\boldsymbol{R}^3$$

（問題 29 を参照せよ）

27.2 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間（目を通す程度で良い）

定義 27.1. n 次元（列）ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $\boldsymbol{V}$ が

(27.1) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{V}$.

(27.2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{V}$ および実数 α, β に対し，$\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1 + \beta \cdot \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{V}$

を満たすとき，$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の**部分空間**という．

注意 11. 実際は，3 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $\boldsymbol{V}$ は

(1) $\boldsymbol{V} = \{\mathbf{0}\}$（$\mathbf{0}$ 元のみ）.

(2) $\boldsymbol{V}$ は原点 $\mathbf{0}$ を通る直線で

$$\mathrm{L}: \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0) \text{ の形.}$$

(3) $\boldsymbol{V}$ は原点を通る平面

$$\mathrm{H}: \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0) \text{ の形.}$$

(4) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^3$（空間全体）.

の 4 種類である．

27.3 一次独立と一次従属

$\boldsymbol{V}$ を n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．但し，$\boldsymbol{R}^n$ 自身も $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間と見なす．

定義 27.2. $\boldsymbol{V}$ の元（$\boldsymbol{V}$ からのベクトル）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が $\boldsymbol{R}$ 上**一次独立**であるとは，

$$(28.1): \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}$$

を満たす r 個の実数の組 (解) $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ が $(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (0, 0, \ldots, 0)$ に限るときをいう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が $\boldsymbol{R}$ 上**一次独立**でないとき，これらのベクトルは**一次従属**という．すなわち $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r = \mathbf{0}$ の解が $(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (0, 0, \ldots, 0)$ 以外に存在するとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は $\boldsymbol{R}$ 上**一次従属**という．

注意 12. $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{R}^n$ $(1 \leqq i \leqq r)$ より，各 $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{R}^n$ のベクトルとして，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \boldsymbol{a}_r = \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

と表されるので (28.1) は

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{a}_r = x_1\begin{pmatrix} xa_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\cdots+x_r\begin{pmatrix} xa_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix} = 0$$

と表される．行列表記すれば

$$(28.2): \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^r$$

または

$$(28.3): \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \ldots & \boldsymbol{a}_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

こうして，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 一次独立かどうかは連立方程式 (28.2), (28.3) の解 $\boldsymbol{x}_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$ に限るときであるというように最終的は連立方程式の話に帰着させることができる．

例題 17. ベクトル空間 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立である．実際，

$$x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

即ち $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とし E を $n \times n$ 単位行列とすると

$$E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \therefore \boldsymbol{x} = 0$$

こうして，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{x} = (0, 0, \ldots, 0)$ しかない．ゆえに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立である．

例題 18. ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix}$$

は $\boldsymbol{R}$ 上一次従属である．

実際，$\left(3, 2, -\dfrac{1}{2}\right) \neq (0, 0, 0)$ であり，

$$3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{a}_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属である．

27.4 基底と次元

定義 27.3. $\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ で張られるベクトル空間を

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle_{\boldsymbol{R}} \overset{\text{def}}{\coloneqq} \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r \mid a_i \in \boldsymbol{R}\ (1 \leqq i \leqq r)\}$$

で表す．

定義 27.4. $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\} \subset \boldsymbol{V}$ が $\boldsymbol{V}$ の基底であるとは

(i) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は $\boldsymbol{R}$ 上一次独立である．

(ii) $\boldsymbol{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle_{\boldsymbol{R}}$. 即ち，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の $\boldsymbol{R}$ 上の一次結合

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r \quad (a_1, a_2, \ldots, a_r \text{ は実数})$$

として表される．

定義 27.5. 部分空間 $\boldsymbol{V}$ の基底の数を $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{R}^n$ の次元といい，$\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{V}$ で表す．

命題 27.3. $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とし，$\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ とする．$\boldsymbol{V} \subsetneqq \boldsymbol{W}$ ならば，$\boldsymbol{V}$ に属しない $\boldsymbol{W}$ のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ $(s \geqq 1)$ を用いて，

$$\boldsymbol{W} = \left\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s \right\rangle_{\boldsymbol{R}}$$

とできる．

証明. $\boldsymbol{V} \subsetneqq \boldsymbol{W}$ より，$\boldsymbol{V}$ に属さない $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w}_1 \in \boldsymbol{W}$ が存在する．このとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1\}$ は一次独立である．実際，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r + b_1\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{0}$ とする．$b_1 \neq 0$ ならば，

$$\boldsymbol{w}_1 = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\boldsymbol{v}_1 + \left(-\frac{a_2}{b_1}\right) + \cdots + \left(-\frac{a_r}{b_1}\right)$$

右辺は $\boldsymbol{V}$ の基底に一次結合なので $\boldsymbol{V}$ の元である．よって，$\boldsymbol{w}_1 \in \boldsymbol{V}$ である．$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{w}_1$ は $\boldsymbol{V}$ の元ではないので矛盾である．よって，$b_1 = 0$. このとき，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ は $\boldsymbol{V}$ の基底なので（一次独立），ゆえに，$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$．こうして，$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = b_1 = 0$ を得る．これは，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1\}$ は一次独立であることを示す．次に

$$\boldsymbol{V}_1 := \left\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1 \right\rangle_{\boldsymbol{R}} \neq \boldsymbol{W}$$

ならば，$\left\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1 \right\rangle_{\boldsymbol{R}}$ に属さないベクトル $\boldsymbol{w}_2 \in \boldsymbol{W}$ が存在する．上記と同様の方法で $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ は一次独立であることが示せる．そこで，$\boldsymbol{V}_2 = \left\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \right\rangle_{\boldsymbol{R}}$ とおく．$\boldsymbol{V}_2 \neq \boldsymbol{W}$ なら，同様の議論を繰り返し，最終的に $\boldsymbol{V}$ に属しない $\boldsymbol{W}$ のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ $(s \geqq 1)$ を用いて，

$$\boldsymbol{W} = \left\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_s \right\rangle_{\boldsymbol{R}}$$

とできる． □

命題 27.4. $\boldsymbol{V}$ を $\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{V} = m$ なる $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．そのとき，零ベクトル $\boldsymbol{0}$ でない $m+1$ 個の $\boldsymbol{V}$ に属するベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ は一次従属である．

証明. $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ とする．そのとき，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m \\
\boldsymbol{v}_2 &= a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_m &= a_{1m}\boldsymbol{f}_1 + a_{2m}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{mm}\boldsymbol{f}_m \\
\boldsymbol{v}_{m+1} &= a_{1\,m+1}\boldsymbol{f}_1 + a_{2,m+1}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m\,m+1}\boldsymbol{f}_m
\end{aligned}$$

と表わされる即ち，

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}) = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,m+1} \end{pmatrix} \cdots (27.4.1)$$

を得る．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,m+1} \end{pmatrix}$$

とおく．今，$\underline{A \text{ は } m \times (m+1) \text{ 行列で } \operatorname{rank} A \leqq m < m+1}$．よって，

$$A\boldsymbol{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

は自明でない解 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ を持つ（未知数が一次方程式の数より多い！証明には準備を要する！）．即ち，$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ なる解 $\boldsymbol{x}_0$ が存在する．故に，(27.4.1) に x_0 を左から掛けて

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1})\,\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\,A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}.$$

を得る．$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_{m+1} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ かつ

$$x_1^0 \boldsymbol{v}_1 + x_2^0 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_{m+1}^0 \boldsymbol{v}_{m+1} = \boldsymbol{0}$$

を得る．これは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}$ が一次従属であることを示している． □

系 27.1. $\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{V} = m$ ならば $m + k$ $(k \geqq 1)$ 個の $\boldsymbol{V}$ のベクトルは一次従属である．

命題 27.5. $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とすると $\dim \boldsymbol{V} \leqq \dim \boldsymbol{W}$. 特に，$\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{V} = \dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{W}$ ならばベクトル空間として $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$.

定義 27.6. $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

$$\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \ : \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\}$$

をベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ の和空間という．特に，$\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき，

$$\boldsymbol{V} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{W}$$

と表わす．一般に，$\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \ldots, \boldsymbol{V}_r$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とし，

$$\begin{array}{ccl}
\boldsymbol{V}_1 & \cap & \big(\boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{V}_3 + \cdots + \boldsymbol{V}_r\big) = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{V}_2 & \cap & \big(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_3 + \cdots + \boldsymbol{V}_r\big) = \boldsymbol{0} \\
\vdots & & \\
\boldsymbol{V}_i & \cap & \big(\boldsymbol{V}_1 + \cdots + \boldsymbol{V}_{i-1} + \boldsymbol{V}_{i+1} \cdots \boldsymbol{V}_r\big) = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{V}_r & \cap & \big(\boldsymbol{V}_1 + \cdots + \boldsymbol{V}_i + \cdots \boldsymbol{V}_{r-1}\big) = \boldsymbol{0}
\end{array}$$

のとき，

$$\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2 \oplus + \cdots \oplus \boldsymbol{V}_r$$

と表わす．

命題 27.6. $\boldsymbol{V}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ を $\boldsymbol{R}^n$ の $\boldsymbol{0}$ でない部分空間とする.

$$\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2 \oplus + \cdots \oplus \boldsymbol{V}_r$$

ならば，各 $\boldsymbol{V}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ からの $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r : \quad (\boldsymbol{v}_i \in \boldsymbol{V}_i)\}$ は一次独立である．

証明. 数学的帰納法で示す．$r = 2$ のときは $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ としたとき，$a_1 \neq 0$ ならば $\boldsymbol{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}_2$ より $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ より矛盾．よって，$a_1 = 0$ よって $a_2 = 0$．$r-1$ まで正しいとする．そのとき，$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ とおく．$a_r \neq 0$ ならば，

$$\boldsymbol{v}_r = -\frac{a_1}{a_r}\boldsymbol{v}_2 + \cdots - \frac{a_{r-1}}{a_r}\boldsymbol{v}_{r-1}$$

よって，$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}_r \in \boldsymbol{V}_r \cap (\boldsymbol{V}_1 + \cdots + \boldsymbol{V}_{r-1}) = \{\boldsymbol{0}\}$ 故に，$a_r = 0$. こうして，$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots a_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1} = \boldsymbol{0}$ を得る．帰納法の仮定より，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}\}$ は一次独立である．こうして，$a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$．故に

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$$

これは，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{r-1}, \boldsymbol{v}_r\}$ が一次独立を示す．

命題 27.7. $\boldsymbol{R}^3$ の $\boldsymbol{0}$ でない部分空間 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3$ が

$$\boldsymbol{V}_1 \cap \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_2 \cap \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_3 \cap \boldsymbol{V}_1 = \{\boldsymbol{0}\}$$

を満たせば

$$\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2 \oplus \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{R}^3$$

かつ

$$\dim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{V}_i = 1 \ (1 \leqq i \leqq 3)$$