

初習 複素数・複素関数

＝高校生および大学初年次学生向け＝

大嶋康裕¹

石田明男²

古島幹雄³

2021 年 6 月 9 日

¹崇城大学 (Email: yohshima@ed.sojo-u.ac.jp)

²熊本高等専門学校 (Email: ishida@kumamoto-nct.ac.jp)

³熊本大学名誉教授 (Email: wagami@kumamoto-u.ac.jp)

目次

第 1 章 複素数と複素平面	3
1.1 複素数 (虚数)	3
1.2 記号及び準備	4
1.3 複素平面と複素数の導入	6
1.4 複素平面上の幾何 (図形)	8
1.5 複素平面上の直線の方程式	14
1.5.1 補足	20
1.6 複素平面上の三角形の外心, 内心, 垂心, 重心	21
1.6.1 内心	22
1.6.2 外心	22
1.6.3 垂心	23
1.6.4 重心	24
第 2 章 複素微分積分学ガイダンス	25
2.1 複素関数の例	25
2.1.1 多項式関数 (多項式で定義される関数)	25
2.1.2 有理関数 (多項式の商で定義される関数)	26
2.1.3 指数関数	26
2.2 複素領域	27
2.2.1 特殊な複素領域	27
2.3 複素数列	28
2.3.1 (複素) 関数の極限值と連続性	29

第 3 章	複素微分積分四方山ばなし	33
3.1	複素微分可能性	33
3.2	複素微分可能関数とコーシー・リーマンの関係式	35
第 4 章	複素積分	41
4.1	複素曲線	41
4.1.1	複素曲線の定義と例	41
4.1.2	複素曲線の向き	44
4.1.3	複素曲線の連結	45
4.1.4	複素曲線の長さ	46
4.1.5	閉曲線と単純閉曲線	46
4.2	複素線積分	48
4.3	定理 4.1 および定理 4.2 の応用	50
4.3.1	コーシーの積分公式	50
4.3.2	留数定理	53

第1章 複素数と複素平面

1.1 複素数（虚数）

- ▶ $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位と呼ぶ.
- ▶ i は2次方程式 $z^2 + 1 = 0$ の1つの解. 又, $-i$ もまた2次方程式の1つの解である. したがって, 2次方程式 $z^2 + 1 = 0$ は2つの解を持つ. 特に, $i^2 = -1$. こうして, 2次方程式 $z^2 + 1 = 0$ の根は $\{\pm i = \pm\sqrt{-1}\}$ である.

命題 1.1. $i = \sqrt{-1}$ は実数でない.

証明. (背理法による証明): $i = \sqrt{-1}$ は実数と仮定すると $i^2 \geq 0$ である. 一方, $i^2 = -1$ より不都合である. ゆえに, $i = \sqrt{-1}$ は実数ではない. $\square$

注意 1.1. 虚数 $i = \sqrt{-1}$ は実数の世界には存在しないが, 以下に述べる複素数の世界には存在する. 複素数の世界に (どういった意味で) 存在するかについては次節で述べる.

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とおく. $\mathbb{R}$ は数直線と同一視される. 即ち, 数直線上の点は実数であり, 実数は数直線上の点として表される.

定義 1.1. (1) **複素数**とは $x + yi$ (x, y は実数) の形で表される広い意味での数である.

(2) (形式的に) 集合

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$$

を考える. これを複素数の集合と呼ぶ. 集合 $\mathbb{C}$ の元が**複素数**である.

- (3) $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し, x を z の実部, y を z の虚部といい, それぞれ, 記号 $\operatorname{Re} z$ (real part) 及び $\operatorname{Im} z$ (imaginary part) で表す. 即ち,

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

- (4) $x = x + 0i$ (x は実数) なので, 実数は複素数の一部と見ることができる. つまり集合として $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ なる包含関係がある.

1.2 記号及び準備

定義 1.2. (1) 複素数 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し, $\bar{z} = x - yi$ を z の共役複素数という. 特に, $\bar{\bar{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z \quad \therefore \quad \bar{\bar{z}} = z$.

- (2) $z = x + yi$ に対し, $x = y = 0$ の時 $z = 0$ とする. 故に, 対偶をとって, $z \neq 0 \iff x^2 + y^2 \neq 0$ を得る.

次に複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) の四則演算を定義しよう.

定義 1.3. (1) $\blacktriangleright z \pm w = ((x + yi) \pm (u + vi)) = (x \pm u) + (y \pm v)i$

$$\blacktriangleright \underline{z \cdot w = (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xu + yu)i}$$

$\blacktriangleright z \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

$\blacktriangleright$

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = (u + vi) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i \right) = \left(\frac{ux + vy}{x^2 + y^2} \right) + \left(\frac{vx - uy}{x^2 + y^2} \right)i$$

- (2) $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値という. 特に, $|\bar{z}| = |z|$. 故に,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2} \quad \therefore \quad \frac{w}{z} = \frac{\bar{z}w}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}w}{|z|^2}$$

(3) 複素数 $z = x + yi$ に対し, $x = \operatorname{Re} z := \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ より

$$\therefore z = (\operatorname{Re} z) + i(\operatorname{Im} z) = \frac{z + \bar{z}}{2} + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) i.$$

$$\text{特に, } (\operatorname{Re} z)^2 = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} \right|^2, \quad (\operatorname{Im} z)^2 = \left| \frac{z - \bar{z}}{2i} \right|^2 = \left| \frac{z - \bar{z}}{2} \right|^2.$$

$$\therefore |z|^2 = x^2 + y^2 = \left| \frac{z + \bar{z}}{2} \right|^2 + \left| \frac{z - \bar{z}}{2} \right|^2$$

問題 1.1. 複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対し, 次を示せ.

(1.1) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (三角不等式) .

$$(1.2) \quad \frac{|z + w|}{1 + |z + w|} \leq \frac{|z|}{1 + |z|} + \frac{|w|}{1 + |w|}$$

証明. 証明する前に, 複素数 z, w に対して, 次の事実を確認しておきましょう.

シュワルツの不等式

$$\begin{aligned} |z| \cdot |w| &= |zw| = |zw| = |\bar{z}w| = |z\bar{w}| \\ |zw|^2 &= |\bar{z}w|^2 = \left| \frac{\bar{z}w + \bar{z}w}{2} \right|^2 + \left| \frac{\bar{z}w - \bar{z}w}{2i} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2} \right|^2 + \left| \frac{\bar{z}w - z\bar{w}}{2} \right|^2 \\ &\geq \left| \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2} \right|^2 \\ \therefore |z| \cdot |w| &\geq \left| \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2} \right| \quad (\text{シュワルツの不等式}) \end{aligned}$$

(1.1) の証

$$\begin{aligned} (|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| - (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| - (|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w) \\ &= 2 \left(|z| \cdot |w| - \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} \right) \\ &\geq 2 \left(|z| \cdot |w| - \left| \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} \right| \right) \\ &\geq 0 \quad (\text{シュワルツ不等式より}) \end{aligned}$$

$$\therefore |z| + |w| \geq |z + w|$$

注意 1.2. $\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} = \operatorname{Re}(z\bar{w})$ は実数であることに注意すれば

$$-\left|\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2}\right| \leq \frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} \leq \left|\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2}\right|$$

が分かる。上記 (1.1) の 4 番目の不等式に於いてはこの事実を用いた。

(1.2) の証

$$\begin{aligned} \frac{|z + w|}{1 + |z + w|} &= 1 - \frac{1}{1 + |z + w|} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1 + |z| + |w|} \quad \because (\text{三角不等式より}) \\ &= \frac{|z| + |w|}{1 + |z| + |w|} = \frac{|z|}{1 + |z| + |w|} + \frac{|w|}{1 + |z| + |w|} \\ &\leq \frac{|z|}{1 + |z| + |w|} + \frac{|w|}{1 + |z| + |w|} \\ &\leq \frac{|z|}{1 + |z|} + \frac{|w|}{1 + |w|} \end{aligned}$$

□

1.3 複素平面と複素数の導入

定義 1.4. 座標平面 (xy -平面) 上の点集合を

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

とする。この時、 $\mathbb{R}^2$ は数ベクトル全体と見ることができる。集合 $\mathbb{R}^2$ の点 (元) に対し、以下のように、通常の加法のほかに乗法を定義する：

- (1) (加法) : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- (2) (乗法) : $(x, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.
- (3) (零元) : $(0, 0)$.

(4) (単位元) : $(1, 0)$.

(5) (加法逆元) : (x, y) に対し, 加法に関する逆元 $-(x, y) = (-x, -y)$.

(6) (乗法逆元) : $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$, 但し, $(x, y) \neq (0, 0)$.

このように (1) から (6) の演算が定義された点集合 $\mathbb{R}^2$ を複素数の集合と呼び記号 $\mathbb{C}$ で表す. 勿論, 点集合としては $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ である.

注意 1.3. 点集合としては $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ は同じものであるが, $\mathbb{R}^2$ には四則演算は定義されない. $\mathbb{R}^2$ に上記の四則演算が定義されたものが $\mathbb{C}$ であると解釈する.

$x := (x, 0)$ とおく. 複素数の四則演算は実数直線 $\mathbb{R} = \{x = (x, 0) \mid x \text{ は実数}\}$ 上の点の通常の四則演算を定義するので $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の部分と見ることができる. 即ち

$$\mathbb{R} \ni x := (x, 0) \in \mathbb{C} \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

勿論, 単なる点集合としても $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ (但し, この場合, 四則演算については触れていない!) である. そこで, $x = (x, 0)$ は通常の実数のごとく取り扱うことにする. 今, $i := (0, 1)$ と定義する. その時,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

よって, 複素数 $z = (x, y) = (x, 0) + y(0, 1)$ は

$$\underline{z = x + yi}$$

と一意的に表すことができる. x を z の実部と呼び $x = \operatorname{Re} z$ で表し y を z の虚部と呼び $y = \operatorname{Im} z$ で表す. また, $\operatorname{Im} z = 0$ のとき, $z = (x, 0)$ は上記の意味で実数である. 定義 1.2, 定義 1.3 の繰り返しになるが

命題 1.2. 複素数 $z = x + yi$ に対し $\bar{z} = x - yi$ を z の共役複素数という.

$$(1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad ; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$(2) \quad \overline{(\bar{z})} = z.$$

$$(3) \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad ; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

(4) z が実数 $\iff z = \bar{z}$ であり z が虚数 $\iff z = -\bar{z}$ である.

(6) $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + yxi - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \geq 0$. そこで,
 $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ を z の絶対値と呼ぶ.

$$(7) |z| \geq 0 \quad \therefore \quad |z| = 0 \iff z = 0.$$

$$(8) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(9) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$(10) |\bar{z}| = |z|$$

証明. (9) のみを示そう.

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = (z_1 \cdot z_2)(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) = (z_1 \cdot \bar{z}_1)(z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

注意 1.4. 上で述べて来たように, 平面 $\mathbb{R}^2$ の点は複素数と見なすことができるので, この平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面と呼び, 点が数としての性格を持っているということを強調するために記号 $\mathbb{C}$ を用いて表している. 従って, 複素平面の点は幾何学的な点であるとともに代数的な数という二面性を有しているのである. 特に, 平面 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上の $i = (0, 1)$ 方向の直線を**虚軸 (虚数軸)**といい, $1 = (1, 0)$ 方向の直線を**実軸 (実数軸)**という. このことから, 単に

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$$

と書くこともできる. このように, 複素数は最初に述べたような形式的導入もできるし幾何学的導入もできる.

1.4 複素平面上の幾何 (図形)

複素数 $\alpha = a + bi = (a, b)$ に対応する複素平面 $\mathbb{C}$ 上の点を $A(\alpha)$ とかく. 以下, 複素数 $\beta = (c, d), \gamma = (s, t), \delta = (u, v)$ に対応する点をそれぞれ $B(\beta), C(\gamma)$

とする。この時、座標平面の数ベクトルとして

$$\alpha = \vec{OA}, \beta = \vec{OB}, \gamma = \vec{OC}$$

である。

注意 1.5.

$$\begin{aligned}\beta - \alpha &= \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB} \\ t\alpha + (1-t)\beta &= t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \quad (0 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

複素数の和やスカラー倍（実数倍）を取り扱うときは対応するベクトルの和やスカラー倍として処理することが可能。

注意 1.6. 複素数の積は複素数であり ベクトルの内積はスカラーであること

に注意する。こうして複素数の積とベクトルの内積とは別物である。実際、

$$\text{複素数 } \alpha = \vec{OA} = (a, b), \beta = \vec{OB} = (c, d) \text{ に対し, } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = ac + bd.$$

$$\bar{\alpha} \cdot \beta = (a - bi) \cdot (c + di) = (ac + bd) + (ad - bc)i = (ac + bd, ad - bc)$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = ac + bc = \operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta) \in \mathbb{R} \text{ (スカラー)}$$

一方、 $\triangle O(0)A(\alpha)B(\beta)$ の面積は

命題 1.3. $\triangle OAB = \triangle O(0)A(\alpha)B(\beta)$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 - \{\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta)\}^2} = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)| = \frac{1}{2} |ad - bc| \quad \cdots \quad (1.5)$$

証明. $\bar{\alpha} \cdot \beta = \operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta) + i\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)$ より、

$$\begin{aligned}|\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 &= |\bar{\alpha}|^2 \cdot |\beta|^2 = |\bar{\alpha} \cdot \beta|^2 = |\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta) + i\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)|^2 \\ &= |\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta)|^2 + |\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)|^2\end{aligned}$$

$$\therefore |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 - \{\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta)\}^2 = |\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)|^2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sqrt{|\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 - \{\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \cdot \beta)\}^2} = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha} \cdot \beta)|$$

此処で、 $\frac{ad - bc}{2}$ なので結論を得る。

□

系 1.1. $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする三角形 $\triangle ABC$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \overline{(\beta - \alpha)} \cdot (\gamma - \alpha) \right| = \frac{|\beta - \alpha|^2}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \right|$$

証明. $0, z := \beta - \alpha, w := \gamma - \alpha$ を頂点とする三角形の面積は命題 1.3 より,

$$S = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z} \cdot w)| = \frac{|z|^2}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{w}{z} \right) \right|. \quad \text{このことから従う.} \quad \square$$

次に, オイラーの定理ならびにド・モアブルの公式について述べよう.

オイラーの定理とド・モアブルの公式

命題 1.4. (1) (オイラーの定理)

$$x \in \mathbb{R} \implies e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(2) (ド・モアブルの公式)

$$x, y \in \mathbb{R} \implies e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad e^{ix} \cdot e^{-iy} = e^{i(x-y)}$$

次

に, 複素数 $z = x + yi$ に対応する点を $P = P(z)$ とする. その時,

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\therefore z = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} i \right) = |z| \left(\frac{x}{|z|} + \frac{y}{|z|} i \right)$$

ここで $\left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1$ より, $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ は複素平面内の単位円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある. 従って,

$$\cos t = \frac{x}{|z|}, \quad \sin t = \frac{y}{|z|}$$

となる t ($0 \leq t < 2\pi$) が唯一つ存在する. この t を z の**偏角**という. t は実軸

と線分 OP の成す角度 (反時計回りに測った角度) で, $t = \operatorname{Arg} z$ にて表す.

又, $\arg z := \{\operatorname{Arg} z + 2n\pi \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ を一般偏角とも呼ぼう. こう

して $\arg z$ は一般には不確定値である ($2n\pi$ だけの自由度がある). このとき,

$x = |z| \cos t, y = |z| \sin t$ ゆえ,

$$\begin{aligned} z = x + yi &= |z|(\cos t + i \sin t) = |z|e^{it} = |z|e^{i \operatorname{Arg} z} \\ &= |z|e^{i(\arg z - 2n\pi)} = |z|e^{i \operatorname{Arg} z} e^{-2n\pi i} \\ &= |z|e^{i \arg z} \quad (\because e^{-2n\pi i} = \cos 2n\pi - i \sin 2n\pi = 1) \end{aligned}$$

$$\therefore z = |z|e^{\arg z} = |z|e^{\operatorname{Arg} z}$$

これを z の極形式という.

例 1.4.1. (1) $z = 1 + i$ とする. $|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$.

$$\therefore 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(2) $|1 + \sqrt{3}i| = 2$, $\operatorname{Arg}(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore 1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

(3) $(1 + \sqrt{3}i)(1 + i) = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
 $= 2\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

(4) $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{2e^{-\frac{\pi}{6}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = e^{(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{3})i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -1$

命題 1.5.

(1) $\arg 1 = 2n\pi$, $\arg(-1) = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

(2) $\arg(rz) = \arg z$ ($r > 0$)

命題 1.6. (1) $\arg(zw) = \arg(wz) = \arg z + \arg w$.

(2) $|zw| = |wz| = |z| \cdot |w|$.

(3) $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$.

(4) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$.

証明. $z, w \neq 0$ となる複素数に対し $z = |z|e^{i \arg z}$, $w = |w|e^{i \arg w}$ と極表示する. そのとき,

$$\therefore zw = |z|e^{i \arg z}|w|e^{i \arg w} = |z||w|e^{i \arg z}e^{i \arg w} = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

一方, 積 zw の極表示は, 定義から

$$zw = |zw|e^{i \arg(zw)}$$

より

$$zw = |zw|e^{i \arg(zw)} = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

このことから結論は導かれる.

□

複素数 $z \neq w$ が表す複素平面上の点をそれぞれ $P(z), Q(w)$ とし, 原点 $O(0)$ とする. このとき,

$$\angle POQ = |\arg z - \arg w|$$

特に, z が w に対して反時計回りに位置しているとき, 即ち, $\operatorname{Im} \frac{z}{w} > 0$ のときは, $\arg z - \arg w > 0$ 一方,

$$\operatorname{Im} \frac{z}{w} = 0 \iff \arg z - \arg w = \pm n\pi \iff \frac{z}{w} = (-1)^n \frac{|z|}{|w|}$$

注意 1.7. 複素数 z, w の積 $z \cdot w$ の図形的意味は,

$$z \cdot w = |z|e^{i \arg z} \cdot w$$

より, まず w を反時計回りに $\arg z$ だけ回転させ $|z|$ 倍した場所に位置する複素数である. 特に, $e^{i\theta} \cdot w$ は w を反時計回りに θ だけ回転させた位置にある複素数. つまり, 複素数に $e^{i\theta}$ を乗ずることは w を θ だけ回転させることに他ならない.

複素数 α, β, γ に対応する複素平面上の点をそれぞれ $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ とする. ベクトル $\overrightarrow{AB} (= \beta - \alpha)$ とベクトル $\overrightarrow{AC} (= \gamma - \alpha)$ のなす角を θ とする. その時,

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \theta \quad \therefore \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{|\gamma - \alpha|}{|\beta - \alpha|} e^{\pm i\theta}$$

今, α, β, γ は 1 直線上にあるなら, $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 0, \pi$ ゆえ,

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

特に, $\triangle ABC$ が $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ なる二等辺三角形ならば $|\beta - \alpha| = |\gamma - \alpha|$ より

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = e^{\pm i\theta}$$

命題 1.7. 異なる3点 α, β, γ は一直線上に並んでいるための必要十分は

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \in \mathbb{R}$$

命題 1.8 (正三角形条件). 複素平面上の点 α, β, γ を頂点とする三角形が正三角形ならば

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

である.

証明. まず, α, β, γ は一直線上にないので命題 1.7 から $\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \neq 0$. 特に, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \neq -1$. 故に,

$$\gamma + \beta - 2\alpha \neq 0 \quad \cdots \quad (1.8.1)$$

が成り立つ.

次に, 仮定から $\gamma - \alpha$ は $\beta - \alpha$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したもの.

$$\therefore \gamma - \alpha = e^{\pm \frac{\pi}{3}i} \cdot (\beta - \alpha) \quad \therefore \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = e^{\pm \frac{\pi}{3}i}$$

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^3 = e^{\pm \pi} = -1 \iff (\gamma - \alpha)^3 + (\beta - \alpha)^3 = 0$$

$$\therefore 0 = (\gamma - \alpha)^3 + (\beta - \alpha)^3 = (\gamma + \beta - 2\alpha) \{ (\gamma - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 \}$$

(1.8.1) より, $\gamma + \beta - 2\alpha \neq 0$ なので, $(\gamma - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) + (\beta - \alpha)^2 = 0$.

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

□

命題 1.9. 相異なる複素数 α, β, γ を頂点とする三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ が $\angle\gamma\alpha\beta = \angle R$ なる直角三角形であるためには

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

である.

証明. 題意から, ベクトル $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ とベクトル $\overrightarrow{\alpha\beta}$ とは直交する. このことは,

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \iff \gamma - \alpha = (\beta - \alpha) \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| e^{\pm \frac{\pi}{2} i}$$

$$\therefore \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| e^{\pm \frac{\pi}{2} i} = \pm i \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| \quad (\text{純虚数}) \quad \therefore \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

□

命題 1.10 (余弦定理). 三角形 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ に対し, $\angle BAC = \theta$ とする.

その時,

$$\cos \theta = \frac{|\gamma - \alpha|^2 + |\beta - \alpha|^2 - |\beta - \gamma|^2}{2|\gamma - \alpha| \cdot |\beta - \alpha|} = \frac{\operatorname{Re}(\overline{\beta - \alpha}(\gamma - \alpha))}{|\beta - \alpha| \cdot |\gamma - \alpha|} = \left| \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \right| \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$$

が成り立つ. 特に, $\alpha = 0$ (即ち, $A(\alpha)$ が複素平面の原点 O) のとき, $\angle BOC = \theta$

ならば,

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(\overline{\beta}\gamma)}{|\beta| \cdot |\gamma|} = \left| \frac{\beta}{\gamma} \right| \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$$

証明. 次の余弦定理の焼き直しである.

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

□

1.5 複素平面上の直線の方程式

はじめに

複素平面 $\mathbb{C}$ の複素座標を $z = x + yi$ とする. 複素平面は図形としては (x, y) 平面 $\mathbb{R}^2$ と同じなので複素平面上の図形は (x, y) 平面上の図形と認識できる.

定義 1.5. 複素平面上の直線 L は実数 a, b, c ($a^2 + b^2 \neq 0$) を用いて

$$L : ax + by + c = 0 \quad \cdots \quad (1.5.1)$$

と表される. 集合としては

$$L = \{z = x + yi \mid ax + by + c = 0; (a, b) \neq (0, 0)\}$$

命題 1.11. 直線 L は $\lambda = a + bi \neq 0$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ とおけば,

$$L : \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0 \quad \cdots \quad (1.5.2)$$

と表される.

証明.

$$\bar{\lambda} \cdot z = (a - bi)(x + yi) = ax + by + (ay - bx)i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0 \iff ax + by + c = 0$$

□

命題 1.12. 複素平面上の異なる 2 点 α, β を通る直線 L の方程式は

$$L : (\overline{\beta - \alpha})(z - \alpha) = (\beta - \alpha)(\overline{z - \alpha}) \iff \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

で与えられる.

証明. 複素平面上の異なる 2 点 α, β を通る直線 L 上の任意の点を z とする.

ベクトル $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と $\overrightarrow{\alpha z}$ は平行ゆえ

$$\overrightarrow{\alpha z} = k \overrightarrow{\alpha\beta} \iff z - \alpha = k(\beta - \alpha)$$

を満たす実数 $k \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\therefore \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} = k \text{ (実数)} \quad \therefore \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

今,

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}{|\beta - \alpha|^2} \right) = \frac{\operatorname{Im} \{ (z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \}}{|\beta - \alpha|^2}$$

故に

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0 \iff \operatorname{Im} \{ (z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \} = 0$$

ここで

$$0 = \operatorname{Im} \{ (z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \} = 0 = \frac{(z - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{z} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha)}{2i} = 0$$

こうして, L の方程式は

$$L: (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha) = (\beta - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) \stackrel{\text{同値}}{\iff} \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

と表される. $\square$

命題 1.13. 複素平面上の点 α, β を通る直線 L 以外の点 γ から直線 L に下した垂線の長さ h と垂線の足 $H(w)$ について

▶ 垂線の長さ h :

$$h = \frac{1}{2} \frac{|(\gamma - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) - (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\gamma - \beta)|}{|\beta - \alpha|} = |\beta - \alpha| \cdot \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \right|$$

▶ 垂線の足 $H(w)$:

$$w = \gamma - i(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$$

特に, L に関して γ と対称の位置にある点を γ^* とすると,

$$\gamma^* = \gamma - 2i(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$$

証明. 複素平面上の 2 点 α, β を通る直線の方程式は

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0 \iff (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

であつた. $z = x + yi$, $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ とおけば

$$\frac{(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha) - (\beta - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{2i} = 0 \iff (d - b)(x - a) - (c - a)(y - b) = 0$$

$$\therefore (d - b)x - (c - a)y - a(d - a) + b(c - a) = 0$$

を得る. $\gamma = p + qi$ から下した垂線の長さ h は

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{|(d-b)p - (c-a)q - a(d-a) + b(c-a)|}{\sqrt{(d-a)^2 + (c-a)^2}} \\
 &= \frac{|(d-b)(p-a) - (c-a)(q-b)|}{\sqrt{(d-a)^2 + (c-a)^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{|(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha)|}{|\beta - \alpha|} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|2i \operatorname{Im}(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})|}{|\beta - \alpha|} \\
 &= \frac{|\operatorname{Im}(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})|}{|\beta - \alpha|} \\
 &= |\beta - \alpha| \cdot \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \right|
 \end{aligned}$$

次に垂線の足 w を求めよう. まず, α, β を通る直線の方程式は

$$L: \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0.$$

一方, γ を通り直線 L に垂直な直線 N の方程式は

$$N: \operatorname{Re} \left(\frac{z - \gamma}{\beta - \alpha} \right) = 0 \quad \dots \quad (*)$$

(*) の証明

ベクトルとして $z - \gamma$ と $\beta - \alpha$ は直交しているのでその内積

$$\operatorname{Re} \left\{ (\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \gamma) \right\} = 0$$

である.

$$\operatorname{Re} \overline{(\beta - \alpha)}(z - \gamma) = \frac{1}{|\beta - \alpha|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{z - \gamma}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

$|\beta - \alpha| \neq 0$ より, γ を通り L に垂直な直線の方程式は

$$N: \operatorname{Re} \left(\frac{z - \gamma}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

□

よって, L と N の交点は連立一次方程式

$$\begin{cases} \text{L: } \operatorname{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\bar{z}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}} = 0 \\ \text{N: } \operatorname{Re}\left(\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha}\right) = \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\bar{z}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

の解である. そこで,

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

と変形して, 次の連立一次方程式を解く.

$$\begin{cases} \text{(L): } \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} - \frac{\bar{z}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}} = -\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{\bar{\gamma}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}} \\ \text{(N): } \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} + \frac{\bar{z}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}} = 0 \end{cases}$$

(L)+(N) より

$$2\frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} = -\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\bar{\gamma}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}\right) = -2i\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$\therefore \frac{z-\gamma}{\beta-\alpha} = -i\operatorname{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

を得る. 従って, 交点 $H(w)$ は

$$w = \gamma - i(\beta - \alpha) \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$

□

注意 1.8 (命題 1.13 再考). 命題 1.13 で示した垂線の長さや垂線の足の公式について別の表現してみる.

- 複素平面の座標 $z = x + yi$ に対し. 複素平面上の直線 L は一般に $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ に対し,

$$L : ax + by + c = \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0$$

- 点 α が L 上にあれば α に対し, $\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot \alpha) + c = 0$.

$$\therefore \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = \operatorname{Re}\{\bar{\lambda} \cdot (z - \alpha)\} = 0$$

このこと（上式右辺）はベクトルとして λ と $z - \alpha$ が垂直であることを示している．今、 $i\lambda$ は λ を正の周りに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させているので、ベクトルとして $i\lambda$ と λ は直行している．よって、直線 L 外の点 z_0 を通り L に直交する直線の方程式 N は $i\lambda$ と N が直交することに注意すれば、

$$N : \operatorname{Re} \{i\bar{\lambda} \cdot (z - z_0)\} = 0$$

と表される．一方、

$$\operatorname{Re} \{i\bar{\lambda} \cdot (z - z_0)\} = \operatorname{Im} \{\bar{\lambda} \cdot (z - z_0)\}$$

ゆえ、最終的に

$$N : \operatorname{Im} \{\bar{\lambda} \cdot (z - z_0)\} = 0$$

と表される．

► 直線 $L : \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0 \iff ax + by + c = 0$ に L 上にない点

$z_0 = x_0 + iy_0$ に下した垂線の長さ h は

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

であった．

$$|ax_0 + by_0 + c| = |\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0) + c|, \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda|$$

より、

$$h = \frac{|\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0) + c|}{|\lambda|}$$

垂線の足 w_0 は L と $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(z - z_0) = 0$ との交点である、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c &= \frac{1}{2}(\bar{\lambda} \cdot z + \lambda \cdot \bar{z} + 2c) \\ &= \frac{1}{2}\{\bar{\lambda} \cdot (z - z_0) + \lambda \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) + \bar{\lambda} \cdot z_0 + \lambda \cdot \bar{z}_0 + 2c\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{\bar{\lambda} \cdot (z - z_0)\} &= \frac{1}{2i}\{\bar{\lambda} \cdot (z - z_0) - \lambda \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)\} = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \bar{\lambda} \cdot (z - z_0) + \lambda \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = -(\bar{\lambda} \cdot z_0 + \lambda \cdot \bar{z}_0 + 2c) = -2\{\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0) + c\} & \cdots \quad (L) \\ \bar{\lambda} \cdot (z - z_0) - \lambda \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 & \cdots \quad (N) \end{cases}$$

$$\therefore 2 \cdot \bar{\lambda} \cdot (z - z_0) = -2 \cdot \{\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0 + c)\}$$

$$\bar{\lambda} \cdot (z - z_0) = -\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0 + c) \quad \therefore \quad z = z_0 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0 + c)$$

こうして、交点

$$w_0 = z_0 - \frac{1}{\bar{\lambda}} \cdot \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z_0 + c)$$

1.5.1 補足

異なる 2 点 α, β を通る複素平面上の直線の方程式は

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

であった、一方、複素平面上の直線は座標 $z = x + yi$ に対し

$$L: \quad ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 \neq 0)$$

と表される。そこで $\lambda = a + bi$ とおくと、

$$L: \quad ax + by + c = 0 \iff \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0$$

で会った。そこで、直線 L 上に異なる 2 点 α, β をとる。このとき、 $z = \alpha$ を代入して $\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \cdot \alpha) + c = 0$ 。よって、 L は

$$L: \quad \operatorname{Re} \{ \bar{\lambda} \cdot (z - \alpha) \} = 0 \quad \cdots \quad (i)$$

と表される。次に、 β も L 上の点より

$$\operatorname{Re} \{ \bar{\lambda} \cdot (\beta - \alpha) \} = 0.$$

これは、ベクトルとして λ と $\beta - \alpha$ が垂直を意味する。一方、 $i(\beta - \alpha)$ は $\beta - \alpha$ に垂直であるから、 λ と $i(\beta - \alpha)$ はベクトルとして平行、即ち、

$$\lambda = k \{ i(\beta - \alpha) \} \quad (k \in \mathbb{R})$$

と表される。故に,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \{ \bar{\lambda} \cdot (z - \alpha) \} &= k \operatorname{Re} \{ \overline{i(\beta - \alpha)} \cdot (z - \alpha) \} \\
 &= k \operatorname{Re} \{ -i(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \cdot (z - \alpha) \} = -k \operatorname{Re} \{ i(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \cdot (z - \alpha) \} \\
 &= k \operatorname{Im} (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \cdot (z - \alpha) \quad (\because \operatorname{Re} iw = -\operatorname{Im} w \text{ for } w \in \mathbb{C}) \\
 &= k \operatorname{Im} \left(|\beta - \alpha|^2 \cdot \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = k |\beta - \alpha|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right)
 \end{aligned}$$

以上より,

命題 1.14. α, β が直線 $L: ax + by + c = 0$ 上の点ならば,

(1) 実数 $k \in \mathbb{R}$ があって, $\lambda = a + bi = k i \cdot (\beta - \alpha)$ とできる.

(2) 直線 L は次のように二通りに表される:

$$L: \operatorname{Re} (\bar{\lambda} \cdot z) + c = 0 \iff \operatorname{Re} \bar{\lambda}(z - \alpha) = 0 \iff \operatorname{Im} \left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = 0$$

問題 1.2. 複素平面上の鋭角三角形 $\triangle A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$ の頂点 C から辺 AB に下した垂線の足 $H(w)$ を求めよ.

証明. 命題 1.13 より

$$w = \gamma - i(\beta - \alpha) \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$$

問題 1.3. $\alpha = 1+i, \beta = 3+2i, \gamma = 2+3i$ とする. このとき, $\triangle A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$ の頂点 C から辺 AB に下した垂線の足 $H(w)$ を求めよ.

解.

$$w = \gamma - i(\beta - \alpha) \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) = (2 + 3i) - i(2 + i) \operatorname{Im} \left(\frac{1 + 2i}{2 + i} \right) = \frac{13 + 9i}{5}$$

1.6 複素平面上の三角形の外心, 内心, 垂心, 重心

複素平面上の α, β, γ を頂点とする三角形 $\triangle ABC = \triangle A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$ の内心 I において, 内心 (内接円の中心), 外心 (外接円の中心), 垂心 (各頂点から対辺に下した3つの垂線の交点), 重心を表す複素数を z を求めよう.

1.6.1 内心

内心はそれぞれの角の2等分線の交点(または、各辺の垂直2等分線の交点)である。各辺長さを

$$a = |\beta - \gamma| = \overline{BC}, \quad b = |\gamma - \alpha| = \overline{AC}, \quad c = |\alpha - \beta| = \overline{AB}$$

とおく。今、 $\angle A$ の2等分線と辺 BC との交点を $D(\delta)$ とする。このとき、三角形 $\triangle ABD, \triangle ADC$ の面積をそれぞれ S_1, S_2 とすると、 $S_1 : S_2 = c : b$ ゆえ、 $BD : DC = c : b$ である。よって、

$$\delta = \frac{b\beta + c\gamma}{b + c}$$

$\angle B$ の2等分線と線分 AD の交点 $I(\delta)$ が内心である。今、 $\overline{BD} = \frac{ca}{b + c}$ より、三角形 $\triangle ABD$ において、

$$\overline{DI} : \overline{IA} = \frac{ca}{b + c} : c$$

よって、内心 z は

$$z = \frac{c\delta + \frac{ca}{b + c}\alpha}{c + \frac{ca}{b + c}} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c}$$

ここで、 $a = |\beta - \gamma|$, $b = |\gamma - \alpha|$, $c = |\alpha - \beta|$ より、内心は

$$z = \frac{|\beta - \gamma|\alpha + |\gamma - \alpha|\beta + |\alpha - \beta|\gamma}{|\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha| + |\alpha - \beta|}$$

で与えられる。

1.6.2 外心

外接円の中心を $P(z)$ とおくと、

$$|z - \alpha| = |z - \beta| = |z - \gamma|$$

$$|z - \alpha|^2 = |z - \beta|^2 \iff (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + (\alpha - \beta)\bar{z} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \quad \cdots (1)$$

$$|z - \alpha|^2 = |z - \gamma|^2 \iff (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z + (\gamma - \alpha)\bar{z} = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \quad \cdots (2)$$

$(\gamma - \alpha) \times (1) - (\alpha - \beta) \times (2)$ より

$$\begin{aligned} \{(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha)\}z &= \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)\}z \\ &= |\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) &= |\beta - \alpha|^2 \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}}{\bar{\beta} - \bar{\alpha}} \right) \\ &= 2i |\beta - \alpha|^2 \operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \end{aligned}$$

α, β, γ は一直線上にないので

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right) \neq 0$$

$$\therefore (\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) = \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta) \neq 0.$$

こうして, 外心は

$$z = \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}$$

で与えられる.

1.6.3 垂心

$\triangle A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$ の垂心を $P(z)$ を表す複素数 z を求めよう. 簡単のため, 頂点 A, B, C は原点 0 中心の単位円周上にあるとする. 即ち, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ とする. いま, ベクトルとして, $z - \alpha$ と $\beta - \gamma$, $z - \beta$ と $\gamma - \alpha$ は垂直である. よって, 内積をとって,

$$\operatorname{Re} \{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})(z - \alpha)\} = \operatorname{Re} \{(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(z - \beta)\} = 0$$

$$\operatorname{Re} \{(\bar{\beta} - \bar{\gamma})(z - \alpha)\} = 0 \iff (\bar{\beta} - \bar{\gamma})(z - \alpha) + (\beta - \gamma)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = 0$$

$$\operatorname{Re} \{(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(z - \beta)\} = 0 \iff (\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(z - \beta) + (\gamma - \alpha)(\bar{z} - \bar{\beta}) = 0$$

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1 \text{ より,}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}, \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

よって

$$(\bar{\beta} - \bar{\gamma})(z - \alpha) + (\beta - \gamma)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)(z - \alpha) + (\beta - \gamma)\left(\bar{z} - \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})(z - \beta) + (\gamma - \alpha)(\bar{z} - \bar{\beta}) = \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)(z - \beta) + (\gamma - \alpha)\left(\bar{z} - \frac{1}{\beta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)(z - \alpha) + (\beta - \gamma)\left(\bar{z} - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \iff \alpha z - \alpha^2 = \alpha\beta\gamma\bar{z} - \beta\gamma$$

$$\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right)(z - \beta) + (\gamma - \alpha)\left(\bar{z} - \frac{1}{\beta}\right) = 0 \iff \beta z - \beta^2 = \alpha\beta\gamma\bar{z} - \alpha\gamma$$

辺々差し引いて $(\alpha - \beta)z - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \gamma(\alpha - \beta)$ ゆえに, 垂心は

$$z = \alpha + \beta + \gamma$$

で与えられる.

1.6.4 重心

重心 $G(z)$ は中線を $2:1$ に内分する点より, BC の中点を $M(\delta)$ とする. そのとき, $\delta = \frac{\beta + \gamma}{2}$. $AG : GM = 2 : 1$ より $z = \frac{\alpha + 2 \frac{\beta + \gamma}{2}}{2 + 1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ ゆえに重心は

$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

で与えられる.

第2章 複素微分積分学ガイダンス

読者への注意

第2章では複素関数の微積分について、これから複素関数論を受講しようとする主に大学初年次学生向けに事前学習や理論を概観するために書き上げられたものであり、証明や解説はなるべく省略もしくは大雑把な解説に留め、直感的（感覚的に）に理解に重点を置いた。さらに深く理解したいと思う学生は専門の講義を受けるか関数論の教科書で補ってほしい。

複素数 z に対して唯一つの複素数値 w を対応させる規則を複素関数と呼び、 $w = f(z)$ と表す。ここで、 $f(z)$ の定義域 ($f(z)$ が定義されるような z の集まり) については当分曖昧なままにしておく。

2.1 複素関数の例

2.1.1 多項式関数（多項式で定義される関数）

$P(z)$ が z の n 次多項式

$$P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots c_{n-1} z + c_n \quad (c_0 \neq 0)$$

で定義される関数を n 次多項式関数 (polynomial function) と呼ぶ。ここに、 $c_0, c_1, \dots, c_n$ は複素数又は実数とする。 n を関数 $P(z)$ の次数と呼び、 $n = \deg P$ と表す。

例 2.1.1. (1) $P(z) = (1+i)z + 1$ (一次関数)

(2) $P(z) = iz^2 - 3z + (2+5i)$ (二次関数)

(3) $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ (三次関数)

2.1.2 有理関数（多項式の商で定義される関数）

$R(z)$ が z の多項式 $P(z)$, $Q(z)$ の商（比）

$$R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad P(z) \neq 0$$

で定義される関数を有理関数（rational function）と呼ぶ。但し， $\deg P \geq 1$ 。

例 2.1.2. (1) $R(z) = \frac{z}{z+1}$ （一次分数関数）

$$(2) \quad R(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad-bc \neq 0) \text{（一次分数関数）}$$

$$(3) \quad R(z) = \frac{z^2+z+1}{z^3+5}$$

$$(4) \quad R(z) = \frac{z^4+z+1}{z^3+z+2}$$

2.1.3 指数関数

ネピア数 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq 2.71828$ に対し

$$f(z) = e^z$$

を指数関数という。今， $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすれば

$$f(z) = \underline{e^z} = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = \underline{e^x(\cos y + i \sin y)}$$

$\sin \theta, \cos \theta, e^{i\theta}$ のテーラー展開

実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (n \geq 0)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (n \geq 0)$$

$\sin \theta, \cos \theta$ のテーラー展開（無限級数展開）は次の $e^{i\theta}$ のテーラー展開から従う。

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

の実部と虚部の比較により得られる。

2.2 複素領域

2.2.1 特殊な複素領域

例 2.2.1. (1) **円板** : $D(\alpha : r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ (α 中心半径 $r > 0$ の開円板という)。

特に $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を単位円板という。円板を単に $|z - \alpha| < r$ で表すこともある。このとき、 $|z - \alpha| \leq r$ を**閉円板**という。

(2) **矩形** (α 中心の長方形) : $\alpha = a + bi$ に対し、**開矩形**とは集合

$$R(\alpha : r_1, r_2) = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : |x - a| < r_1 \text{ \& } |y - b| < r_2\}$$

のこと。但し、 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $r_1 > 0, r_2 > 0$ 。

特に、 $R = \{z \in \mathbb{C} : |x| < r \text{ \& } |y| < r\}$ とおく。また、 $\overline{R} = \{z \in \mathbb{C} : |x| \leq r \text{ \& } |y| \leq r\}$ を**閉矩形**という。

(3) **円環** : $T(\alpha : r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - \alpha| < R\}$, $\overline{T}(\alpha : r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - \alpha| \leq R\}$ をそれぞれ**開円環**, **閉円環**という。

2.3 複素数列

例 2.3.1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \geq 1)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0 \quad (r > 1)$

定義 2.1. $\{z_n\}$ を複素数列とする. そこで

$$z_n = x_n + iy_n \quad (x_n, y_n \in \mathbb{R}), \quad \alpha = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

とおく. 複素数列 $\{z_n\}$ は α に収束するとは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - \alpha| = 0$$

のときをいう.

注意 2.1. $|z_n - \alpha| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - \alpha| = 0 \stackrel{\text{必要十分}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - b| = 0$$

を得る.

例 2.3.2. $z_n = \left(\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} \right)^n$ とおく. このとき,

$$|z_n| = \left| \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} \right|^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = 0$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$

命題 2.1. 複素数列 $\{z_n\}, \{w_n\}$ および定数 c に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \beta$ とする. そのとき,

$$(2.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot z_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \cdot \alpha$$

$$(2.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha \pm \beta$$

証明. (2.1.2) を示そう. 三角不等式より

$$|(z_n \pm w_n) - (\alpha \pm \beta)| = |(z_n - \alpha) \pm (w_n - \beta)| \leq |z_n - \alpha| + |w_n - \beta|.$$

仮定より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - \alpha| = \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - \beta| = 0.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(z_n \pm w_n) - (\alpha \pm \beta)| = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = \alpha \pm \beta.$$

□

2.3.1 (複素) 関数の極限值と連続性

- ▶ $z \rightarrow \alpha \xLeftrightarrow{\text{同義}} |z - \alpha| \rightarrow 0$: z は α に限りなく近づくという意味 (曖昧な表現であるが)
- ▶ $f(z) \rightarrow A \xLeftrightarrow{\text{同義}} |f(z) - A| \rightarrow 0$: $f(z)$ は A に限りなく近づくという意味.
- ▶ $z \rightarrow \alpha$ ならば $f(z) \rightarrow A$: z が α に近づくとき $f(z)$ が A に限りなく近づく ($f(z)$ は A に収束する) ことであり,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A$$

と表わす. この意味は, $z \neq \alpha$ が α に近づき方に依らず限りなく α に近づくとき, $f(z)$ は有限確定値 A に限りなく近づくという意味である.

注意 2.2. α に近づく異なる複素数列 $\{z_n\}$, $\{z_n^*\}$ に対し,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^*) = A^*$$

となることもあり得る. この時は極限值は存在しない (収束しない) という.

問. $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$ の収束性について調べよ. $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \infty$ とは限らない!

収束発散

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \begin{cases} \text{有限値} & \begin{cases} \text{確定値 (唯一つの値)} \implies \text{収束} \\ \text{不確定 (値が確定しない)} \implies \text{発散} \end{cases} \\ \text{無限大 } \infty \end{cases}$$

例 2.3.3. (1) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z + i)(z - i)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i$ (収束)

(2) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$ (不確定). ここで, $z = re^{i\theta}$ と極形式で表す. (θ は確定した値でない!). この場合, 極限値は存在しないので収束しない.

(3) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 1}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z + \frac{1}{z^2} \right) = \infty$ (発散)

注意 2.3. $z - \alpha$ を極形式で表すと

$$z - \alpha = |z - \alpha| e^{i \operatorname{Arg}(z - \alpha)}$$

$$\therefore z = \alpha + re^{i\theta} \quad (\text{但し, } r = |z - \alpha|, \theta = \operatorname{Arg}(z - \alpha))$$

と表される.

$$z \rightarrow \alpha \iff r = |z - \alpha| \rightarrow 0 \quad \therefore r \rightarrow 0$$

こうして,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A \xLeftrightarrow[\text{同義}]{r \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} f(\alpha + re^{i\theta}) = A$$

定義 2.2. 領域 Ω (円板, 矩形, 円環をイメージせよ) で定義された複素関数 $f(z)$ が点 $\alpha \in \Omega$ で連続であるとは

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha) \quad \text{正確には} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ \Omega \ni z \neq \alpha}} f(z) = f(\alpha)$$

のときをいう. 勿論, $\lim_{z \rightarrow \alpha} |f(z) - f(\alpha)| = 0$ と定義しても良い.

注意 2.4. 数列を用いて, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ なる 全ての 複素数列 $\{z_n\} \subset \Omega$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\alpha)$$

と定義しても良い.

注意 2.5. 連続性を標語的に言えば「**極限值 = 関数値**」ということである.

こうして, $f(z)$ が領域 Ω で連続とは次の3つの条件が満たされるとき:

- (1) 各点 $\alpha \in \Omega$ に対し $f(\alpha)$ は有限確定値.
- (2) $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = A$ (有限確定値 A に収束する).
- (3) $A = f(\alpha)$ (極限值と関数値が一致する).

例 2.3.4. $\alpha \neq 0$ とする. そのとき,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - \alpha^2}{z - \alpha} & (z \neq \alpha) \\ \alpha & (z = \alpha) \end{cases}$$

は $z = \alpha$ で連続でない.

証明. $z \neq \alpha$ ならば $\frac{z^2 - \alpha^2}{z - \alpha} = (z + \alpha)$ なので,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} \frac{z^2 - \alpha^2}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z + \alpha) = 2\alpha$$

一方, $f(\alpha) = \alpha$ かつ $\alpha \neq 0$ 故,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} f(z) = 2\alpha \neq \alpha = f(\alpha)$$

故に, $f(z)$ は $z = \alpha$ で連続でない. □

さらに,

命題 2.2. 領域 Ω で連続な複素関数 $f(z)$, $g(z)$ および定数 c , $\alpha \in \Omega$ に対し,

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = f(\alpha), \quad \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) = g(\alpha)$$

ならば,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \alpha} c \cdot f(z) &= c \cdot \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = c \cdot f(\alpha) \\ \lim_{z \rightarrow \alpha} (f(z) \pm g(z)) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) = f(\alpha) \pm g(\alpha) \\ \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \quad \left(\text{但し, } g(\alpha) \neq 0 \right) \end{aligned}$$

を得る.

例 2.3.5. (1) $\lim_{z \rightarrow i} (z^2 + z + 1) = i^2 + i + 1 = i$

(2) $\lim_{z \rightarrow \alpha} (c_n z^n + \cdots + c_{n-1} z + c_n) = c_0 \alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \alpha + c_n$

(3) $\lim_{z \rightarrow \alpha} (z^2 + 1)e^z = (\alpha^2 + 1)e^\alpha$

(4) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+i}{z+\sqrt{3}i} = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

次に, 点 $\alpha \in \Omega$ に対し, 関数 $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ は Ω 方から α を除いたところ, 即ち, $\alpha \neq z \in \Omega$ で連続である. その時, 次の極限值

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} \frac{f(z)}{z-\alpha}$$

については, 収束, 発散または無限大の何れかが生じる.

補題 2.1. $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} \frac{f(z)}{z-\alpha}$ が収束するための必要条件は $f(\alpha) = 0$ であるが, $f(\alpha) = 0$ は十分条件とは限らない.

例 2.3.6 (十分ではないことの例). $z = \alpha + re^{i\theta}$, ($\theta = \text{Arg}(z-\alpha)$, $r = |z-\alpha|$)

とおく. $\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha}} \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{z - \alpha} = e^{-2\theta}$ は分子は $z = \alpha$ を代入して 0 であるが, 極限値は θ に依存し不確定である. ゆえに収束しない.

第3章 複素微分積分四山ばなし

3.1 複素微分可能性

定義 3.1. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で連続な複素関数 $f(z)$ に対し, 極限值

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha \in \Omega}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \iff \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \neq 0}} \frac{f(\alpha + \lambda) - f(\alpha)}{\lambda}$$

(但し, $\lambda = h + ki$) が収束する (有限確定値), 即ち, 極限值が有限で且つ一意 (唯一つ) のとき, $f(z)$ は $z = \alpha$ で複素微分可能という. このとき, 極限值 $f'(z)$ に因んで $f'(\alpha)$ で表す. 即ち,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \alpha \\ z \neq \alpha \in \Omega}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{df}{dz}(\alpha)$$

定義 3.2. 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で連続な関数 $f(z)$ が Ω の各点で複素微分可能のとき $f(z)$ は Ω で正則 (正則関数) と呼ばれる.

例 3.1.1. $f(z) = z$ は正則関数であるが $\overline{f(z)} = \bar{z}$ は正則ではない.

証明.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{z} = 1 \quad \therefore \quad f'(z) = 1$$

一方,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

より θ は不確定なので, 極限值は存在しない.

次に, $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおく. 複素関数

$$f(z) = f(x + yi) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

と表す. このとき, $P(x, y), Q(x, y)$ は2変数 x, y の実数値関数である. 即ち,

$$\operatorname{Re} f(z) = P(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = Q(x, y)$$

である.

偏微分係数および偏導関数

2変数の実数値関数 $P(x, y)$ および点 $(x, y) = (a, b)$ に対し,

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(a+h, b) - P(a, b)}{h} = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \text{ (有限確定値)} \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(a, b+k) - P(a, b)}{k} = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) \text{ (有限確定値)} \end{cases}$$

のとき, それぞれ, $P(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で変数 x に関して (変数 y に関して) **偏微分可能**という. また, $\frac{\partial P}{\partial x}(a, b), \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)$ をそれぞれ (a, b) における x に関する ((a, b) における y に関する) **偏微分係数**という. また,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(x, y+k) - P(x, y)}{k}$$

をそれぞれ x に関する (y に関する) **偏導関数**という. 要するに,
 $\frac{\partial P}{\partial x}$ は $P(x, y)$ を x の関数と見て (そのとき y は定数と思う) x で微分したもので, $\frac{\partial P}{\partial y}$ は $P(x, y)$ を y の関数と見て (そのとき x は定数と思う) y で微分したものである.

例 3.1.2. (1) $f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$$\therefore P(x, y) = x^2 - y^2, \quad Q(x, y) = 2xy$$

(2) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$$\therefore P(x, y) = e^x \cos y, \quad Q(x, y) = e^x \sin y$$

問. $f(z)$ も $\overline{f(z)}$ もが正則ならば $f(z)$ は定数関数であることを示せ.

3.2 複素微分可能関数とコーシー・リーマンの関係式

定理 3.1. $z = x + yi$, $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ とおく. $f(z)$ が $\alpha = a + bi$ で複素微分可能ならば

$$\text{コーシー・リーマンの関係式 (CR) : } \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) \end{cases}$$

が成立する.

証明. $\lambda = h + ki$ ($k, l \in \mathbb{R}$) とおくと, $\lambda \rightarrow 0 \iff (h, k) \rightarrow (0, 0)$.

$$f'(\alpha) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(z + \lambda) - f(z)}{\lambda} \quad (\text{収束})$$

収束することの注意

まず, 極限値は λ が 0 に 近づく近づき方に依らず 有限確定値 $f'(\alpha)$ に近づくという意味なので, 特に, 実軸方向から 0 に近づける場合 $(h, 0) \rightarrow (0, 0)$ と虚軸方向から 0 に近づける場合 $(0, k) \rightarrow (0, 0)$ のどちら側から近づけても 極限値は同じ値 でなければならない.

そ

ここでこの2方向からの極限值（同じ極限值）を求めよう.

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{P(a+h, b) + iQ(a+h, b)\} - \{P(a, b) + iQ(a, b)\}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{P(a+h, b) - P(a, b)\} + i\{Q(a+h, b) - Q(a, b)\}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(a+h, b) - P(a, b)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(a+h, b) - Q(a, b)}{h} \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) \\
f'(\alpha) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{P(a, b+k) + iQ(a, b+k)\} - \{P(a, b) + iQ(a, b)\}}{ik} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{P(a, b+k) - P(a, b)\} + i\{Q(a, b+k) - Q(a, b)\}}{ik} \\
&= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(a, b+k) - P(a, b)}{ik} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(a, b+k) - Q(a, b)}{ik} \\
&= -i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{P(a, b+k) - P(a, b)}{k} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(a, b+k) - Q(a, b)}{k} \\
&= -i \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) = -i \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)$$

実数部および虚数部を比較して

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) \end{cases}$$

を得る.

□

系 3.1.

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P(a, b) + iQ(a, b) \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) \\
 f'(\alpha) &= -i \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \\
 &= \frac{1}{i} \left\{ \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b) \right\} \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \left(P(a, b) + iQ(a, b) \right) \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)
 \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{df}{dz}(\alpha) = f'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)$$

定義 3.3 (新たな偏微分作用素の導入).

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

とおく. このとき,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

定義 3.4. 領域 Ω の各点で複素微分可能な関数を**正則関数**という.

定義 3.5. 正則関数 $f(z)$ ($z = x + yi$) に対し,

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

を $f(z)$ の**導関数**という. 導関数の $z = \alpha$ での値 $f'(\alpha)$ を**複素微分係数**とよぶ.

定理 3.2. $f(z)$ が正則関数ならばコーシー・リーマンの関係式 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ が成立する. 実は, 逆も正しいが, その証明は単純ではない.

定理 3.3. 2 変数連続関数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ が各点で存在し, コーシー・リーマンの関係式

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

を満たせば $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ は各点で連続で,

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

は正則関数である.

例題 3.1. (1) $f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + (2xy)i = P(x, y) + iQ(x, y)$ に対し, $P(x, y) = x^2 - y^2$, $Q(x, y) = 2xy$ より,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

コーシーリーマンの関係式が成立ので, $f(z) = z^2$ は正則関数である.

(2) $f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ に対し, $P(x, y) = e^x \cos y$, $Q(x, y) = e^x \sin y$ より,

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

コーシーリーマンの関係式が成立ので, $f(z) = e^z$ は正則関数である

実変数関数の時と同様に, 複素関数に対しても, 関数の和, 積, 商の微分の公式が成り立つ.

命題 3.1 (公式). $f(z)$, $g(z)$ を正則関数とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を定数とする.

$$(1) \{\alpha f(z) + \beta g(z)\}' = \alpha f'(z) + \beta g'(z).$$

$$(2) \{f(z) \cdot g(z)\}' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

$$(3) \left\{ \frac{g(z)}{f(z)} \right\}' = \frac{g'(z) \cdot f(z) - g(z) \cdot f'(z)}{f'(z)^2}$$

例題 3.2.

$$(1) f(z) = z^3 + e^z + 1 \longrightarrow f'(z) = 3z^2 + e^z.$$

$$(2) f(z) = z^2 e^z \longrightarrow f'(z) = 2z \cdot e^z + z^2 \cdot e^z = (z^2 + 2z)e^z.$$

$$(3) f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} \longrightarrow f'(z) = \frac{3z^2(z^2 + 1) - 2z(z^3 + 1)}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z(z^3 + 3z - 2)}{(z^2 + 1)^2}.$$

ラプラシアン

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

例 3.2.1. $\varphi(z) = \log(1 + |z|^2) = \log(1 + z\bar{z}) \geq 0$ に対し

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{1 + |z|^2} \right) = \frac{1}{(1 + |z|^2)^2}$$

一方, $z = x + yi$ とおくと, $\varphi(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$. よって,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 4x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4}{(1 + |z|^2)^2} \\ &= 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \end{aligned}$$

実変数を使って計算しても複素変数を使って計算しても結果は同じなので簡単な方で計算する.

第4章 複素積分

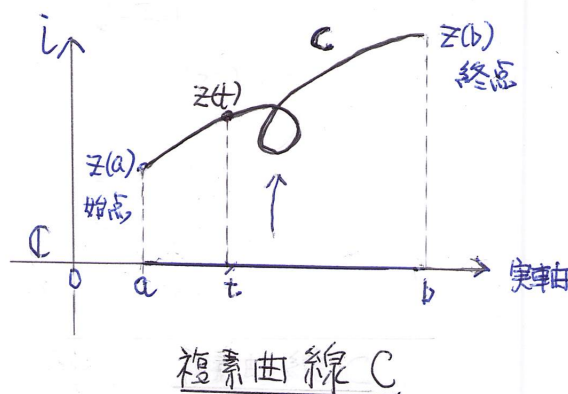
4.1 複素曲線

4.1.1 複素曲線の定義と例

複素平面を座標を明確にするために z -平面 ($z = x + yi$ $x, y \in \mathbb{R}$) と呼び, z を複素平面の複素座標と呼ぶ. z -平面内の曲線 (複素曲線という) C とは, 次のような媒介変数表示される点の軌跡を言う: え

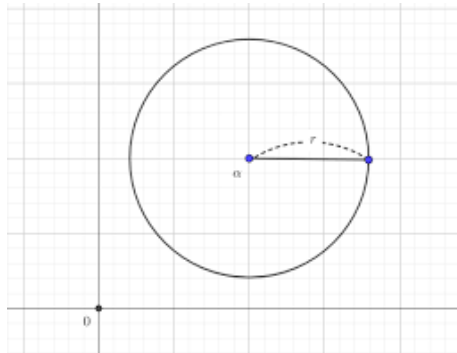
$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

ここで, $z(a)$ を C の始点, $z(b)$ を C の終点という.



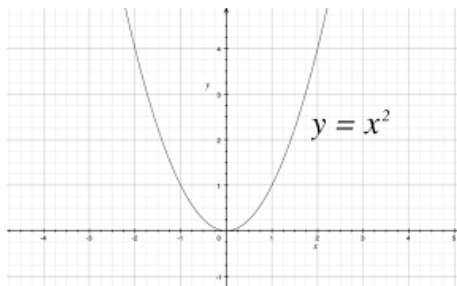
例 4.1.1. (1) $\alpha = a + bi$ 中心とし半径 $r > 0$ の円周 $C: |z - \alpha| = r$ は

$$z(t) = \alpha + re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \iff \begin{cases} x(t) = a + r \cos t \\ y(t) = b + r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



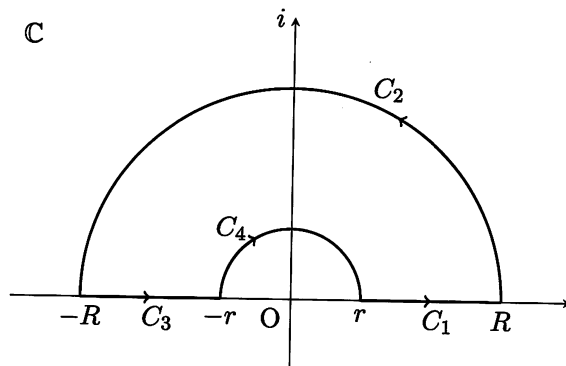
(2) z 平面上の放物線

$$C : y = x^2 \ (0 \leq x \leq 1) \iff z(t) = t^2 + it \ (0 \leq t \leq 1) \iff \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \ (0 \leq t \leq 1)$$



(3)

$$C = \begin{cases} C_1 : z(t) = t \ (r \leq t \leq R) \\ C_2 : z(t) = Re^{it} \ (0 \leq t \leq \pi) \\ C_3 : z(t) = t \ (-R \leq t \leq -r) \\ -C_4 : z(t) = re^{i(\pi-t)} = re^{-it} \ (0 \leq t \leq \pi) \text{ (負の向き!)} \end{cases}$$



注意 4.1. 閉区間 $[a, b]$ から z -平面 $\mathbb{C}$ への連続な写像 (連続な複素関数)

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \varphi(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$$

の像集合

$$C = \varphi([a, b]) = \{\varphi(t) \mid a \leq t \leq b\} = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$$

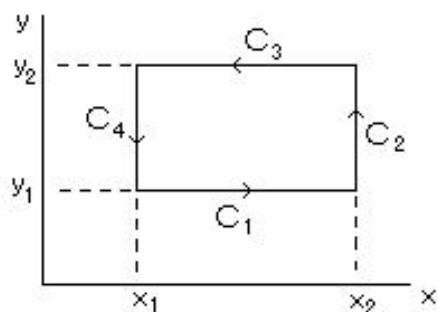
または写像 $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ を複素曲線と呼ぶこともある.

定義 4.1. ▶ 複素曲線 $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) が滑らかであるとは $x(t), y(t)$ が区間 $[a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能で加えて $z'(t) := x'(t) + jy'(t) \neq 0$ のとき.

▶ 複素曲線 $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) が区分的に滑らか (所々にカドがあり, カド以外は滑らか) とは: (a, b) 内の有限個の点 $t_1, t_2, \dots, t_N$ が存在し, $z(t)$ は开区間 $(a, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_N, b)$ で微分可能のとき.

例 4.1.2. 4つの角を持つ曲線

$$z(t) = \begin{cases} \{(1-4t)x_1 + 4tx_2\} + iy_1 : & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}) & \cdots & C_1 \\ x_2 + i\{(2-4t)y_1 + (4t-1)y_2\} : & (\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{2}{4}) & \cdots & C_2 \\ \{(4t-2)x_1 + (3-4t)x_2\} + iy_2 : & (\frac{2}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}) & \cdots & C_3 \\ x_1 + i\{(4t-3)y_1 + (4-4t)y_2\} : & (\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{4}{4}) & \cdots & C_4 \end{cases}$$



4.1.2 複素曲線の向き

$C: z(t) \ (a \leq t \leq b)$ を (連続な) 複素曲線とする. そのとき,

$$z(-t + a + b) \ (a \leq t \leq b)$$

を C の逆向き曲線といい, $-C$ で表す. このとき, $-C$ の始点 $= C$ の終点, $-C$ の終点 $= C$ の始点である.

$s = -t + a + b$ とおくと, $a \leq t = a + b - s \leq b$ より $a \leq s \leq b$. よって C の逆向き $-C$ は

$$-C: z(s): (a \leq s \leq b), s := a + b - t$$

と表せる.

$$-(-C) = z(-(-t + a + b) + a + b) = z(t) \quad \therefore \quad -(-C) = C$$

を得る.

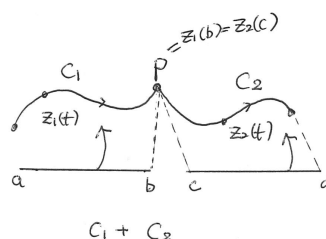
例 4.1.3. 円 $C: z(t) = re^{it} \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ に対し, C の逆向き曲線は

$$-C; z(2\pi - t) = re^{(2\pi - t)i} = re^{-it} \ (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と表される. なるべく文字は少ない方が混乱を避けられるので, C のパラメータを使って逆向き $-C$ を表した方がよい.

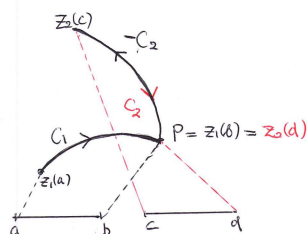
4.1.3 複素曲線の連結

二つの複素曲線 $\begin{cases} C_1 : z_1(t) \ (a \leq t \leq b) \\ C_2 : z_2(t) \ (c \leq t \leq d) \end{cases}$ に対し, C_1 の終点 = C_2 の始点, 即ち, $z_1(b) = z_2(c)$ を満たしているとき C_1 と C_2 とは $P = z_1(b) = z_2(c)$ で連結しているといい, $C_1 + C_2$ で表す. $C_1 + C_2$ の視点は $z(a)$ であり終点は $z(d)$ で



ある. 一般に連結点はカドである.

また, 複素曲線 C_1, C_2 に対し, C_1 と $-C_2$ の連結を $C_1 - C_2$ とは C_1 と $-C_2$ の連結を表す, C_1 の終点は C_2 の終点, 即ち, $z_1(b) = z_2(d)$ なので, $C_1 - C_2$ の始点は $z_1(a)$ であり終点は $z_2(c)$ である.



注意 4.2. 例 4.1.2 について, $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とこの順で連結している (図からも明らか) .

4.1.4 複素曲線の長さ

区分的に滑らかな複素曲線 $C: z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) は xy -平面上の曲線と同じものなので、その長さ $L(C)$ は

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt$$

で定義する。一方,

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{x(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt} \quad \therefore \quad \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

ゆえ、 $|dz(t)| = \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt$ と定義すれば

$$L(C) = \int_a^b \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_C |dz| \quad (\text{置換積分})$$

例題 4.1. (1) $C: z(t) = re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) (半円) とする.

$$L(C) = \int_C |dz| = \int_0^\pi \left| \frac{z(t)}{dt} \right| dt = \int_0^\pi |ire^{it}| dt = \int_0^\pi r dt = \pi r$$

(2) $C: z(t) = t + it^2$ ($0 \leq t \leq 1$) (放物線) とする.

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_C |dz| = \int_0^1 \left| \frac{z(t)}{dt} \right| dt = \int_0^1 |1 + 2it| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt \stackrel{s=2t}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + s^2} ds \\ &= \frac{1}{2} \left[s\sqrt{s^2 + 1} + \log(s + \sqrt{s^2 + 1}) \right]_0^2 \\ &= \frac{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

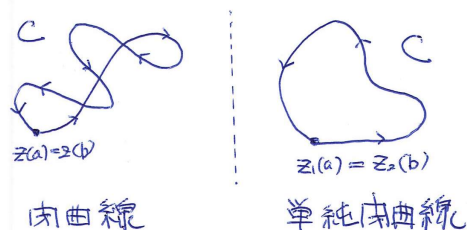
4.1.5 閉曲線と単純閉曲線

定義 4.2. ▶ 複素曲線 $C: z(t)$ ($a \leq t \leq b$) が**閉曲線**とは C の始点 = 終点, 即ち, $z(a) = z(b)$ のときを言う.

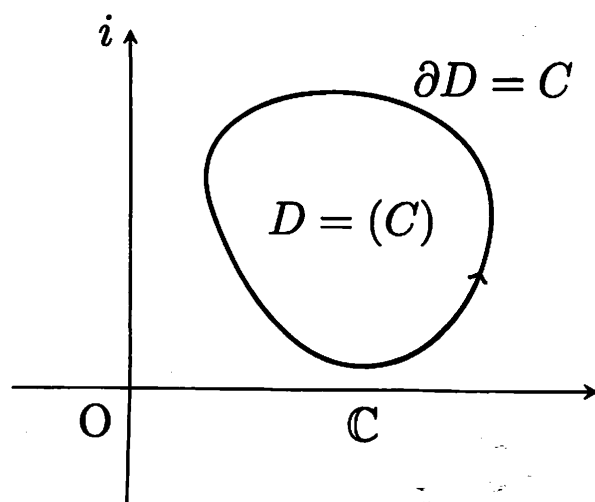
▶ 複素曲線 $C: z(t)$ ($a \leq t \leq b$) が**単純閉曲線** (ジョルダン閉曲線) とは C は閉曲線出会って, 自分自身と始点, 終点以外では交わらないときを

いう。このことは、 $a < t_1 \neq t_2 < b$ となる t_1, t_2 に対し、 $z(t_1) \neq z(t_2)$ を意味する。

注意 4.3. 単純閉曲線 $C : z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) が囲む領域（曲線の内側）を (C) で表し、 C も含めた内部（内側）を $[C]$ で表す（これは、数直線では、开区間 (a, b) と閉区間 $[a, b]$ の類似物）簡単のため $D = (C)$, $\overline{D} = [C]$ とおく。そのとき、 D の境界 ∂D は曲線 C である。



定義 4.3. 単純閉曲線 C の向きは、 C で囲まれる領域 D を左に見る向き（反時計回り）を**正の向き**いい $+C$ で表す。領域 D を右に見る向き（時計回り）を**負の向き**いい、 $-C$ で表す。（一般に、**単純閉曲線 C のパラメーター表示は C が正の向きになるように表示する。** この約束のもと、自動的に $C = +C$ と思って良い）。



4.2 複素線積分

簡単のため複素曲線 $C: z(t)$ ($a \leq t \leq b$) は滑らかな単純閉曲線とする. C は正の向きに向きづけられているとする. このとき, C 上定義された連続関数 $f(z)$ に対し, $f(z)$ の C 上の (線) 積分 $\int_C f(z) dz$ を

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

で定義する.

問. C の逆向きを $-C$ で表すと

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

が成り立つことを示せ (4.1.2 を見よ).

例 4.2.1. (1) $C: z(t) = e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) (上半円) に対し

$$\int_C z^2 dz = \int_0^\pi e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{3it} dt = i \left[\frac{e^{3it}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} [\cos 3t + i \sin 3t]_0^\pi = -\frac{2}{3}$$

(2) $C: z(t) = e^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (円周) に対し,

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = i \left[\frac{e^{3it}}{3i} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} [\cos 3t + i \sin 3t]_0^{2\pi} = 0$$

定理 4.1 (コーシーの積分定理). 滑らかな単純閉曲線 $C = +C$ で囲まれた領域 $D = (C)$ で正則で $C = \partial D$ で連続な関数 $f(z)$ に対して

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_C f(z) dz = 0$$

証明. $f(z) = P + iQ = P(x, y) + iQ(x, y)$, $dz = dx + i dy$ とおくと

$$f(z)dz = (P + Qi)(dx + i dy) = Pdx - Qdy + i(Pdy + Qdx)$$

よって

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \{P dx - Q dy\} + i \int_C \{P dy + Q dx\} \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{ストークスの定理}) \\ &= 0 \quad (\text{コーシーリーマンの関係式}) \end{aligned}$$

—— ストークスの定理 ——

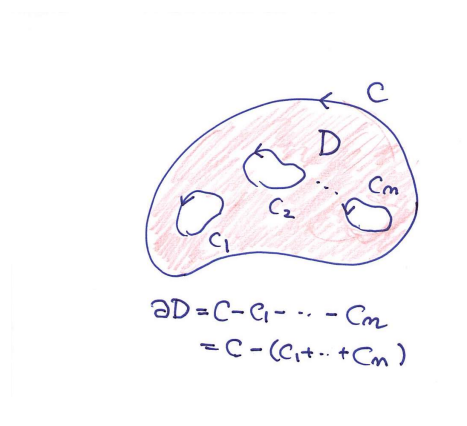
C を xy -平面上の区分的に滑らかな単純閉曲線とし, $P(x, y)$ を C の内部 $\bar{D} = [C]$ で C^1 -級, 即ち, $P(x, y)$ は (C) で連続かつ偏微分可能かつ $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ は $\bar{D}$ で連続. そのとき,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} \underline{dx} \underline{dy} = + \int_C P(x, y) \underline{dy}, \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} \underline{dx} \underline{dy} = - \int_C P(x, y) \underline{dx}$$

注意 4.4. 次に, 滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた領域 $D = (C)$ 内に滑らかな単純閉曲線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ を描く. 但し, $C, C_1, \dots, C_n$ の向きは正の向き (反時計回りとする. そこで C と $C_1, C_2, \dots, C_n$ で囲まれた領域を D とする. D の境界 ∂D は D を左に見る向きを正としているので, 向きを考慮して

$$\partial D = C - C_1 - C_2, \dots - C_n$$

と表される.



このとき、領域 D で正則関数で境界 ∂D で連続な関数 $f(z)$ に対し

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0 \quad \therefore \quad \int_{C-C_1-\dots-C_n} f(z) dz = 0$$

ここに,

$$\begin{aligned} \int_{C-C_1-\dots-C_n} f(z) dz &= \int_C f(z) dz + \int_{-C_1} f(z) dz + \dots + \int_{-C_n} f(z) dz \\ &= \int_C f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz \end{aligned}$$

このことから、最終的に次を得る.

定理 4.2.

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz$$

4.3 定理 4.1 および定理 4.2 の応用

4.3.1 コーシーの積分公式

複素関数 $f(z)$ は閉円板 $|z - \alpha| \leq R$ で連続かつ開円板 $|z - \alpha| < R$ で正則 (複素微分可能) とする. そのとき,

$$f'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \iff \lim_{z \rightarrow \alpha} \left\{ \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} - f'(\alpha) \right\} = 0$$

なので

$$\delta(z) := f(z) - f(\alpha) - (z - \alpha)f'(\alpha)$$

とおくと

$$\delta(\alpha) = 0 \quad \& \quad \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\delta(z)}{z - \alpha} = 0$$

円周 $|z - \alpha| = R$ は $z(t) = \alpha + Re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) と正の向きに媒介変数表示されるので

$$\begin{aligned} (4.3.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{Re^{it}} (Ri) e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) dt = f(\alpha) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \right) \\ &= f(\alpha) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = f(\alpha) \end{aligned}$$

(4.3.1) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right) - f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z-\alpha} dz \end{aligned}$$

を得る. ここで, $\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ は $z \neq \alpha$ では正則なので, $0 < \epsilon < R$ を任意に十分小さくとれば, $\epsilon < |z - \alpha| < R$ でも正則である. よって, 定理 4.2 より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz$$

以上により,

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right) - f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} \left(f'(\alpha) + \frac{\delta(z)}{z - \alpha} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} f'(\alpha) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} \frac{\delta(z)}{z - \alpha} dz \end{aligned}$$

まず, $f'(\alpha)$ (定数関数) は正則関数なのでコーシーの積分定理 (4.1) より

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} f'(\alpha) dz = 0$$

一方, $\epsilon > 0$ は十分小さい任意の正の数であり $\delta(z)$ は α で連続なので

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=\epsilon} \frac{\delta(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\alpha + \epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}} (i\epsilon) e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\alpha + \epsilon e^{it}) dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

を得る. (*) の左辺は $\epsilon > 0$ には無関係なので, 最終的に次を得る,

定理 4.3 (コーシーの積分公式).

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

または, α を変数 z に置き換えることにより, 複素関数として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz$$

を得る.

注意 4.5. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} dz$ を繰り返し z で 微分してゆくと

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} dz \\ f''(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right) dz = \frac{2!}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3} dz \\ f^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right) dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} dz \end{aligned}$$

特に, $\zeta = z, z = \alpha$ と置き換えると

$$(4.3.2) \quad f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=R} \frac{f(\zeta)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad (n \geq 0)$$

を得る.

例 4.3.1. (1) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = e^z|_{z=1} = e.$

$$(2) \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz = (e^z)'|_{z=1} = e.$$

$$(3) \quad \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)^{n+1}} dz = (e^z)^{(n)} \Big|_{z=1} = e.$$

$$\therefore \int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} e$$

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=1} \frac{ze^{\pi z}}{z-i} dz = (ze^{\pi z}) \Big|_{z=i} = ie^{\pi i} = i(\cos \pi i + i \sin \pi i) = -i$$

$$(5) \quad \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z-i|=1} \frac{ze^{\pi z}}{(z-i)^2} dz = (ze^{\pi z})' \Big|_{z=i} = (1+\pi z)e^{\pi z} \Big|_{z=i} = (1+\pi i)e^{\pi i} = -(1+\pi i)$$

$$\therefore \int_{|z-i|=1} \frac{ze^{\pi z}}{(z-i)^2} dz = \pi i(\pi - i)$$

4.3.2 留数定理

$f(z)$ を $0 < |z - \alpha| \leq r$ で連続で $0 < |z - \alpha| < r$ で正則とする.

定義 4.4. $f(z)$ が $z = \alpha$ で n 位の極を持つ有理型関数とは、関数 $g(z) := (z - \alpha)^n f(z)$ が $|z - \alpha| < r$ で正則であり $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z) = \infty$ (有限不確定ではない) のときをいう. このとき, n を有理型関数 $f(z)$ の $z = \alpha$ での**極の位数**と
いう.

例 4.3.2. (1) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$ は $z = 1$ で 3 位の極を持つ有理型関数.

実際, $g(z) = (z-1)^3 f(z) = e^z$ は正則関数.

(2) $f(z) = \frac{z^2 + i}{(z+1)^2}$ は $z = -1$ で 2 位の極を持つ有理型関数.

実際, $g(z) = (z+1)^2 f(z) = z^2 + i$ は正則関数.

今, $f(z)$ が $z = \alpha$ で n 位の極をもつ有理型関数とする. そのとき,

$$g(z) = (z - \alpha)^n f(z)$$

は $|z - \alpha| < r$ で正則である. このとき, $f(\alpha) = \infty$ なので $g(\alpha)$ は一般には定義できるかどうかは分からないので

$$(4.3.3) \quad g^{(n-1)}(\alpha) = \frac{d^{n-1}g(z)}{dz^{n-1}} \Big|_{z=\alpha} \quad (n \geq 1)$$

と定義する. コーシーの積分公式を正則関数 $g(z)$ に適用すれば

$$g^{(n-1)}(\alpha) = \frac{d^{n-1}g(z)}{dz^{n-1}} \Big|_{z=\alpha} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{g(z)}{(z-\alpha)^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} f(z) dz$$

が成り立つ. (4.4.3) より次を得る.

定理 4.4. $f(z)$ を $0 < |z-\alpha| \leq r$ で連続かつ $0 < |z-\alpha| < r$ で正則とし, $z = \alpha$ で n 位の極を持つ有理型関数とする. このとき,

$$\int_{|z-\alpha|=r} f(z) dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-\alpha)^n f(z)\} \Big|_{z=\alpha} =: \text{Res}(f; \alpha | n)$$

この $\text{Res}(f, \alpha; n)$ を $z = \alpha$ で n 位の極をもつ有理型関数 $f(z)$ の $z = \alpha$ での留数という.

例 4.3.3.

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{(z+1)e^z}{z^3} dz &= \frac{2\pi i}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \cdot \frac{(z+1)e^z}{z^3} \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \pi i \{(z+1)e^z\}'' \Big|_{z=0} = \pi i e^z (z+3) \Big|_{z=0} \\ &= 3\pi i = \text{Res} \left(\frac{(z+1)e^z}{z^3}; 0 | 3 \right) \end{aligned}$$

一方, コーシーの積分公式から次のように直接計算することができる.

$f(z) = (z+1)e^z$ とおくと, $f''(z) = e^z(z+3)$. コーシーの積分公式から

$$\begin{aligned} \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z+1)e^z}{z^3} dz &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz = f^{(2)}(0) = f''(0) = 3 \\ \therefore \int_{|z|=1} \frac{(z+1)e^z}{z^3} dz &= 3\pi i \end{aligned}$$

この二つの解法は基本的には同じである.

例 4.3.4. $f(z) = \frac{z^2+4}{(z-1)^3}$ のとき, $f(z)$ は $z = 1$ で 3 位の極をもつ有理型関数.

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; 1 | 3) &= \text{Res} \left(\frac{z^2+4}{(z-1)^3}; 1 | 3 \right) = \frac{2\pi i}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2} \{(z-\alpha)^3 f(z)\} \Big|_{z=1} \\ &= \pi i \frac{d^2}{dz^2} \{z^2+4\} \Big|_{z=1} = (\pi i)2 = 2\pi i \end{aligned}$$

次に留数定理について解説しよう.

円板 $|z| < R$ 内に相異なる k 個の点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ があり, $f(z)$ は各 α_j ($1 \leq j \leq k$) で n_j の極をもつ有理型関数とする. そのとき, $r > 0$ を十分小さく選べば, 各円板 $|z - \alpha_j| \leq r$ は $|z| < R$ に含まれ境界を共有しないとしてよい (完全内部に含まれるともいう). $f(z)$ は $|z| < R$ から各円板 $|z - \alpha_j| \leq r$ を除いた領域 $D = \{|z| < R\} \setminus \bigcup_{j=1}^k \{|z - \alpha_j| \leq r\}$ で正則な関数である. こうして, 定理 4.2 より

$$\int_{|z|<R} f(z) dz = \int_{|z-\alpha_1|=r} f(z) dz + \int_{|z-\alpha_1|=r} f(z) dz + \cdots + \int_{|z-\alpha_k|=r} f(z) dz$$

定理 4.4 から

留数定理

$$\int_{|z|<R} f(z) dz = \text{Res}(f; \alpha_1 | n_1) + \cdots + \text{Res}(f; \alpha_k | n_k) = \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; \alpha_j | n_j)$$

但し,

$$\text{Res}(f; \alpha_j | n_j) = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(n_j - 1)!} \frac{d^{n_j-1}}{dz^{n_j-1}} \{(z - \alpha_j)^{n_j} f(z)\} \Big|_{z=\alpha_j}$$

例 4.3.5. $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z-1)(z+2)^2}$ は円板 $\{|z| < 3\}$ から $\{-2, 0, 1\}$ を除いた領域で正則である. $f(z)$ の $z = -2, 0, 1$ での極の位数はそれぞれ 2, 2, 1 であるので

$$\int_{|z|<3} \frac{z^3 + 1}{z^2(z-1)(z+2)^2} dz = \text{Res}(f; -2 | 2) + \text{Res}(f; 0 | 2) + \text{Res}(f; 1 | 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; -2 | 2) &= \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \{(z+2)^2 f(z)\} \Big|_{z=-2} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^3 + 1}{z^2(z-1)} \right\} \Big|_{z=-2} \\ &= 2\pi i \frac{-(z^3 + 3z^2 - 2)}{z^3(z-1)^2} \Big|_{z=-2} = \frac{\pi i}{18} \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f; 0 | 2) = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \{z^2 f(z)\} \Big|_{z=0} = 2\pi i \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z^3 + 1}{(z-1)(z+2)^2} \right\} \Big|_{z=0} = 0$$

$$\text{Res}(f; 1 | 1) = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} \{(z-1)f(z)\} \Big|_{z=1} = 2\pi i \left\{ \frac{z^3 + 1}{z^2(z+2)^2} \right\} \Big|_{z=1} = \frac{4\pi i}{9}$$

$$\therefore \int_{|z|<3} \frac{z^3+1}{z^2(z-1)(z+2)^2} dz = \frac{\pi i}{2}$$

例 4.3.6. 有理関数 $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ の極は、 $z^4+1=0$ の根なので、以下の4点でいずれも極の位数は1である.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \alpha_3 (= \bar{\alpha}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \alpha_4 (= \bar{\alpha}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

今、 $R > 2$ なる任意の $R > 0$ に対し、

$$C_1 : z = Re^{it} \ (0 \leq t \leq \pi), \ C_2 : -R \leq \operatorname{Re} z \leq R, \operatorname{Im} z = 0$$

とおくと、 $C = C_1 + C_2$ が囲む領域 D は原点中心の半径 $r > 0$ の円板の上半分である。 D 内の $f(z)$ の極は α_1, α_2 のみであるしたがって、留数定理より

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_1 \mid 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_2 \mid 1\right)$$

を得る。そこで、 $z^4+1 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)$ と因数分解する。

そのとき、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_1 \mid 1\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}; \alpha_1 \mid 1\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)} \Big|_{z=\alpha_1} \\ &= 2\pi i \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)} \\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_2 \mid 1\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}; \alpha_2 \mid 1\right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)} \Big|_{z=\alpha_2} \\ &= 2\pi i \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{2} \\ \alpha_1 - \alpha_3 = \sqrt{2}(1+i) \\ \alpha_1 - \alpha_4 = \sqrt{2}i \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 = -\sqrt{2} \\ \alpha_2 - \alpha_3 = \sqrt{2}i \\ \alpha_2 - \alpha_4 = \sqrt{2}(-1+i) \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_1-1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}; \alpha_2-1\right) &= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)} - \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)} \right\} \\ &= \frac{2\pi i}{2\sqrt{2}i} \left\{ \frac{1}{1+i} - \frac{1}{-1+i} \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \cdots \quad (4.3.6)$$

一方,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{z^4+1} &= \int_{C_1} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^4+1} \\ &= \int_{C_1} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{-R}^R \frac{dz}{z^4+1} \\ &= \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^4e^{4it}+1} dt + \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} \end{aligned}$$

$R > 1$ は任意ゆえ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^4e^{4it}+1} dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} = 0 + \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

こうして, (4.3.6) より

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$