# 複素関数論 副教材
# （熊本大学：理・工系 初年次向け）

古島幹雄[1]・石田明男[2]・大嶋康裕[3]

熊本大学名誉教授[1]( wagami@kumamoto-u.ac.jp)
熊本高等専門学校[2](ishida@kumamoto-nct.ac.jp)
崇城大学[3](yohshima@ed.sojo-u.ac.jp)

## 目 次

# 1　はじめに

サブノートは大学に於ける理工系（初学年）向けの複素関数論の講義の補助教材もしくは副教材として編集されたものである．理解を深めるために各項目毎に**例題**や**注意**を入れた．式の計算，定理の証明や例題の解答は可能な限り初学者にも分かりやすく解説したつもりである．目を通して欲しい．数学は実際に手を動かして論理や計算を追うことで学習効果が上がる．本サブノートを講義の事前事後学習の際に利用して更なる深い理解に繋げて欲しい．このノートに頼らず，講義には必ず出席し講義の中で講師の説明を聴いて理解するように努めよ．講義は「聞く」のでなく「聴く」ものである．

# 2　記号および準備

$\mathbb{N}$：自然数全体の集合　　$n \in \mathbb{N} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n$ は自然数

$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合　　$q \in \mathbb{Q} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} q$ は有理数

$\mathbb{R}$：実数全体 の 集 合　　$r \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} r$ は実数

$\mathbb{C}$：複素数全体の集合　　$z \in \mathbb{C} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} z$ は複素数

（$\ast$）　数直線と $\mathbb{R}$ を同一視し，複素平面と $\mathbb{C}$ を同一視する

# 3　複素数と複素平面

**複素数の導入**

数直線 $\mathbb{R}$ の直積集合

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \ \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

の 2 点 $P = (a,b)$，$Q = (c,d)$ に対し，加法「$\pm$」，および乗法 「$\cdot$」を以下のように定義する：

(i) $P \pm Q := (a \pm c, b \pm d)$

(ii) $P \cdot Q := (ac - bd, ad + bc)$

**注意 3.1.** (1) 実数 $\lambda$ と $P$ との積 $\lambda \cdot P$（スカラー積という）は

$$\lambda \cdot P = (\lambda, 0) \cdot (a.b) = (\lambda a, \lambda b) \in \mathbb{R}^2$$

なので，$\mathbb{R}^2$ は (i) とあわせて $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．

(2) 原点 $\mathbf{0} = (0,0)$ は

$$\begin{aligned} P + \mathbf{0} &= \mathbf{0} + P = P \\ \mathbf{0} \cdot P &= P \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

を満たすので，$\mathbb{R}^2$ の**零元**（ゼロ）と思って良い．

(3) $\mathbf{1} = (1,0)$ は

$$\mathbf{1} \cdot P = (1,0) \cdot (a,b) = (a,b) \cdot (1,0) = (a,b) = P$$

を満たすので，$\mathbb{R}^2$ の積に関する**単位元**である．

(4) $\mathbb{R}^2$ の元 $(a,b)$ 加法に関する逆元とは,

$$(a,b) + (x,y) = (x,y) + (a,b) = (0,0)$$

となる元 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ をいう．よって,

$$(x,y) = (-a,-b) = -(a,b)$$

が加法に関する逆元である．

(5) $\mathbb{R}^2$ の元 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$，$(a,b) \neq (0,0)$ の積に関する逆元（逆数）とは

$$P \cdot X = (a,b) \cdot (x,y) = (x,y) \cdot (a,b) = X \cdot P = (1,0) =: \mathbf{1}$$

を満たす $X = (x,y)$ の事で，$(x,y)$ は次の連立方程式の解である：

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$X = (x,y) = \left( \frac{a}{a^2+b^2} \, , \, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

ここで，$(a,b) \neq (0,0)$ より $a^2+b^2 \neq 0$．こうして逆数は一意的に存在する（即ち，$P=(a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ の逆数は存在して唯一つ)．唯一つだから，$P$ の逆数を $P$ に因んで $P^{-1} = \dfrac{1}{P}$ と書く．

$$(a,b)^{-1} = \frac{1}{(a,b)} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

(6) $\mathbf{i} := (0,1) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (-1,0) = -(1,0) = -\mathbf{1}$$

よって $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$ を得る．この $\mathbf{i}$ を**虚数単位**と呼ぼう．このとき，

$$P = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x \cdot \mathbf{1} + y \cdot \mathbf{i}$$

を得る．

(7) 簡単のため $1=(1,0)$, $i=(0,1)$ とおく．

$$x = x(1,0) = x \cdot 1, \quad yi = y(0,1) = y \cdot i$$

と見做せば，

$$(x,y) = x + yi$$

と表すことができる．この形の数 $x+yi$ を複素数とよぶ．こうして，複素数全体の集合は

$$\mathbb{C} = \{ z = x + yi \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \}$$

と表される．

(8) $i^2 = -1$ より，$i$ は2次方程式 $x^2+1=0$ の1つの解 $i = \sqrt{-1}$ と見なすことができる．また，複素平面上の点としての $i=(0,1)$ は数としては $i = \sqrt{-1}$ と同一視される．

(9) $\mathbb{R} \cong \{(x.0) : \ x \in \mathbb{R}\}$ なので，包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ を得る．即ち，実数は複素数の一部分である．

以上をまとめると<u>**複素数の性質**</u>

複素数 $z = a+bi, w = c+di \in \mathbb{C}, \quad i = \sqrt{-1}$ について，

(1) $z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)\ i$

(2) $zw := z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)\ i$

(3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\ i$，但し，$z \neq 0$.

(4) $1 \cdot z = z \cdot 1 = z,\ 0 \cdot z = z \cdot 0 = 0,\ i^2 = -1$

**定義 3.1.** (1) $z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z} := a - bi$ を $z$ の**共役複素数**という．

(2) $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ を $z$ の**絶対値**という．特に，複素数 $z,\ w$ に対し，$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. 特に，$z \neq 0$ ならば

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

(3) $z = a + bi \in \mathbb{C}$ に対して，$a$ を $z$ の**実部**といい $a = \operatorname{Re} z$ で表す．また $b$ を $z$ の**虚部**といい，$b = \operatorname{Im} z$ で表す．こうして

$$z = a + bi = \operatorname{Re}(z) + i\ \operatorname{Im}(z)$$

特に，

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

(4) $z = a + bi \neq 0\ \therefore\ a^2 + b^2 \neq 0$ とする．そのとき，

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

を満たす $\theta$ が区間 $[0, 2\pi)$ に唯一つ存在する．この $\theta$ を $z$ の**偏角**と呼び，$\theta = \operatorname{Arg} z$ で表す．また，

$$\arg z := \operatorname{Arg} z + 2n\pi = \theta + 2n\pi,\ (n \in \mathbb{Z})$$

をここでは**一般偏角**と呼ぶ．このとき，

$$z = a+bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

**命題 3.1** (オイラーの公式). $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

から次を得る.

**定理 3.1** (極形式). 複素数 $z$ に対し,

$$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = |z|e^{i(\mathrm{Arg}\,z+2\pi n)} = |z|e^{i\arg z}.$$

これを $z$ の極形式という.

**命題 3.2.**

$$\arg(zw) = \arg(wz) = \arg z + \arg w\ , \quad |zw| = |wz| = |z|\cdot|w|$$

**証明.** $z, w \neq 0$ となる複素数に対し $z = |z|e^{i\arg z}$, $w = |w|e^{i\arg w}$ と極表示する. そのとき,

$$\therefore \quad zw = |z|e^{i\arg z}|w|e^{i\arg w} = |z||w|e^{i\arg z}e^{i\arg w} = |z||w|e^{i(\arg z+\arg w)}$$

一方, 積 $zw$ の極表示は, 定義から

$$zw = |zw|e^{i\arg(zw)}$$

より

$$zw = |zw|e^{i\arg(zw)} = |z||w|e^{i(\arg z+\arg w)}$$

このことから結論は導かれる. □

**例題 3.1.** (1) $(1+\sqrt{3}i)(-4+\sqrt{2}i) = -(4+\sqrt{6}) + (\sqrt{2}-4\sqrt{3})i$.

(2) $\big|(1+\sqrt{3}i)(-4+\sqrt{2}i)\big| = 4\sqrt{5}$.

(3) 偏角 $\mathrm{Arg}(-1+\sqrt{3}i) = \dfrac{11}{6}\pi$

**例題 3.2.** $1+i = |1+i|e^{i\arg(1+i)} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i+2n\pi i} = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

**例題 3.3.** $|1+i| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $|1+\sqrt{3}i| = 2$, $\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{\pi}{3}$ よって,

$$(1+i)(1+\sqrt{3}i) = 2\sqrt{2}\,e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})i} = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{7\pi}{12}i}$$

**問題 3.1.** 極形式を用いて次を確認せよ.

(1) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{i-1} = \sqrt{2}\ e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\ e^{\frac{23\pi}{12}i}$

(2) $\dfrac{(3+\sqrt{3}i)^3}{(i+1)^2} = 12\sqrt{3}$

(3) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}\ e^{\frac{10\pi}{9}i}$

Hints.

(1) $-1-\sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i},\ i-1 = -1+i = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}\ \therefore\ (i-1)^{-1} = 2e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

(2) $3+\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\ e^{\frac{\pi}{6}i},\ 1+i = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}$

(3) $1-\sqrt{3}i = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$

**注意 3.2.** (1) $z = (\operatorname{Re} z) + i(\operatorname{Im} z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} + \left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) i$

(2) $\overline{z} = (\operatorname{Re} z) - i(\operatorname{Im} z) \quad \therefore \operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im}\overline{z} = -\operatorname{Im} z$

(3) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$

(4) $|z|^2 = z\cdot\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = \left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 \geqq 0$

等号が成立するのは $z=0$ の時のみ.

(5) $|z| = |\overline{z}|$. 特に, $|zw| = |z\overline{w}| = |\overline{z}w| = |z|\cdot|w|$

(6)

$$
\begin{aligned}
|z|^2\cdot|w|^2 &= |zw|^2 = |z\overline{w}|^2 = \{\operatorname{Re}(z\overline{w})\}^2 + \{\operatorname{Im}(z\overline{w})\}^2 \\
&= \left\{\frac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{z\overline{w}-\overline{z}w}{2i}\right\}^2 \\
&= \{\operatorname{Re}(z\overline{w})\}^2 + \{\operatorname{Im}(z\overline{w})\}^2 \\
&= |\operatorname{Re}(z\overline{w})|^2 + |\operatorname{Im}(z\overline{w})|^2 \\
&= \left|\frac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}\right|^2 + \left|\frac{z\overline{w}-\overline{z}w}{2}\right|^2 \geqq \left|\frac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}\right|^2
\end{aligned}
$$

特に,

$$|z|\cdot|w| \geqq |\operatorname{Re}(z\overline{w})| = \left|\frac{z\overline{w}+\overline{z}w}{2}\right| \quad \text{（シュワルツの不等式）}.$$

等号が成立するのは $z\overline{w} = \overline{z}w$ のときのみ.

(7)　$0, z, w$ を頂点とする三角形の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|z|^2 \cdot |w|^2 - \{\mathrm{Re}(z\overline{w})\}^2} = \frac{1}{2}\ |\mathrm{Im}(z\overline{w})| = \left|\frac{z\overline{w} - \overline{z}w}{4}\right|$$

また，$\mathrm{Im}\,\dfrac{w}{z} > 0 \Longrightarrow \mathrm{Arg}\,w - \mathrm{Arg}\,z > 0$ とし，線分 $0z$ と $0w$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta < \pi)$ とすると，余弦定理

$$\cos\theta = \frac{|z|^2 + |w|^2 - |z-w|^2}{2\,|z| \cdot |w|} = \frac{\overline{z}w + z\overline{w}}{2|z| \cdot |w|} = \frac{\mathrm{Re}(\overline{z}w)}{|z| \cdot |w|} = \frac{\mathrm{Re}(z\overline{w})}{|z| \cdot |w|}$$

を得る．一方，

$$\sin\theta = \frac{2S}{|z| \cdot |w|} = \frac{|z\overline{w} - \overline{z}w|}{2\,|z| \cdot |w|} = \frac{\overline{z}w - z\overline{w}}{2i|z| \cdot |w|} = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z}w)}{|z| \cdot |w|}$$

(8)　$|z| + |w| \geqq |z + w| \geqq |z| \sim |w|$（三角不等式）. 但し，「$\sim$」は $|z|$ と $|w|$ の大きい方から小さい方を引くの意味.

($\because$)

$$\begin{aligned}
(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| - \left(|z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w\right) \\
&= 2\left[|z| \cdot |w| - \left(\frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\right)\right] \\
&\geqq 2\left[|z| \cdot |w| - \left|\frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}\right|\right] \\
&\geqq 0 \quad \text{by (6)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |z| + |w| \geqq |z + w| \geqq \big||z| - |w|\big| = |z| \sim |w|$$

最後の不等式 $|z + w| \geqq |z| \sim |w|$ は前半の三角不等式を適用

$$|z+w|+|-w| \geqq |(z+w)-w| = |z|, \quad |z+w|+|-z| \geqq |(z+w)-z| = |w|$$

$$\therefore \quad |z + w| + |w| \geqq |z|, \quad , |z + w| + |z| \geqq |w|$$

よって結論を得る.

# 4　複素平面と幾何

## 複素数の積と回転

複素数 $z, w$ を極座標表示 $z = |z|e^{i\arg z},\ w = |w|e^{i\arg w}$ する．このとき，

$$z \cdot w = |z|e^{i\arg z} \cdot |w|e^{i\arg w} = |z| \cdot |w|e^{i(\arg z + \arg w)}$$

であった．

特に $e^{i\theta}z = |z|e^{\arg z+\theta}$ より $e^{i\theta}$ は $z$ を反時計回りに $\theta$ だけ回転させて得られる複素数である．実際，偏角 $\arg z$ が $\theta$ だけ増えていることから分かる．

$z$ を反時計回りに $\theta$ だけ回転させる $\Longleftrightarrow$ $z$ に $e^{\theta}$ を乗じる．こうして，

**命題 4.1.** $z \cdot w$ は $w$ を $\arg z$ だけ反時計回りに回転させた複素数 $(e^{i\arg z}w)$ を $|z|$ 倍して得られる複素数である．

実際，

$$
\begin{aligned}
\left(e^{i\arg z}w\right)\cdot|z| &= |z|e^{i\arg z}\cdot w\\
&= |z|e^{i\arg z}\cdot|w|e^{i\arg w}\\
&= |z|\cdot|w|e^{i(\arg z+\arg w)}\\
&= z\cdot w
\end{aligned}
$$

同様に，

$\dfrac{w}{z}$ は $w$ を $-\arg z$ だけ反時計回りに回転 $\arg z$ だけ時計回りに回転）させ，$\dfrac{1}{|z|}$ 倍して得られる複素数ということになる．

$$\frac{w}{z} = e^{-i\arg z}\cdot\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|}e^{-i\arg z}|w|e^{i\arg w} = \frac{|w|}{|z|}e^{i(\arg w-\arg z)}$$

次に，複素平面上に相異なる 3 点 $\alpha\neq 0, \beta\neq 0, \gamma\neq 0$ をとる．点 $\gamma$ を始点とするベクトル $\overrightarrow{\gamma\alpha}$ 及び $\overrightarrow{\gamma\beta}$ を考える．$\gamma$ を中心に $\overrightarrow{\gamma\alpha}$ を反時計回りに $0<\theta<\pi$ 回転させた方角に $\overrightarrow{\gamma\beta}$ があるとする．この時，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right) > 0$$

を得る．実際，

$$\theta = \mathrm{Arg}(\beta-\gamma) - \mathrm{Arg}(\beta-\gamma)$$

から分かる．

特に，複素数 $z$, $w$ に対し，$w$ が $z$ に対し，反時計回りに位置するとき，

$$\mathrm{Im}\,\frac{w}{z} > 0.$$

<u>例題</u> **4.1.** $1+i$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ反時計回りに回転させた複素数は $-1+i$.

$$\therefore \quad \mathrm{Im}\left(\frac{-1+i}{1+i}\right) > 0.$$

<u>例題</u> **4.2.** 複素数 $z, w \neq 0$ は $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = 0$ のとき直交するという．このとき，$iz$ と $z$ は直交する．

実際，$\mathrm{Re}(iz \cdot \overline{z}) = \mathrm{Re}(i|z|^2) = |z|^2 \,\mathrm{Re}\, i = 0$ より分かる．または，$\mathrm{Arg}\, i = \dfrac{\pi}{2}$ より，$iz$ は $z$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた複素数．故に $iz$ と $z$ は直交する． □

<u>例題</u> **4.3.** 複素平面上の相異なる 3 点 $\alpha, \beta, \gamma$ が 1 直線上にないための必要十分条件は

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \neq 0.$$

$(\because)$

$\alpha, \beta, \gamma$ が 1 直線上にあるための必要十分条件は $\gamma-\alpha = k(\beta-\alpha)$ $(k \in \mathbb{R})$. よって

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0.$$

対偶をとって結論を得る． □

<u>例題</u> **4.4.** 異なる 2 点 $\alpha, \beta$ を通る直線の方程式は

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0.$$

$(\because)$

直線上の任意の点を $z$ とすると $z-\alpha$, $z-\beta$ は直線上にあるので例題 3.3 の町名より結論を得る． □

<u>例題</u> **4.5.** 複素平面上の $\alpha, \beta, \gamma$ を頂点とする三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ が正三角形であるための必要十分条件は

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

$(\because)$

$\gamma - \alpha$ は $\beta - \alpha$ を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転させたものなので，

$$\gamma - \alpha = e^{\pm\frac{\pi}{3}} \cdot (\beta - \alpha) \;\therefore\; (\gamma-\alpha)^3 = e^{\pm\pi}(\beta-\alpha)^3 = -(\beta-\alpha)^3$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad 0 &= (\gamma-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3 \\
&= (\gamma+\beta-2\alpha)\left\{(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\right\} \\
&= (\gamma+\beta-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)
\end{aligned}
$$

一方，$\alpha, \beta, \gamma$ は一直線上にないので $\mathrm{Im}\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \neq 0.$

実際，$\gamma+\beta-2\alpha=0$ と仮定する．$\gamma=2\alpha-\beta$ より

$$
\mathrm{Im}\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)=\mathrm{Im}(-1)=0
$$

これは矛盾である．故に，$\gamma+\beta-2\alpha \neq 0.$ 以上より，

$$
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0
$$

を得る． □

**注意 4.1.** 実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対しては,

$$
a<b \text{ または } a=b \text{ または } a<b
$$

のいずれかが成り立つ.

しかし，複素数 $\alpha, \beta$ に対しては

$$
\alpha=\beta \text{ または} \alpha \neq \beta
$$

のいずれかが成り立つ.（不等号は複素数には一般に使えない：複素数には順序はない).

実際，$i=\sqrt{-1}$ は正でも負でもゼロでもない.

$(\because)$ $i^2=i\cdot i=-1$ より $i \neq 0. i>0$ なら $-1=i\cdot i>0$ であり $i<0$ ならば $-1=i^2=(-i)(-i)>0.$ □

## 5　複素領域

複素変数 $z \in \mathbb{C}$ が動く 2 次元の範囲を（複素）**領域**という.

**例題 5.1.** (1) 円板領域：$\alpha \in \mathbb{C}$ 中心半径 $r>0$ の円板の内部

$$
\Delta(\alpha, r)=\{z \in \mathbb{C}\ :\ |z-\alpha|<r\}
$$

(2) 円環領域：

$$\Delta(\alpha, r, R) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ r < |z-\alpha| < R\}$$

(3) 三角形領域：$\alpha, \beta, \gamma$ を頂点とする三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ の内部（周は含まず）

(4) 矩形領域：$\alpha = a + bi$ を中心とする長方形の内部（周は含まず）

$$\begin{aligned} Q &= \{z = x + yi \in \mathbb{C}\ :\ |x-a| < r_1\ ,\ |y-b| < r_2\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}\ :\ |\mathrm{Re}(z-\alpha)| < r_1\ ,\ |\mathrm{Im}(z-\alpha)| < r_2\} \end{aligned}$$

## 6 実関数の微分（サーベイ）

**定義 6.1.** 実数 $x$ を変数とする関数 $f(x)$ の値が常に実数であるとき $f(x)$ を実数値関数（実関数）という．即ち，

$$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

**例題 6.1.**

$$f(x) = x, x^2,\ x^3, \ldots, x^n,\ \sin x,\ \cos x, \tan x,\ e^x, \log x, \ldots$$

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で定義された実数値関数であれば，写像として

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ : x \mapsto y = f(x)$$

**定義 6.2.** (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続とは，任意の $c$ $(a \leqq c \leqq b)$ に対し

$$\lim_{\substack{x\to c \\ a\leqq x\leqq b}} f(x) = f(c)$$

が成り立つとき．

(2) 開区間 $(a,b)$ で微分可能であるとは，任意の $c$ $(a < c < b)$ に対し，極限値

$$\lim_{\substack{x\to c \\ x\neq c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = A \quad \text{（有限確定値）}$$

のときをいう．この確定値 $A$ を $f$ に因んで $f'(c)$ で表わし，$f(x)$ の $x = c$ での**微分係数**という．$f(x)$ が開区間 $(a,b)$ の各点 $c$ で微分可能のとき，$f(x)$ は開区間 $(a,b)$ で微分可能という．

(3)　実変数 $x$ $(a < x < b)$ に対し，十分小さな $h > 0$ をとれば $a < x \pm h < b$ とできる（$h$ は $x$ に依存する！）そのとき，

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} = f'(x)$$

を $f(x)$ の導関数という．微分係数 $f'(c)$ は導関数 $f'(x)$ の $x = c$ での値である

次の定理は良く知られている．

**定理 6.1.** (1)（最大値・最小値定理）実関数 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続とする．このとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で最大値 $M$，最小値 $m$ をもつ，即ち，$f(x_{\max}) = M$ なる点 $x_{\max}$ および $f(x_{\min}) = m$ なる点 $x_{\min}$ がそれぞれ区間 $[a, b]$ 内に少なくとも一つ存在する．

**例題 6.2.** $f(x) = (x-1)^2 + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ のとき，最大値は $f(0) = f(2) = 2$ であり最小値は $f(1) = 1$.

(2)（中間値の定理）実関数 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で $f(a) < f(b)$ とする．このとき，$f(a) \leqq \gamma \leqq f(b)$ を満たす任意の $\gamma$ に対し，$f(c) = \gamma$ となる点 $c$ が区間 $[a, b]$ に少なくとも一つ存在する．

**例題 6.3.** 連続関数 $f(x)$ および $a < b$ に対し，$f(a)f(b) < 0$ ならば $f(c) = 0$ となる $c$ $(a < c < b)$ が少なくとも一つ存在する．例えば，$f(x) = x^3 - 3x + 1$ について，$f(0)f(1) < 0$ より $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解は区間 $(0, 1)$ に少なくとも一つ存在する．

(3)（平均値の定理）$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で開区間 $(a, b)$ で微分可能な関数とする．そのとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $c$ $(a < c < b)$ が少なくとも一つ存在する．

**例題 6.4.** $f(x) = e^x$ に対し，$\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = e - 1 = f'(c) = e^c$，即ち，$e - 1 = e^c$ なる $0 < c < 1$ が少なくとも一つ（この場合唯一つ）存在する．

## 7　複素関数

<u>定義</u> **7.1.** 変数 $z$ が複素数である複素数値関数 $f(z)$ を**複素関数**という．即ち，

$$z \in \mathbb{C} \Longrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$$

特に，

$$f(z) = z^2,\ z^3, \ldots, z^n,\ \sin z,\ \cos z, \tan z,\ e^z,\ \log z, \ldots$$

などの複素関数は初等関数と呼ばれている．

<u>定義</u> **7.2.** 集合 $D \subset \mathbb{C}$ が複素平面上の領域であるとは，任意の点 $\alpha \in D$ に対し，十分小さな $\delta >$ をとれば

$$\Delta(\alpha, \delta) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - \alpha| < \delta\} \subset D$$

を満たすとき．即ち，$D$ の各点を中心とした十分小さな円板が $D$ に含まれるとき（開集合であるとき）をいう．

<u>例題</u> **7.1.** 複素平面内の円板（境界円は含まず），長方形の内部（境界は含まず）．一般に，単純閉曲線 $C$ で囲まれた集合の内部 $(C)$ も領域である．

$f(z)$ を領域 $D$ で定義された複素関数とする．すなわち，$D$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}\ : z \mapsto w = f(z)$$

とする．

$z = x + yi$ とおく．$f(z) = f(x + yi)$ は複素数値関数より

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \quad (z = x + yi)$$

とおく．但し, $u(x, y), v(x, y)$ は 2 実変数 $x, y$ の実数値関数である．$u(x, y)$ を $f(z)$ の実部といい $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ で表し，$v(x, y)$ を $f(z)$ の虚部といい $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ で表す．

<u>例題</u> **7.2.** (1) $f(z) = z^2$ のとき，

$$f(z) = f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy).$$

$$\therefore \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

(2) $f(z) = e^z$ のとき，

$$f(z) = f(x+yi) = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

$$\therefore \quad u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

**定義 7.3.** 特に，$D$ で定義された複素関数 $f(z)$ が $z = z_0 \in D$ に対し

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z) = f(z_0)$$

が成立するとき，$f(z)$ は $z = z_0$ で**連続**という．

**注意 7.1.** 連続性の定義の意味するところは，$z$ が $z_0$ に近づくその近づき方に依らずに $f(z)$ は $f(z_0)$ に近づく（または収束する）という意味である．つまり，

$$|z - z_0| \to 0 \Longrightarrow f(z) \to f(z_0) \Longleftrightarrow |f(z) - f(z_0)| \to 0$$

ということ．

**注意 7.2.** $z \to \alpha \Longrightarrow |z - z_0| \to 0 \Longleftrightarrow z = z_0 + |z - z_0| e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ ゆえ，

$$\therefore \lim_{|z - z_0| \to 0} f(\alpha + |z - z_0| e^{i\theta}) = f(z_0) \quad (\theta\text{に依らないことが重要！})$$

**例題 7.3.** $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ は収束しない（極限値が一意的に定まらない）．

$(\because)$

$z$ を極形式で表すと，$z = |z| e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ ゆえ，

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{z \to 0} e^{-i\theta} = e^{-i\theta}.$$

ここで，$\theta$ は不特定の数だから，極限値は一意的に定まらない．よって収束しない． □

**例題 7.4.**

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - 1}{z - 1} & \text{if } z \neq 1 \\ A & \text{if } z = 1 \end{cases}$$

$(\because)$

一方，極限は

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 1}} f(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\to =1}} \frac{z^2-1}{z-1} = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 1}}(z+1) = 2$$

（ここで，$z=1$ 以外で考えているので分母子は約分できる.）

一方，$f(1)=A$ ゆえ，$f(z)$ が $z=1$ で連続であるには

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 0}} f(z) = f(1) = A$$

が成立する．こうして $2=f(1)=A \quad \therefore A=2$ のとき，$f(z)$ は $z=1$ で連続になる． □

## 8 正則関数

__定義__ **8.1.** 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 $D$ で定義された連続関数 $f(z)$ が $D$ 内の点 $z_0\in D$ で<u>(複素）微分可能</u>であるとは,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

が<u>複素数として有限確定</u>の時をいう．この，有限確定値を $f'(z_0)$ にて表し，複素関数 $f(z)$ の $z=z_0$ での<u>複素微分係数（または微分係数)</u>と呼ぶ.

__注意__ **8.1.** この意味は，$D-\{z_0\}$ 上で定義された連続関数

$$g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

に対し，$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} g(z)=f'(z_0)$（収束，即ち，極限値が有限確定値）ことを意味する．

$$\lambda(z)=f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0) \quad (z\neq z_0)$$

とおくと，$\lambda(z)$ は $\lambda(z_0)=0$ とおくことで $D$ 上の連続関数に拡張できる．こうして，$f(z)$ が $z=z_0$ で複素微分可能ならば $D$ 上の連続関数 $\lambda(z)$ が存在して

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\lambda(z)$$

と表せる．このとき，$\lambda(z)$ は次を満たす.

$$(7.1.1) \qquad \begin{cases} \lim_{z\to z_0} \lambda(z)=0 \\ \lim_{z\to z_0} \dfrac{\lambda(z)}{z-z_0}=0 \end{cases}$$

逆に，$z_0$ のみに関係する定数 $A$ および $\{z \in D \mid |z - z_0| < \delta\}$ で定義された (7.1.1) を満たす複素連続関数 $\lambda(z)$ が存在して，

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \lambda(z)$$

と表せるとき，$f(z)$ は $z = z_0$ で複素全微分可能という．このとき，$A = f'(z_0)$ である．こうして，複素微分可能性と複素全微分可能性は同値である．

<u>定義</u> **8.2.** 複素平面内の領域 $D$ で定義された<u>連続な複素関数</u>$f(z)$ が $D$ の点 $z_0 \in D$ で**正則**であるとは，$z_0$ のある近傍 $\Delta(z_0; \delta) \subset D$ が存在し，$f(z)$ は $\Delta(z_0; \delta)$ の任意の点 $z$ で複素微分可能であるときをいう．$f(z)$ は $D$ の各点で正則のとき $D$ 上の**正則関数**という．

<u>注意</u> **8.2.** 各点での複素微分可能性と正則性とは同値でない．つまり，一点での正則性はその適当な近傍の各点での微分可能性を意味するので，一点のみでの微分可能性とは違うことを次の例題で確かめよう．

<u>例題</u> **8.1.** $f(z) = |z|^2$ は原点 $z = 0$ で微分可能であるが $z = 0$ で正則ではない．今，

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0$$

より $z = 0$ で微分可能である．一方，任意の $z_0 \neq 0$ で微分可能でない．実際，

$z - z_0 = |z - z_0| e^{i\theta}$, $\overline{z} - \overline{z_0} = |z - z_0| e^{-i\theta}$ と極形式で表すと，

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{z\overline{z} - z_0\overline{z_0}}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left( \overline{z} + \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \right) \\
&= \overline{z_0} + \lim_{z \to z_0} \left( \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \right) \\
&= \overline{z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{|\overline{z} - \overline{z_0}| e^{-i\theta}}{|\overline{z} - \overline{z_0}| e^{i\theta}} \\
&= \overline{z_0} + \lim_{z \to z_0} e^{-2i\theta} \\
&= \overline{z_0} + e^{-2i\theta}
\end{aligned}$$

となり，極限値が $\theta$ に依存しているので有限<u>不確定</u>値である．従って収束しない．こうして，$z = 0$ の任意の近傍上の任意の点 $z_0 \neq 0$ に対し，$f(z)$ は微分可能ではない．即ち，正則ではない．

**<u>例題</u> 8.2.** $f(z)=\overline{z}^2$ は $z=0$ で微分可能であるが，$z=\alpha\neq 0$ では微分可能でない．故に，正則関数ではない．

($\because$)
極形式で表すと $z=|z|e^{it}$, $\overline{z}=|z|e^{-it}$ ゆえ

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2}{z}=\lim_{|z|\to 0}|z|e^{-2it}=0$$

一方，$\alpha\neq 0$ に対し，$z-\alpha=|z-\alpha|e^{it}$, $\overline{z}-\overline{\alpha}=|z-\alpha|e^{-it}$ ゆえ，

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{\overline{z}^2-\overline{\alpha}^2}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}(\overline{z}+\overline{\alpha})\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}(\overline{z}+\overline{\alpha})\frac{|z-\alpha|e^{-it}}{|z-\alpha|e^{it}}=2\overline{\alpha}e^{-2it}$$

となり，極限値が $t$ に依存し一意的でないので収束しない．よって，$f(z)$ は $z=\alpha$ で微分可能でない．こうして，$z=0$ で正則ではない．

□

**問題 8.1.** (1) $x$ を実数とするとき，$\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}=0$.

(2) $\lim_{z\to 0}e^{-\frac{1}{z}}$ は収束しない（発散するともいう）．

($\because$)
(1): $t=\dfrac{1}{x}$ とおくと $\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{e^t}=0$.
(2): 実軸 $y=0$ に沿って $z\to 0 \iff x\to 0$ とすれば (1) から $\lim_{z\to 0}e^{-\frac{1}{z}}=1$.
一方，虚軸 $x=0$ 上の点列 $\{z_n=\dfrac{i}{(2n+1)\pi}\}$ に沿って $z_n\to 0$ とすれば

$$\lim_{z\to 0}e^{-\frac{1}{z}}=\lim_{z_n\to 0}e^{-\frac{1}{z_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{-i(2n+1)\pi}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-1)^n}=\pm 1.$$

こうして，$z\to 0$ の近づき方の如何で値が確定しない．よって，収束しない．

□

# 9 コーシー・リーマンの関係式

$z=x+yi$ とし，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と実部と虚部に分ける．ここに，$u(x,y)$, $v(x,y)$ は 2 実変数 $x,y$ の実数値関数である．

更に，$f(z)$ は $z=z_0=x_0+iy_0$ $(x_0,y_0\in\mathbb{R})$ で微分可能とする．そのとき，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)\quad（有限確定値）$$

$u(x,y),v(x,y)$ の式で表すと

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]+i\,[v(x,y)-v(x_0,y_0)]}{x-x_0+i(y-y_0)}$$

極限操作は $z\to z_0$ の近づき方に依らずに値が $f'(z_0)$ に近づくことを意味するので，とくに，

$$z=x+iy_0\to x_0+iy_0=z_0,$$
$$z=x_0+iy\to x_0+iy=z_0$$

の 2 方向から $z_0=x_0+iy_0$ に近づけても極限値は同じ $f'(z_0)$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
f'(\alpha)&=\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x,y_0)-u(x_0,y_0)]+i\,[v(x,y_0)-v(x_0,y_0)]}{x-x_0}\\
&=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\\
&=\lim_{y\to y_0}\frac{[u(x_0,y)-u(x_0,y_0)]+i\,[v(x_0,y)-v(x_0,y_0)]}{i(y-y_0)}\\
&=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

実部と虚部を比較して次を得る．

$$\text{(C.R)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\quad\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\end{cases}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

この関係式 (C.R) を**コーシー・リーマンの関係式**という．特に，

$$f'(\alpha)=\frac{df}{dz}(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

**定理 9.1.** $f(z)$ を領域 $D\subset\mathbb{C}$ で正則な関数とし，$z=x+yi\in D$ とする．そのとき，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおけば，$u(x,y)$，$v(x,y)$ は $D$ の各点でコーシー・リーマンの関係式 (C.R)

$$\text{(C.R)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\quad\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

を満たす．

逆も成立する，即ち，

**定理 9.2** (Looman-Menchoff(1923-1936))**.** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ を領域 $D\subset\mathbb{C}$ で連続な関数とする．さらに，$u(x,y)$, $v(x,y)$ が $D$ で偏微分可能でコーシー．リーマンの関係式 (C.R) を満たす．このとき，$f(z)$ は $D$ で正則である．

**証明.** 証明は複雑で面倒である．

**注意 9.1.** 何にせよ，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の正則性とコーシー・リーマンの関係式 (C.M) の成立は同値である．即ち，コーシー・リーマンの関係式 (C.M) は $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の正則性の判定条件である．

**例題 9.1** (再掲：コーシー・リーマンの関係式の観点から)**.**
$f(z)=\overline{z}^2$ は正則関数でない．

$(\because)$ $z=x+yi$ とおくと，$\overline{z}=x-yi$. $\therefore$ $f(z)=(x-yi)^2=x^2-y^2+i(-2xy)$

$$\therefore \quad \begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=-2xy \end{cases} \quad \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-2x$$

関係式 (C.R) は成立しない．よって $f(z)=\overline{z}^2$ は正則でない． □

**例題 9.2.** $f(z)=e^z$ は正則関数である．

$(\because)$ $z=x+yi$ とおくと $f(z)=e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$$\therefore \quad \begin{cases} u(x,y)=e^x\cos y \\ v(x,y)=e^x\sin y \end{cases}$$

今，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-e^x\sin y)$$

関係式 (C.R) が成立するので $f(z)=e^z$ は正則である． □

注意 **9.2.** 偏微分作用素を

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と定義すれば

$$f(z) \text{ は正則} \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \quad \text{特に} \quad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

実際（次を形式的に展開して実部と虚部に分ける），

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})(u+vi) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} = 0 \quad \text{by} \quad \text{(C.R)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})(u+vi) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$$

注意 **9.3.**

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\Delta := 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を**ラプラシアン（ラプラス作用素）**という．

例題 **9.3.** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を正則関数とすると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

ゆえ，容易に次を示すことができる．

$$\Delta u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0$$
$$\Delta v = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})v = (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) = 0$$

ここで，$u(x,y), v(x,y)$ は 2 階偏微分可能であり（後述する）$\Delta u$, $\Delta v$ は意味がある．

**問題 9.1.** $\varphi(x,y) = \log(x^2+y^2)$ に対し $\Delta\varphi(x,y) = 0$ を示せ．

## 10　正則関数の導関数（公式）

**定理 10.1.** $f(z)$, $g(z)$ を複素平面上の領域 $D$ で正則な関数とする．

(1) $\varphi(z) = \alpha f(z) + \beta g(z)$ は $D$ で正則な関数．但し，$\alpha$, $\beta$ は複素定数．

$$\varphi'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z) \quad \therefore \quad \frac{\partial\left(\alpha f(z) + \beta g(z)\right)}{\partial z} = \alpha\frac{\partial f(z)}{\partial z} + \beta\frac{\partial g(z)}{\partial z}$$

(2) $\varphi(z) = f(z)g(z)$ は $D$ で正則で

$$\varphi'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad \therefore \quad \frac{\partial\left(f(z)g(z)\right)}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}\, g(z) + f(z)\,\frac{\partial g(z)}{\partial z}.$$

(3) $D$ 上の正則関数 $f(z)$ が $D$ 上 $f(z) \neq 0$ ならば，$\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ もまた $D$ で正則で

$$\varphi'(z) = -\frac{f'(z)}{(f(z))^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = -\frac{1}{(f(z))^2}\,\frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

**証明.** 正則関数 $\varphi(z)$ に対し $\dfrac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}} = 0$ を示せばよい．$\varphi'(z)$ の公式は実数関数のときと同様である．

$$\frac{\partial\left(\alpha f(z) + \beta g(z)\right)}{\partial \overline{z}} = \alpha\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} + \beta\frac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(f(z)g(z)\right)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\, g(z) + f(z)\,\frac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{f(z)}\right) = -\frac{1}{(f(z))^2}\,\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \tag{3}$$

$\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}} = 0$ であることから $\varphi(z)$ の正則性が分かる．　□

**注意 10.1.** (2) $\varphi(z) = f(z)g(z)$ の正則性はコーシーリーマンの関係式 (C.R) を用いても証明できる．

$f = u + iv$,　$g = P + iQ$ とおくと，コーシーリーマンの関係式から

$$(8.4.1) \qquad \begin{cases} u_x = v_y, & u_y = -v_x \\ P_x = Q_y, & P_y = Q_x \end{cases}$$

が成り立つ．今, $\varphi = R + iS = (u+iv)(P+iQ) = (uP - vQ) + i(uQ + vP)$.

$$\therefore \quad R = uP - vQ, \quad S = uP + vQ.$$

$$
\begin{aligned}
R_x &= u_xP + uP_x - v_xQ - vQ_x \\
S_y &= u_yQ + uQ_y + v_yP + vP_y \\
R_y &= u_yP + uP_y - v_yQ - vQ_y \\
S_x &= u_xQ + uQ_x + v_xP + vP_x
\end{aligned}
$$

それぞれ，両辺の差（和）をとり，(8.4.1) を適用して

$$
\begin{aligned}
R_x - S_y = P(u_x - v_y) + u(P_x - Q_y) - Q(v_x + u_y) - v(Q_x + P_y) = 0 \\
R_y + S_x = P(u_y + v_x) + u(Q_x + P_y) + Q(u_x - v_y) + v(P_x - Q_y) = 0
\end{aligned}
$$

を得る．

$$
\therefore \quad R_x = S_y, \quad S_x = -R_y
$$

よって，$\varphi = f(z)g(z) = R(x, y) + iS(x, y)$ はコーシー・リーマンの関係式を満たす．こうして，$\varphi = f(z)g(z)$ は正則である． □

<u>**注意**</u> **10.2.** $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$ は $f(z)$ を $z$ の関数と見て $z$ で微分したものであり，$\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}$ は $f(z)$ を $\overline{z}$ の関数と見て $\overline{z}$ で微分したものである．

例えば,

(1) $f(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$ に対して,

$$
\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \overline{z}, \ \frac{f(z)}{\partial \overline{z}} = z \neq 0
$$

(2) $f(z) = z^3$ に対し

$$
\frac{f(z)}{\partial z} = 3z^2, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 0 \quad (\overline{z}\text{の項を含まぬ！}) \quad \therefore \quad \text{正則である．}
$$

(3) $f(z) = z^2 e^{\overline{z}^3}$ に対し

$$
\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 2ze^{\overline{z}^3}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = z^2(3\overline{z}^2)e^{\overline{z}^3} \neq 0
$$

このように，$\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ は，それぞれ，$z$ に関する偏微分，$\overline{z}$ に関する偏微分と見ることができる．

## 11　複素曲線

<u>定義</u> **11.1.** 複素曲線（単に**曲線**と呼ぶ）$C$ とは閉区間 $[a,b]$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への<u>連続写像</u>（または $[a,b]$ 上の連続な複素関数）

$$\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \ : t \mapsto \varphi(t) = z(t)$$

またはその像集合 $C = \varphi([a,b])$ をいう．

<u>注意</u> **11.1.** $t \in [a,b]$ に対し，$\varphi(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ とおく．但し，$x(t), y(t)$ は $[a,b]$ で定義された実数値関数である．そのとき，

$$\begin{aligned} C:\ & z(t) = x(t) + iy(t)\ (a \leqq t \leqq b) \\ |C| &= \{z(t) = x(t) + iy(t)\ :\ a \leqq t \leqq b\} \subset \mathbb{C} \quad \text{（集合として）} \end{aligned}$$

と表わす．このとき，$z(a)$ を**始点**，$z(b)$ を**終点**と呼ぶ．

<u>定義</u> **11.2.** 曲線 $C:\ z = z(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ の**逆向き曲線**を $-C$ で表す．$-C$ の始点は $C$ の終点 $z(b)$，$-C$ の終点は $C$ の始点 $z(a)$ を終点とする曲線で，集合としては $|-C| = |C|$．実際，

$$-C:\ w(t) = z(a+b-t)\ (a \leqq t \leqq b)\ , \quad w(a) = z(b),\ w(b) = z(a)$$

で表される．

<u>注意</u> **11.2.** 通常，曲線 $C$ は向きを指定して与える．$C$ の逆向き曲線は $C$ の向きを前提に定義される．

<u>例題</u> **11.1.** (1) $\begin{cases} C:\ z(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t\ (0 \leqq t \leqq 1) \\ -C:\ w(t) = \alpha + (\beta - \alpha)(1-t)\ (0 \leqq t \leqq 1) \end{cases}$

但し，$w(0) = \beta = z(1),\ ;\ w(1) = \alpha = z(0)$

(2) $\begin{cases} C:\ z(t) = e^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \\ -C:\ w(t) = e^{-it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases}$

但し，$w(0) = 1 = z(0), \quad w(2\pi) = 1 = z(2\pi)$

<u>定義</u> **11.3.** 曲線 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ に対して

(1) 曲線 $C$ が $z(a) = z(b)$（始点 $=$ 終点）を満たすとき $C$ を**閉曲線**という．

(2) 曲線 $C$ 上の $a < t_1 \neq t_2 < b$ なる任意の $t_1, t_2$ に対し，$z(t_1) \neq z(t_2)$ のとき**単純曲線**という．このことは，連続写像

$$\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が１対１（単射ともいう）写像であることを意味する．

(3) $C$ は単純曲線かつ閉曲線のとき**単純閉曲線**または**ジョルダン閉曲線**という（即ち，自分自身と端点以外では交わらない閉曲線）．

(4) 曲線 $C$ が $\mathcal{C}^\infty$-級であるとは $x(t), y(t)$ が $a < t < b$ で微分可能かつ導関数 $x'(t), y'(t)$ が $[a, b]$ で連続のときをいう（連続微分可能ともいう）．

(5) 曲線 $C$ が任意の $a < t < b$ に対し，

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) \neq (0,0) \Longleftrightarrow \left|\frac{z(t)}{dt}\right|^2 = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 \neq 0$$

を満たすとき**滑らかな曲線**（$C$ の各点で接線が唯一つ存在する）という．特に，区間 $[a, b]$ 内の<u>有限個</u>の点 $t_1, t_2, \ldots, t_N$ を除き

$$\left|\frac{dz(t)}{dt}\right| \neq 0$$

のとき $C$ は**区分的に滑らか**という．

<u>**例題**</u> **11.2.** (1) 閉曲線

$$C: \ z(t) = \begin{cases} \alpha + 3t(\beta - \alpha) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}\right) \\ \beta + (3t-1)(\gamma - \beta) & \left(\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right) \\ \gamma + (3t-2)(\alpha - \gamma) & \left(\dfrac{2}{3} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

$$-C: \ w(t) = \begin{cases} \alpha + 3t(\gamma - \alpha) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}\right) \\ \gamma + (3t-1)(\beta - \gamma) & \left(\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\right) \\ \beta + (3t-2)(\alpha - \beta) & \left(\dfrac{2}{3} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

は複素平面上の３点 $\alpha, \beta, \gamma$ を頂点とする三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$ の周である．

・$C$ は自然に $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ と回る向きに向き付けられている．

・$-C$ は $\alpha \to \gamma \to \beta \to \alpha$ と回る向きに向き付けられている．

(2) 閉曲線

$$C:\ z(t) = \begin{cases} \alpha + 4t(\beta - \alpha) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}\right) \\ \beta + (4t-1)(\gamma - \beta) & \left(\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \gamma + (4t-2)(\delta - \gamma) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\right) \\ \delta + (4t-3)(\alpha - \delta) & \left(\dfrac{3}{4} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

$$-C:\ w(t) = \begin{cases} \alpha + 4t(\delta - \alpha) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}\right) \\ \delta + (4t-1)(\gamma - \delta) & \left(\dfrac{1}{4} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \gamma + (4t-2)(\beta - \gamma) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\right) \\ \delta + (4t-3)(\alpha - \beta) & \left(\dfrac{3}{4} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

は複素平面上の 4 点 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を頂点とする 4 角形 $\square\alpha\beta\gamma\delta$ の周である．

・$C$ は自然に $\alpha \to \beta \to \gamma \to \delta \to \alpha$ の順に回る向きに向き付けられている．

・$-C$ は $\alpha \to \delta \to \gamma \to \beta \to \alpha$ の順に回る向きに向き付けられている．

## 12　複素曲線の結合（繋ぎ合わせ）

複素平面 $\mathbb{C}$ 上に相異なる 3 点 $\alpha, \beta, \gamma$ を与える．点 $\alpha$ を始点とし点 $\beta$ を終点とする曲線を $C_{\alpha\beta}$ で表し，点 $\beta$ を始点とし点 $\gamma$ を終点とする曲線を $C_{\beta\gamma}$ で表す．このとき，

**定義 12.1.** $C_{\alpha\beta}$ の終点 $\beta$ と $C_{\beta\gamma}$ の始点 $\beta$ を同一して繋げた曲線を

$$C_{\alpha\gamma} := C_{\alpha\beta} + C_{\beta\gamma}$$

と表し，これを $C_{\alpha\beta}$ と $C_{\beta\gamma}$ の**結合（繋ぎ合わせ）**と呼ぶ．

$C_{\alpha\gamma}$ は結果として $\alpha$ と $\gamma$ を結ぶ曲線になる．

<u>**注意**</u> **12.1.** 一般に，複素平面上の相異なる $n$ 個の点 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に対し，$\alpha_i$ と $\alpha_{i+1}$ を結ぶ曲線を $C_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$ とすると，$n-1$ 個の曲線

$$C_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_2\alpha_3}, \ldots C_{\alpha_i\alpha_{i+1}}, \ldots, C_{\alpha_{n-1},\alpha_n}$$

が得られる．これらの曲線を順に結合した曲線

$$C := C_{\alpha_1\alpha_n} = C_{\alpha_1\alpha_2} + C_{\alpha_2\alpha_3} + \cdots + C_{\alpha_i\alpha_{i+1}} + \cdots + C_{\alpha_{n-1}\alpha_n}$$

を $C_{\alpha_1\alpha_2}, C_{\alpha_2\alpha_3}, \ldots C_{\alpha_i\alpha_{i+1}}, \ldots, C_{\alpha_{n-1},\alpha_n}$ の自然な**連結**という．

$C$ は $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \alpha_{n-1} \to \alpha_n$ を順に結んだ曲線で，最終的には $\alpha_1$ を始点 $\alpha_n$ を終点とする曲線である．特に，$C_{\alpha_{n-1}\alpha_n}$ の<u>終点 $\alpha_n$</u>と $C_{\alpha_1\alpha_2}$ の<u>始点 $\alpha_1$</u>が一致するとき $C$ を**結合閉曲線**という．結合閉曲線 $C$ が $\alpha_1$ と $\alpha_n$ 以外で自分自身と交わらないとき $C$ を**単純結合閉曲線**という（例題 11.2 の (1),(2) は単純結合閉曲線である）

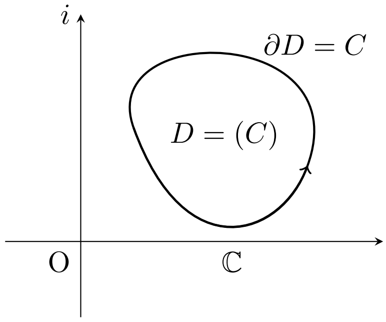
## 13　領域の境界

$C$ を単純閉曲線とすれば，$C$ は複素平面を内側と外側に分ける．　特に $C$ で囲まれる領域（有界な内側）を $(C)$ で表し，その境界 $C$ を含めた領域を $[C] = (C) \cup C$ にて表す．

<u>**注意**</u> **13.1.** 開区間 $(a, b)$ に $(C)$ が閉区間 $[a, b]$ に $[C]$ が対応している．

<u>**定義**</u> **13.1.** 単純閉曲線 $C$ は<u>領域 $D = (C)$ を左に見る向き</u>を**正の向き**という．

<u>**注意**</u> **13.2.** $D := (C)$ 及び $\overline{D} := [C]$ とおく．$\overline{D}$ は $D$ の**閉包**と呼ばれる．




$D$ の境界を $\partial D$ で表す．

単純閉曲線 $\partial D = C$ は正の向きとし，逆向きは $-\partial D = -C$ で表す．

**例題 13.1.** 領域 $D$ を円板の内部 $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\}$ とする．そのとき，境界集合は $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = r\}$ である．向きづけられた境界は

$$C = \partial D : \ z(t) = re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$
$$-C = -\partial D : \ z(t) = re^{-it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

集合としては

$$|\partial D| = |C| = |-C| = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = r\}$$

である．

**問題 13.1.** 次の曲線

$$C = \begin{cases} C_1 : \ z(t) = t \ (r \leqq t \leqq R) \\ C_2 : \ z(t) = Re^{it} \ (0 \leqq t \leqq \pi) \\ C_3 : \ z(t) = t \ (-R \leqq t \leqq -r) \\ -C_4 : \ z(t) = re^{i(\pi - t)} = re^{-it} \ (0 \leqq t \leqq \pi) \ (\text{負の向き！}) \end{cases}$$

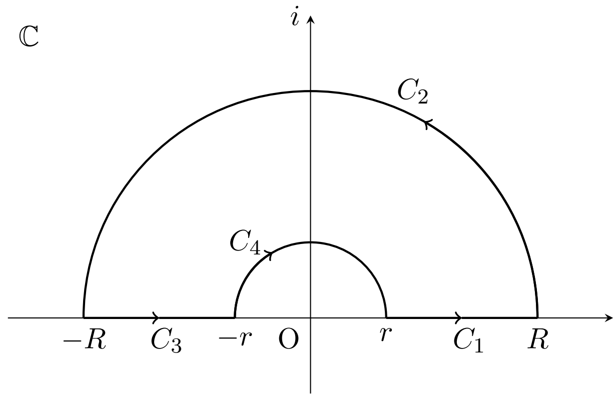
但し， $C_4 : \ z(t) = re^{it} \ (0 \leqq t \leqq \pi)$（正の向き）とする．そのとき，$C$ を複素平面に図示せよ．特に，

$$C = C_1 + C_2 + C_3 - C_4$$

$z = r$ を始点に $C_1 \to C_2 \to C_3 \to -C_4$ と反時計回りに一周し最後に $z = r$ に戻る曲線である．

$$-C = -(C_1 + C_2 + C_3 - C_4) = C_4 - C_3 - C_2 - C_1$$

は $z = r$ を始点に $C_4 \to C_3 \to C_2 \to C_1$ と時計回り（逆回り）に一周し最後に $z = r$ に戻る曲線である．



**注意 13.3.** 曲線の連結の定義からすれば

$$-C = C_4 - C_3 - C_2 - C_1 = -(C_1 + C_2 + C_3 - C_4) \neq -C_1 - C_2 - C_3 - C_4$$

とすべきであろう．

**注意 13.4.** 単純閉曲線 $C$ については特に断らない限り正の向き（反時計回り）を指定する．特に，$C$ の逆向き（時計回り）を扱う場合は $-C$ とマイナスの符号を付すことにする．

**注意 13.5.** $D$ を円環領域 $\Delta(\alpha, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z-\alpha| < R\}$ $(0 < r < R)$ とする．$D$ の境界は

$$|C_1| = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| = R\} \text{ および } |C_2| = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| = r\}$$

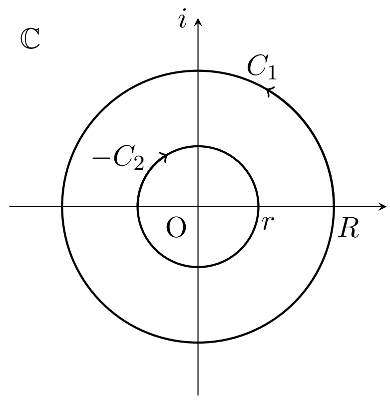
$C_1, C_2$ ともに向きは正の向き，即ち，

$$C_1 : \ z(t) = Re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi), \quad C_2 : \ z(t) = re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

とする．そのとき，$D$ の境界は集合として $|\partial D| = |C_1| \cup |C_2|$ であるが，向きを考慮すれば（領域を左に見る向きが正の向き）

$$\partial D = C_1 - C_2$$

である．実際，$\partial D$ は円環 $D$ を左に見る向き（正の向き）である．$C_1$ は左回りなので $D$ を左に見る．一方，$C_2$ は正の向き（左回り）なので，$D$ を右側に見る．こうして $D$ を左に見るには $-C_2$（逆向き）を出なければならない．



## 14　実関数の積分（サーベイ）

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続ならば積分可能である．即ち，定積分

$$\int_a^b f(x)dx < \infty$$

は収束する．

**確認事項.** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な実関数とする．区間 $[a,b]$ 内に $n+1$ 個の点 $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となるようにとり，閉区間 $[a,b]$ を $n$ 個の閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ ,$i = 1, 2, \ldots, n$ に分割する（この分割は $n$ 等分割とは限らない！）．この分割を $n+1$ 個の点集合 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ によって定まる**分割**と呼ぶ．簡単に分割 $\Delta$ と呼ぶ．勿論，分割の数や分割する点 $x_j$ の位置を変えれば，分割は無数に存在する．そこで上記の分割 $\Delta$ を固定する．その時 $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす $\xi_i$ $(1 \leq i \leq n)$ を一つ選び，次の和を考える：

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) .$$

今，$M_i := \max\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, $m_i := \min\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ とおき，

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s_\Delta := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

とおけば,

$$s_\Delta \leq \sigma_\Delta \leq S_\Delta$$

を得る．ここからが少し解析の知識と理解を要する．まず，$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続だから **一様連続**である．

**定義 14.1** (一様連続性)**.** $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で一様連続とは：任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\epsilon$ にのみ関係する正の数 $\delta(\epsilon)$ が存在し, $[a,b]$ 内の任意の 2 点$x$, $x' \in [a,b]$ に対し,

$$|x - x'| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

が成り立つとき．

こうして，

$$x_i - x_{i-1} < \delta(\epsilon) \implies M_i - m_i < \epsilon$$

実際，${}^\exists \xi_i, {}^\exists \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ があって，$f(\xi_i) = M_i$，$f(\eta_i) = m_i$ となる．$|\xi_i - \eta_i| < \delta(\epsilon)$ だから，一様連続性から $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| = M_i - m_i < \epsilon$ を得る． □

今，$|\Delta| = \max_i (x_i - x_{i-1})$ とおく．

$$|\Delta| < \delta(\epsilon) \implies S_\Delta - s_\Delta < \epsilon(b-a)$$

次が注意を要する点で，集合

$$\{ s_\Delta \mid \Delta \text{ は閉区間 } [a,b] \text{ の任意の分割} \}$$

は上に有界である．よって**上限**

$$s := \sup_\Delta s_\Delta$$

が存在する（上限については注意 14.1 を見よ）．ここで

$$s_\Delta \le s \le S_\Delta$$

最終的には

$$|\Delta| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |s - s_\Delta| < \epsilon$$

を得る．即ち，すべての分割 $\Delta$ に対し

$$s := \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

となるのである．高校では，特に区間 $[a,b]$ の $n$ 等分割（特別な分割）

$$\bigcup_{i=1}^n \left[ a + \frac{b-a}{n}(i-1) \ , \ a + \frac{b-a}{n} \ i \right]$$

を考え，次の無限和で定義した．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} i) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)dx$$

特に，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

**註**：以上の議論は閉区間で連続な関数の積分可能性の証明を与えていることに注意*!*

<u>例題</u> **14.1.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のとき,

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}=\frac{n^2}{n^2+k^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

<u>例題</u> **14.2.** $f(x)=x^2$ に対しては，定義により，

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}$$

閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ の積分を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ と書いた．閉区間 $I$ は媒介変数表示：$I:\ x=t\ (a\le t\le b)$ と表せる．実数 $t$ を線分 $I$ の実**パラメーター**である．その時,

$$\int_I f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

と表記する．

線分 $I$ のパラメーター表示は一通りではない

例えば，$x=a+(b-a)t\ (0\le t\le 1)$ も $I$ のパラメーター表示である．このとき,

$$\int_I f(x)dx=\int_0^1 f(a+(b-a)t)\frac{dx}{dt}dt=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt$$

と表せる．一般に，線分 $I$ が $C^1$-級の関数 $\varphi(t)$（即ち，$\varphi(t),\varphi'(t)$ が連続）による次のパラメーター表示：

$$I:\ x=\varphi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$$

で表される時

$$\int_I f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\frac{d\varphi}{dt}dt$$

とを得る．これを**積分の変数変換** (置換積分）という．

<u>例題</u> **14.3.** 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ．

実際，$x = x(t) = \tan t$ とおくと，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ ゆえ，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{dx(t)}{dt}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(\tan t)' dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

**注意 14.1.** 集合 $A$ を数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ とする．

そのとき，$A$ の**上限**を $\sup A$ で表す．

$$\sup A = a < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) : {}^{\forall} x \in A \longrightarrow x \leqq a \\ (2) : {}^{\forall} \epsilon > 0,\ {}^{\exists} x_0 \in A \quad \text{such that} \quad a - \epsilon < x_0 \end{cases}$$

また，$A$ の**下限**を $\inf A$ で表す．

$$\inf A = b < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) : {}^{\forall} x \in A \longrightarrow x \geqq b \\ (2) : {}^{\forall} \epsilon > 0,\ {}^{\exists} x_1 \in A \quad \text{such that} \quad x_1 < b + \epsilon \end{cases}$$

上限や下限の概念は最大値や最小値に代替物である．

上限=最大値もあり得るし，下限=最小値もあり得る．

# 15 複素積分

複素曲線 $C$（正の向き）上の積分（**複素積分または複素線積分**）

$$\int_C f(z)dz$$

を定義しよう．

**例題 15.1.** 数直線 $\mathbb{R}$ の閉区間 $C = [a, b]$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線とみなす．
$z \in C$ ならば $z = x$ ゆえ次の複素積分は通常の実積分

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる．

**定義 15.1.** $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の滑らかな曲線（閉曲線とは限らない）とし $f(z)$ を $C$ 上で連続な複素関数とする．そのとき，

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt} = x'(t) + iy'(t).$$

を考慮に入れて $f(z)$ の $C$ 上の積分を

$$\int_C f(z)dz \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad \text{（置換積分）}$$

と定義する（正確には定義しても良い）．詳しくは次節 **16** 節を見よ．

**例題 15.2.** 特に，曲線 $C$ が実軸 $\mathbb{R}$ 上の閉区間

$$C : z(t) = t + 0i = t \ \ (a \leqq t \leqq b)$$

で与えられる時は,

$$\int_C f(z)dz = \int_I f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

となり，通常の実積分（例題 15.1）である．

次のような複素平面上の曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_m$ を考える：
$C_1$ の終点$=$ $C_2$ の始点, $\ldots$ $C_j$ の終点$=$ $C_{j+1}$ の始点, $\ldots$ $C_{m-1}$ の終点$=$ $C_m$ の始点.
これら $m$ 個の曲線を連結させた曲線を

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_m$$

とおく．ここで，$C$ は繋ぎめ以外では滑らか（区分的に滑らか）と仮定する．

**定理 15.1.** 区分的に滑らかな曲線 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ および $C$ 上連続な複素関数 $f(z)$ に対し，

$$\int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots \int_{C_n} f(z)dz$$

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

但し，$-C = -C_n - C_{n-1} - \ldots - C_2 - C_1$.（複素線積分の定義から分かる）.

注意 15.1.

$$\int_{C_1 \pm C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz \pm \int_{C_2} f(z)\,dz$$

## 16　複素線積分の定義

長さが有限な曲線 $\varphi : [a,b] \longrightarrow C \subset \mathbb{C}$ および $C$ 上連続な関数 $f(z)$ を考える．区間 $[a,b]$ の任意の分割

$$^\forall\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$$

および $t_{i-1} < \xi_i < t_i$ なる任意の$\xi_i$ に対し, 和

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})$$

を考える．但し，$z_i = \varphi(t_i)$.

$$|\Delta| = \max_{1 \leqq i \leqq n} (t_i - t_{i-1})$$

とおく．全ての分割 $\Delta$ および任意の $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ に対し極限値

$$\lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ ^\forall(\Delta,\xi)}} S_\Delta$$

が複素数として有限確定するとき, この極限値を $\displaystyle\int_C f(z)\ dz$ で表す．即ち,

$$\lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ \forall(\Delta,\xi)}} S_\Delta = \int_C f(z)\ dz$$

これを $f(z)$ の $C$ に沿う**複素線積分**という．この場合,

**例題 16.1.** $C : z(t) = e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$（正の向きがついた原点中心の単位円周）に対し，$\displaystyle\int_C dz = 0$ である．

実際，分割 $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 2\pi$ および $t_{k-1} < \xi_k < t_k$ に対し $f(z) = 1$ とおくと,

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (e^{it_k} - e^{it_{k-1}}) = e^{2\pi i} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \int_C dz = 0$$

. □

**例題 16.2.** $C : \{|z-\alpha| = r\} : z(t) = \alpha + re^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を $\alpha$ 中心の単位円とする．

$$\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n} \ (n \geqq 1) = \begin{cases} 2\pi i & \text{if} \quad n = 1 \\ 0 & \text{if} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

**証明.** $z = \alpha + re^{it}, \quad dz = rie^{it}\,dt$ ゆえ，定義 *15.1* より

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^n} dt = i\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{r^n e^{int}} dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}\,dt \\ &= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \{\cos(n-1)t - i\sin(n-1)t\}\,dt \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \Big( i\int_0^{2\pi} \cos(n-1)t\,dt + \int_0^{2\pi} \sin(n-1)t\,dt \Big) \end{aligned}$$

一方，

$$\int_0^{2\pi} \cos mt\,dt = \begin{cases} 2\pi & \text{if} \quad m = 0 \\ 0 & \text{if} \quad m \geqq 1 \end{cases} \qquad \int_0^{2\pi} \sin mt\,dt = 0 \quad \text{if} \quad m \geqq 0$$

を考慮すれば結論を得る． □

**例題 16.3.** $C : z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ を滑らかな（単純）閉曲線とすし，$P(z)$ を多項式とする．このとき，$\int_C |(z)\,dz = 0$.

実際，$P(z)$ は多項式ゆえ $P(z)$ の原始関数 $Q(z)$ が存在する．例えば

$$P(z) = az^n \Longrightarrow Q(z) = \frac{a}{n+1} z^{n+1} \qquad \therefore Q'(z) = P(z)$$

$$\begin{aligned} \int_C P(z)\,dz = \int_C Q'(z)\,dz &= \int_a^b Q'(z(t)) dz(t) \\ &= \int_a^b \frac{dQ(z(t))}{dt} dt = \Big[Q(z(t)\Big]_a^b \\ &= Q(z(a) - Q(z(b) = 0 \quad \because z(a) = z(b) \end{aligned}$$

## 17　曲線の長さ

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し

$$dz = dx + idy\ , \quad |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

とおく．複素平面上の滑らかな曲線

$$C\ : z(t) = x(t) + iy(t)\ (a \leqq t \leqq b)$$

とする．そのとき，

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}, \quad \left|\frac{dz(t)}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

$$\therefore \quad |dz(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

<u>**定義**</u> **17.1.** $C$ の長さ $L(C)$ は

$$L(C) = \int_C |dz| = \int_a^b \left|\frac{dz(t)}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\ dt$$

と定義される．

<u>**例題**</u> **17.1.** 複素曲線 $C : z(t) = t + \dfrac{t^2}{2}\, i\ (0 \leqq t \leqq 1)$ の長さ $L(C)$ は

$$L(C) = \int_C |dz| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)$$

で与えられる．

<u>**証明**</u>**.**

$$|dz(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \sqrt{1+t^2}dt$$

より

$$L(C) = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ dt = \frac{1}{2}\Big[t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)$$

□

<u>**注意**</u> **17.1.** $f(z)$ を $\overline{\Delta} = \{|z-\alpha| \leqq R\}$ で正則な関数とし，

$$\partial\Delta = C_R = z(t) = \alpha + Re^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

とおく．そのとき，

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| \leqq \int_{C_R} |f(z)|\, |dz| \leqq \max_{z\in C_R} |f(z)| \int_{C_R} |dz| = 2\pi R \cdot \max_{z\in C_R} |f(z)|$$

## 18　コーシーの積分定理

次の定理は複素関数論の基本定理である．

**定理 18.1.** *(コーシーの積分定理)* 区分的に滑らかな単純閉曲線 $C$ で囲まれる領域 $D = (C)$ で正則で境界 $C$ で連続な正則な関数 $f(z)$ に対し

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

が成立する．

**解説 18.1.** コーシーの積分定理の一般的な証明は省略する．しかし，特別な場合はグリーン・ストークスの定理とコーシー・リーマンの関係式 (C.R.) を用いて証明できる．

実際，$C$ を区分的に滑らかな単純閉曲線とし，$D = (C)$ とおく．

$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ を $\mathcal{C}^\infty$-級, 即ち，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ は $D$ で $\mathcal{C}^\infty$-級の実数値関数とする．そのとき,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (P(x,y) + iQ(x,y))\,(dx + idy) \\ &= \int_C \big\{P(x,y)dx - Q(x,y)dy\big\} + i\int_C \big\{P(x,y)dy + Q(x,y)dx\big\}\end{aligned}$$

一方，グリーン・ストークスの定理（以下の解説 2 を見よ）から

$$\int_C P(x,y)dx - Q(x,y)dy = -\iint_D \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) dx\,dy = 0 \quad \text{by (C.R.)}$$

$$\int_C P(x,y)dy + Q(x,y)dx = \iint_D \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \quad \text{by (C.R.)}$$

こうして，コーシーの積分定理

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

を得る．

**解説 18.2.** 特別な領域に対してグリーン・ストークスの定理を証明しよう．

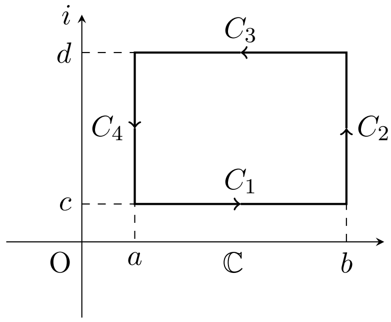
**証明**　まず，相異なる 4 点

$$\alpha = a + ci,\ \beta = b + ci,\ \gamma = b + di,\ \delta = a + di \quad (a < b,\ c < d)$$

を頂点とする長方形の周を $C=C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ とする．今，

$$\begin{cases} C_1: \ z_1(t)=a+(b-a)t+ci \ (0 \leqq t \leqq 1)=\{a \leqq x \leqq b, \ y=c\}=[a,b]\times c \\ C_2: \ z_2(t)=b+i\{c+(d-c)t\} \ (0 \leqq t \leqq 1)=\{x=b, \ c \leqq y \leqq d\}=b\times[c,d] \\ C_3: \ z_3(t)=a+(b-a)(1-t)+id \ (0 \leqq t \leqq 1)=\{b \leqq x \leqq a, y=d\}=-[a,b]\times d \\ C_4: \ z_4(t)=a+i\{c+(d-c)(1-t)\} \ (0 \leqq t \leqq 1)=\{x=a, \ d \leqq y \leqq c\}=a\times(-[c,d]) \end{cases}$$

とおけば．これらの連結曲線 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$ は $\alpha\to\beta\to\gamma\to\delta\to\alpha$ の順で正の向きに回る区分的に滑らかな単純閉曲線である．また $C$ で囲まれる矩形（長方形の内部）を $D=(C)$ とする．




次の補題は２変数版の部分積分である．

**補題 18.1.** $R(x,y)$ を $\mathcal{C}^\infty$ 級の実数値関数とする．そのとき，

$$\int_C R(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial R}{\partial x}dxdy \qquad (18.1.1)$$

$$\int_C R(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial R}{\partial y}dxdy \qquad (18.1.2)$$

**証明.** $D=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ a \leqq x \leqq b, \ c \leqq y \leqq d\}$（直積領域）である．

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial R}{\partial x}dxdy &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial R}{\partial x}\,dx\right)dy = \int_c^d \left(\Big[R(x,y)\Big]_a^b\right)dy \\ &= \int_c^d \Big(R(b,y)-R(a,y)\Big)dy = \int_c^d R(b,y)\,dy - \int_c^d R(a,y)\,dy \\ &= \int_{C_2} R(x,y)dy - (\int_{-C_4} R(x,y)\,dy = \int_{C_2} R(x,y)dy + \int_{C_4} R(x,y)\,dy \end{aligned}$$

一方, $y=c$ 上 $\Delta y=0$ より $dy=0$. $\quad \therefore \displaystyle\int_{C_1} R(x,y)\,dy = \int_a^b P(x,c)dy = 0$

同様に，$y=d$ 上 $dy=0$ ゆえ，$\displaystyle\int_{C_3} R(x,y)dy = \int_b^a R(x,d)dy = 0$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \int_C R(x,y)dy &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} R(x,y)\,dy \\
&= \int_{C_1} R(x,y)dy + \int_{C_2} R(x,y)dy + \int_{C_3} R(x,y)dy + \int_{C_4} R(x,y)dy \\
&= \int_{C_2} R(x,y)dy + \int_{C_4} R(x,y)\,dy + 0 + 0 \\
&= \iint_D \frac{\partial R}{\partial x} dxdy
\end{aligned}
$$

同様にして

$$\iint_D \frac{\partial R(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_C R(x,y)dx$$

を得る．以上で補題の証明を終わる．□

**注意 18.1.** 補題 1 はグリーン・ストークスの定理を応用したコーシーの積分定理の証明のキーである．実際，(18.1.1) に於いて，$R(x,y)=P(x,y)$，(18.1.2) に於いて，$R(x,y)=Q(x,y)$ と置き，辺辺加えれば

$$\int_C P(x,y)dy + Q(x,y)dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$$

(18.1.1) に於いて，$R(x,y) = -Q(x,y)$，(18.1.2) に於いて，$R(x,y) = P(x,y)$ と置き，辺辺加えれば

$$\left(\int_C -Q(x,y)dy + P(x,y)dx\right) = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

こうして

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C (P(x,y)+iQ(x,y))\,(dx+idy) \\
&= \int_C P(x,y)dx - Q(x,y)dy + i\left(\int_C P(x,y)dy + Q(x,y)dx\right) \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \\
&= 0 \quad \text{by} \quad \text{(C.R.)}
\end{aligned}
$$

こうしてコーシーの積分定理が証明される．□

**例題 18.1.** (1) $z^n$，$e^z$，$z^5e^{z^2}$ は複素平面 $\mathbb{C}$ で正則ゆえ，任意の閉曲線 $C$ に対し，自動的に

$$\int_C z^n\,dz = \int_C e^z\,dz = \int_C z^5 e^{z^2}\,dz = 0$$

(2) $f(z) = \dfrac{ze^z + 1}{z - i}$ は領域 $D = \{|z-1| < 1\}$ において正則かつ分母の零点 $i \notin \{|z-1| \leqq 1\}$ ゆえ，$f(z)$ は $\{|z-1| \leqq 1\}$ で連続である．$C := D = \{|z-1| = 1\}$ とおくと，コーシーの積分定理から

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{ze^z + 1}{z - i}\,dz = 0$$

直接計算したらかなり面倒であるが，コーシーの積分定理を使えば簡単である．

<u>**注意**</u> **18.2.** $f(z)$ が正則だと分かっていて（つまり，コーシー・リーマンの関係式を満たす），しかも，単純閉曲線 $C$ の内部及び境界が $f(z)$ の定義域に含まれていれば，線積分を具体的に計算しなくても自動的に

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

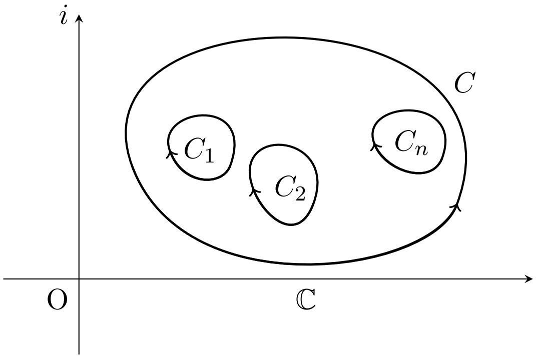
が分かるという仕組みである．

次に，コーシーの積分定理の一般化について考察する．

単純閉曲線 $C$ で囲まれる領域 $(C)$ 内に互いに交わらない $n$ 個の単純閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を描く（このとき，$C, C_1, \ldots, C_n$ の向きは反時計回りとする）．曲線 $C$ および $C_1, C_2, \ldots, C_n$ で囲まれる領域（要するに，$C$ の内側と $C_1, C_2, \ldots, C_n$ の外側の重なった部分）を $D$ とする．$D$ の境界は $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ からなる．今，領域 $D$ を左に見る向きを正の向きとするので，向きまで込めて $D$ の境界 $\partial D$ は

$$\partial D = C - C_1 - C_2 - \cdots - C_n$$

と表される．



このとき，

**定理 18.2.** $D$ で正則かつ境界 $\partial D$ で連続な正則関数 $f(z)$ に対し，

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \quad \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

が成立する．

**証明.** $n = 1$ の場合について示す．このとき，$\partial D = C - C_1$ である．

> ポイント
>
> $C$ と $C_1$ を異なる 2 本の直線で結び，領域 $D$ を二つの部分 $D_1$ と $D_2$ に分けると，各境界 $\partial D_j$ $(j = 1, 2)$ は単純閉曲線からなるので，コーシーの積分定理が適用でき
>
> $$\int_{\partial D_j} f(z)\,dz = 0 \ (j = 1, 2)$$
>
> を得る．

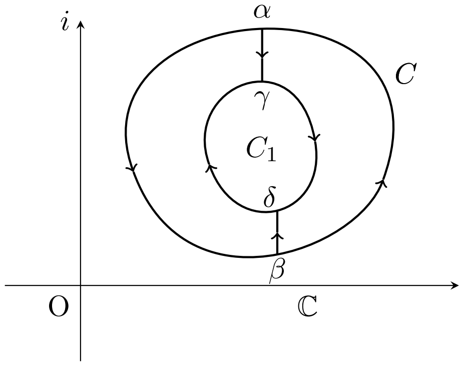
そこで，2つの曲線 $C$ , $C_1$ 上にそれぞれ異なる 2 点 $\alpha, \beta \in C$; $\gamma, \delta \in C_1$ を次のように取る．

$\alpha$ と $\gamma$ を結ぶ直線 $\ell^{(\alpha\gamma)}$, $\beta$ と $\delta$ を結ぶ直線 $\ell^{(\beta\delta)}$ が $D$ に含まれる．ここに，向きを考慮すれば

$$\ell^{(\alpha\gamma)} = -\ell^{(\gamma\alpha)}, \quad \ell^{(\beta\delta)} = -\ell^{(\delta\beta)}$$

(1) 曲線 $C$ 上の点 $\alpha$ から反時計回りに $\beta$ 至る部分を $C^{(\alpha\beta)}$,$\beta$ から反時計回りに $\alpha$ に至る $C$ の部分を $C^{(\beta\alpha)}$ とする．

(2) 曲線 $C_1$ 上の点 $\gamma$ から反時計回りに $\delta$ に至る $C_1$ の部分を $C_1^{(\gamma\delta)}$ とし，$\delta$ から反時計回りに $\gamma$ に至る $C_1$ の部分を $C_1^{(\delta\gamma)}$ とする．




(3) $C^{(\alpha\beta)}, \ell^{(\beta\delta)}, -C_1^{(\gamma\delta)}, -\ell^{(\alpha\gamma)}$ で囲まれる $D$ の部分集合を $D_1$ とし，$C^{(\beta\alpha)}, \ell^{(\alpha\gamma)}, -C_1^{(\delta\gamma)}, -\ell^{(\beta\delta)}$ 囲まれる $D$ の残り半分の部分集合を $D_2$ とする．

(4)

$$
\begin{aligned}
\partial D_1 &= C^{(\alpha\beta)} + \ell^{(\beta\delta)} - C_1^{(\gamma\delta)} - \ell^{(\alpha\gamma)} \\
\partial D_2 &= C^{(\beta\alpha)} + \ell^{(\alpha\gamma)} - C_1^{(\delta\gamma)} - \ell^{(\beta\delta)}
\end{aligned}
$$

以下では被積分項 $f(z)\,dz$ は省略する．そのとき，

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\partial D_1} &= \int_{C^{(\alpha\beta)}+\ell^{(\beta\delta)}-C_1^{(\gamma\delta)}-\ell^{(\alpha\gamma)}} = \int_{C^{(\alpha\beta)}} - \int_{C_1^{(\gamma\delta)}} + \int_{\ell^{(\beta\delta)}} - \int_{\ell^{(\alpha\gamma)}} \\
0 = \int_{\partial D_2} &= \int_{C^{(\beta\alpha)}+\ell^{(\alpha\gamma)}-C_1^{(\delta\gamma)}-\ell^{(\beta\delta)}} = \int_{C^{(\beta\alpha)}} - \int_{C_1^{(\delta\gamma)}} + \int_{\ell^{(\alpha\gamma)}} - \int_{\ell^{(\beta\delta)}}
\end{aligned}
$$

だから，辺々加えると

$$
\int_{C^{(\alpha\beta)}} + \int_{C^{(\beta\alpha)}} - \int_{C_1^{(\gamma\delta)}} - \int_{C_1^{(\delta\gamma)}} = 0
$$

を得る．

$$
\therefore \quad \int_{C^{(\alpha\beta)}} + \int_{C^{(\beta\alpha)}} = \int_{C_1^{(\gamma\delta)}} + \int_{C_1^{(\delta\gamma)}} \quad \longrightarrow \quad \int_{C^{(\alpha\beta)}+C^{(\beta\alpha)}} = \int_{C_1^{(\gamma\delta)}+C_1^{(\delta\gamma)}}
$$

今，$C = \underline{C^{(\alpha\beta)} + C^{(\beta\alpha)}}$ ，$C_1 = \underline{C_1^{(\gamma\delta)} + C_1^{(\delta\gamma)}}$（いずれも正の向き）より

$$
\int_C = \int_{C_1} \quad 即ち \quad \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz
$$

を得る． □

**注意 18.3.** (1) 円環領域 $\overline{\Delta}(\alpha; r, R) = \{r \leqq |z-\alpha| \leqq R\}$ で連続，$D = \{r < |z| < R\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し $\partial D = C_R - C_r$, 但し，

$$\begin{cases} C_R: \ z(t) = Re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \\ C_r: \ z(t) = re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases}$$

このとき，

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_{C_r} f(z)\,dz \Longleftrightarrow \int_{|z|=R} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} f(z)\,dz$$

(2) $\alpha \in \mathbb{C}$ をとる．$f(z)$ を $|z-\alpha| \leqq R$ で連続かつ $|z| < R$ で正則とする．任意の $0 < \epsilon < R$ に対し，

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha}$$

は円環領域 $D = \{\epsilon < |z-\alpha| < R\}$ で正則である．

$\partial D = C_R - C_\epsilon$，但し，

$$\begin{cases} C_R: \ z(t) = \alpha + Re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \\ C_\epsilon \ : \ z(t) = \alpha + \epsilon e^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases}$$

このとき，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R - C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = 0$ より

$$\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz \quad \cdots \quad (18.3.1)$$

を得る．この等式は後に重要な役割を果たす．

## 19 コーシーの積分公式

複素関数 $f(z)$ は $\overline{\Delta} = \{|z-\alpha| \leqq r\}$ で連続かつ $\Delta = \{|z-\alpha| \leqq r\}$ で正則とする．境界 $|z-\alpha| = r$ には正の向きが指定されている．即ち，

$$\partial\Delta = C_r = \{z \in \mathbb{C} \ : |z-a| = r\}: \quad z(t) = \alpha + re^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

そのとき，

**定理 19.1** (積分公式 I)**.**

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

**証明.** 任意の $0 < \epsilon < R$ に対し，$\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ は円環領域 $\{\epsilon \leqq |z-\alpha| < r\}$ で正則.

$$C_\epsilon = \{|z-\alpha| = \epsilon\} \qquad \therefore \qquad C_\epsilon : z = \alpha + \epsilon e^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

とおくと (18.3.1) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+\epsilon e^{it})}{\epsilon e^{it}}\,\epsilon i e^{it}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+\epsilon e^{it})\,dt\end{aligned}$$

左辺は $\epsilon > 0$ に無関係なので極限操作 $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ の影響を受けない．こうして，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+\epsilon e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0} f(\alpha+\epsilon e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,dt = f(\alpha)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt\right) \\ &= f(\alpha)\end{aligned}$$

（＊）厳密な証明ではないが感覚的には理解してもらえると思う.

**注意 19.1.** 極限 lim や $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ や微分操作 $\dfrac{d}{dz}$ と積分操作 $\displaystyle\int$ との順序交換

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\int\ \ \right) &= \int\left(\lim_{n\to\infty}\right) \\ \frac{d}{dz}\left(\int\ \ \right) &= \int\left(\frac{d}{dz}\right) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\ \ \right) &= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}\right)\end{aligned}$$

は一般には成立しない．順序交換する場合はそれが可能である理由を示す必要がある．複素関数論で理由なく順序交換している場合はそれが可能であるという根拠があるからだと思うべし．詳しくは複素解析学の専門書を参考にして欲しい.

□

**定理 19.2** (積分公式 II). 複素関数 $f(z)$ は単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域 $D = (C)$ で正則とする．そのとき，任意の点 $z \in D$ に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, dz$$

が成立する．

**証明.** $D$ は領域だから $z \in D$ に対し，$z$ 中心の十分小さな半径 $\rho > 0$ を持つ円板 $\Delta_\rho = \{\zeta \in D \ : \ |\zeta - z| \leqq \rho\}$ を取れば

$$\Delta_\rho \subset D$$

とできる．今，$\Delta_\rho$ の外側を $D_\rho := D \setminus \Delta_\rho$ とおく．$D_\rho$ を左に見る向きが正の向きで $C$, $C_\rho$ は正の向き（反時計回り）なので，$D_\rho$ の境界は向きまで込めて

$$\partial D_\rho = \partial D - \partial \Delta_\rho = C - C_\rho$$

ここに，$C_\rho : \zeta = \zeta(t) = z + \rho e^{it}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$. 今，$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は $\zeta$ の関数として $D_\rho$ で正則である．定理 18.2 および定理 19.1 より，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z)$$

□

## 20　収束半径

**定義 20.1.** 点 $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = c_0 + c_1 (z - \alpha) + c_2 (z - \alpha)^2 + \cdots + c_n (z - \alpha)^n + \cdots$$

の形の無限級数を $\alpha$ を中心とする**ベキ級数**という．また，$c_n (z - \alpha)^n$ を $n$ 次の項という．

**定義 20.2.** ベキ冪級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ が $z = z_0$ で**絶対収束**するするとは，$|z_0|$ の正項級数（各項が非負である級数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |z_0 - \alpha|^n < +\infty$$

が収束するときをいう．

**注意 20.1.** 絶対収束する級数は収束する．

**例題 20.1.** 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は $|z_0| < 1$ を満たす全ての $z_0$ に対し絶対収束する．

実際，$|z_0| < 1$ なので

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |z_0|^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-|z_0|^{n+1}}{1-|z_0|} = \frac{1}{1-|z_0|}$$

実は，$a \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot (\pm 1)^n z^n = \frac{a}{1 \mp z}$$

**例題 20.2.** $\left|\dfrac{1+2i}{5}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} < 1$ ゆえ，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2i}{5}\left(\frac{1+2i}{5}\right)^{n-1} = \frac{\dfrac{1+2i}{5}}{1-\dfrac{1+2i}{5}} = \frac{i}{2}$$

**命題 20.1.** 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $z = z_0 \neq 0$ で絶対収束するなら，$|z| \leqq |z_0|$ なる全ての $z$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する．

**証明.** 仮定から $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z_0|^n < +\infty$ は収束する．$|z| \leqq |z_0|$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z|^n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z_0|^n < +\infty$$

より分かる．

（＊）上記の証明は厳密ではないが感覚的には理解できるであろう． □

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対し，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < +\infty \tag{20.1.1}$$

とする．$R = 0$ や $R = \infty$ の場合も議論する必要があるが，このノートでは $R$ が有限の場合を扱う．

(20.1.1) の解説

(21.a) 任意の $\rho > \dfrac{1}{R}$ に対し，ある番号 $N = N_\rho$ があって，

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \rho \quad (n \geqq N)$$

を満たす.

(21.b) 任意の $\rho' < \dfrac{1}{R}$ に対して，

$$^\#\left\{n \ : \sqrt[n]{|c_n|} > \rho'\right\} = \infty$$

ここに，集合 $A$ の元の数を $^\# A$ で表す.

**定理 20.1.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| < R$ で絶対収束する.

**証明.** まず，$|z_0| < R$ をみたす任意の $z_0$ に対し，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $z = z_0$ で絶対収束することをいう.

$0 < \epsilon < R - |z_0|$ を満たす任意の $\epsilon$ に対し，$\dfrac{1}{R} < \dfrac{1}{R-\epsilon}$ ゆえ，(21.a) からある番号 $N > 0$ があって，$n \geqq N$ に対し，$n \geqq N$ なら

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R-\epsilon} \quad \therefore \quad |c_n| < \left(\frac{1}{R-\epsilon}\right)^n$$

を得る．また $R - \epsilon > |z_0|$ なので $\dfrac{|z_0|}{R-\epsilon} < 1$. よって

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z_0|^n &= \sum_{n=0}^{N-1} |c_n||z_0|^n + \sum_{n=N}^{\infty} |c_n||z_0|^n \\
&\leqq \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{|z_0|}{R-\epsilon}\right)^n + \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z_0|}{R-\epsilon}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{|z_0|}{R-\epsilon}\right)^n + \left(\frac{|z_0|}{R-\epsilon}\right)^N \frac{1}{1-\dfrac{|z_0|}{R-\epsilon}} < \infty
\end{aligned}$$

こうして，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $z = z_0$ で絶対収束する．命題 4 より $|z| \leqq |z_0|$ を満たす全ての点で $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対収束する．$z_0$ は $|z_0| < R$ を満たす任意の点であったので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| < R$ を満たす全ての点で絶対収束する. □

<u>注意</u> **20.2.** 実は，任意の $0 < r < R$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| \leqq r$ で絶対収束することが同様の議論で示せる．$r > 0$ の任意性から $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は $|z| < R$ で収束する．一方，$|z| > R$ では $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z|^n$ は発散する事が類似の議論で示せる．

<u>定義</u> **20.3.** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{1}{R}$ なる $R$ を級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の**収束半径**という．

<u>注意</u> **20.3** (各自調べよ)**.** $R = \infty$, 即ち，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ のときは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は複素平面全体 $\mathbb{C}$ で収束する．また, $R = 0$, 即ち, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ のときは，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は収束しない．（複素解析というタイトルの教科書を見よ.）

<u>例題</u> **20.3.** 次の級数の収束半径を求めよ.

(1) $1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$

(2) $1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \cdots$

$\boxed{\text{解}}$

(1) $c_n = \dfrac{1}{n!}$ とおく.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

即ち，収束半径 $R = \infty$. 即ち，$\mathbb{C}$ 全体で収束する.

(2) $c_n = n!$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n!|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

即ち，収束半径 $R = 0$. よって，収束しない（発散する).

因みに，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \log(\sqrt[n]{n!}) = \infty$ の証明は以下に示す：

$$\begin{aligned} \log \sqrt[n]{n!} &= \frac{\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n}{n} \\ &> \frac{\int_1^n \log x \, dx}{n} = \frac{n \log n - n + 1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \infty \end{aligned}$$

$\square$

<u>**例題**</u> **20.4.** ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ の収束半径が $R<+\infty$（有限）ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-\alpha)^{n-1}$ の収束半径も同じく $R$ である．

$\boxed{\text{解}}$

$\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ ゆえ

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

$\square$

<u>**定義**</u> **20.4.** 複素関数 $f(z)$ が $z=\alpha$ で**解析的**とは，$f(z)$ が $z=\alpha$ のまわりでテーラー展開できるとき，即ち，$z=\alpha$ 中心の円板 $\Delta := \Delta(\alpha, r) = \{|z-\alpha| < r$ があって，$f(z)$ は $\Delta$ 上で収束するベキ級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$$

に展開できるときをいう．勿論，$r$ はさらに，領域 $D$ の各点で解析的な関数を $D$ 上の**解析関数**という．

<u>**注意**</u> **20.4.** $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ とすれば，必然的に

$$R \neq 0 \quad \text{かつ} \quad r < R$$

が分かる．

<u>**注意**</u> **20.5** (重要！). 関数列 $\left\{f_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ の無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

や無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

の収束を論ずるときはその極限関数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_n(z-\alpha)^k$$

の連続性や微分可能性が求められる．

それを示すには，単なる収束（各点ごとの収束）の概念だけではなく，一様収束や広義一様収束といった（セミ）グローバルな収束の概念が必要になってくる．参考文献：解析概論（高木貞治）岩波書店

## 21　正則関数の解析性

**定理 21.1.** 正則関数は解析関数である．また，逆も正しい．即ち，解析関数は正則関数である．

**証明.** 関数 $f(z)$ は $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \quad |z-\alpha| \leq r\}$ で正則とする．$z \in \Delta$ を任意にとる．$C = \partial\Delta$（正の向き）とおく．定理 19.2 から

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta \in C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta \in C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta \in C} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} \cdot \frac{1}{1-(\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha})} d\zeta \end{aligned}$$

さて，$\zeta \in C = \partial\Delta$, $z \in \Delta$ より

$$|\zeta-\alpha| > |z-\alpha| \quad \therefore \quad |\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}| < 1$$

である．無限等比級数の収束（公比が 1 より小さい）条件より，次の級数は $|\zeta - a| = r$ を満たす任意の $\zeta$ に対して絶対収束する．

$$\therefore \quad \frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n \ < \ \infty.$$

故に,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha})}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\Big)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\Big]d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\Big\}(z-\alpha)^n. \end{aligned}$$

最後の項は $\sum_{n=0}^{\infty}$ は $\int_C$ の外に出す事ができる（項別積分可能）であることから従う（注意 19.1）．さらに

$$c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta \ \ (n \geq 0)$$

とおくと，最終的に，$|z-a| < r$ を満たす $z$ に対し,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$$

と収束する冪級数に展開できることが示された．こうして，$f(z)$ は解析関数である．

**注意 21.1.** 正則関数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ に対し，導関数 $f'(z)$ は

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-\alpha)^{n-1}$$

とおくと，$f(z)$ と $\varphi(z)$ の収束半径は同じである．実際,

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|c_n|} &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n}\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} \\ &= 1\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} \end{aligned}$$

から分かる（例題 20.3)．実は，$\varphi(z) = f'(z)$ も分かる！このことから，解析関数の微分可能性が示され, 結果，解析関数の正則性が従う．同時に

正則関数は無限回微分可能であることもわかる．テーラー展開に関する基本的な事実から

$$c_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(\alpha) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

を得る．こうして，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

を得る．

$\square$

<u>**注意**</u> **21.2.** 任意の $z \in \Delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| < r\}$ に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

ここで，実は，微分と積分の順序交換をすることができる（詳細は省略するが交換可能条件が整っている）．

$$\begin{aligned} f'(z) = \frac{df(z)}{dz} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\left(\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}$$

同様に繰り返し微分することにより

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

を得る．

<u>**系**</u> **21.1** (コーシーの評価式)**.** $\max_{z \in C_R} |f(z)| = M$ とおくと，

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leqq \frac{n! M}{R^n}$$

<u>証明</u>.

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(\alpha)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{z\in C_R}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz\right| \\
&\leqq \frac{n!}{2\pi}\int_{z\in C_R}\frac{|f(z)|}{|z-\alpha|^{n+1}}\,|dz| \\
&\leqq \frac{n!}{2\pi}\int_{z\in C_R}\frac{M}{R^{n+1}}\,|dz| \\
&= \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}}\int_{z\in C_R}|dz| = \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}}\cdot 2\pi R \\
&= \frac{n!M}{R^n}
\end{aligned}$$

□

**問題 21.1.** 以下を示せ．但し，積分路 (曲線) $C$ の向きは正の向きとする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz = \underline{\pi(-8+6i)}$. 但し，$C=\{|z|=2\}$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = \underline{\pi i}$. 但し，$C=\{|z-2i|=4\}$.

(3) $\displaystyle\frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz = \underline{-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i}$. 但し，$C=\{|z|=1\}$.

解答

(1) 分子 $z+i$ について，$z=-i$ は円 $C=\{|z|=2\}$ の内側にある．

$$f(z)=z^2-4z+4,\ \alpha=-i$$

とおくと，

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^2-4z-4}{z+i}\,dz$$

一方，$f(\alpha)=f(-i)=(-i)^2-4(-i)+4=3+4i$ より，

$$\int_C\frac{z^2-4z-4}{z+i}\,dz=2\pi i(3+4i)=\pi(-8+6i).$$

□

(2) $z^2+9=(z+3i)(z-3i)$. 今，$z=3i$ は円 $C=\{|z-2i|=4\}$ の内側にあり，$z=-3i$ は $C$ の外側にある．こうして，$f(z)=\dfrac{z}{z+3i}$ の

分母は $C$ の内部 $(C)=\{|z-2i|<4\}$ でゼロを取らないので $(C)$ で正則である．こうして,

$$f(z)=\frac{z}{z+3i},\ \alpha=3i$$

とおけば,

$$2\pi i\, f(\alpha)=\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz=\int_C\frac{z}{z^2+9}\,dz=\int_C\frac{\frac{z}{z+3}}{z-3i}\,dz$$

$$\therefore 2\pi f(3i)=(2\pi i)\frac{3i}{3i+3i}=2\pi i\,\frac{3i}{6i}=\pi i.$$

□

(3) まず, $\dfrac{z+1}{z^4+2iz^3}=\dfrac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}.$

$$f''(\alpha)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha)^3}\,dz$$

を $\alpha=0,\ f(z)=\dfrac{z+1}{z+2i}$ の場合に適用する．$f(z)$ は $C=\{|z|=1\}$ の内部 $(C)=\{|z|<1\}$ で分母がゼロでないので正則である．ゆえに,

$$\frac{2\pi i}{2!}f''(0)=\int_C\frac{z+1}{z^4+2iz^3}\,dz=\int_C\frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}\,dz$$

$$f''(z)=\left(\frac{z+1}{z+2i}\right)''=\frac{2-4i}{(z+2i)^3}$$

より,

$$f''(0)=\frac{2i-1}{4i}\qquad\therefore\frac{2\pi i}{2!}f''(0)=\frac{2\pi i}{2!}\,\frac{2i-1}{4i}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i$$

□

# 22　正則関数の諸性質（スキップして良い！）

## 22.1　Liouville の定理

定理の証明の前に Cauchy の評価式の復習から入る．

複素関数 $f(z)$ は $z=a$ 中心，半径 $R>0$ の開円板 $\Delta(a;R)$ で正則かつ境界 $C:\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z-a|=R\}$ で連続とする．このとき，$|z-a|<R$ をみたす $\alpha z$ に対し，

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\ (z-a)^n
\end{aligned}
$$

は絶対収束し，$0<\rho<R$ なる任意の $\rho>0$ に対し，閉円板 $\overline{\Delta}(a;\rho)$ 上で一様収束した．但し，

$$
c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\ .
$$

そのとき，$f(z)$ はコンパクト集合 $C$ 上で連続だから，最大値

$$
M(\rho) = \max_{|\zeta-a|=\rho} |f(\zeta)|
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta)\ d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| \\
&\leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}}|dz| \\
&\leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}|dz| \\
&= \frac{M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}}\int_C |dz| \\
&= \frac{M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho \\
&= \frac{M(\rho)}{\rho^n}
\end{aligned}
$$

従って，

**定理 22.1** (Liouville の定理)**.** $f(z)$ を全平面で正則かつ有界な関数とする（即ち，$|f(z)|<K$ が全ての $z$ に対して成立する）その時，$f(z)$ は定数関数である．

*Proof.* $f(z)$ は有界だから，正の定数 $K>0$ が存在し，$|f(z)|\leqq K$ が全ての $z\in\mathbb{C}$ に対して成立する．任意の $\epsilon>0$ に対して, 正の実数 $R>\sqrt[n]{\dfrac{K}{\epsilon}}$

となるように選ぶ．この $R > 0$ に対して，$f(z)$ は $\overline{\Delta}(0; R)$ で正則だから，この閉円板上で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とテーラー展開できる．Cauchy の評価式より，

$$|c_n| \leqq \frac{K}{R^n} < K \cdot \frac{\epsilon}{K} < \epsilon \ \ (n \geqq 1)$$

よって，$n \geqq 1$ に対して，$c_n = 0$. 即ち，$f(z) = c_0$（定数）が $|z| < \infty$ について言える． □

## 22.2 一致の定理

**定理 22.2** (一致の定理)**.** $f(z)$ は連結領域 $D$ で正則とする．$a \in D$ に収束する $D$ 内の点列

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty},\ (z_n \neq a)$$

に対して，$f(z_n) = 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ が成立しているならば，$D$ 上 $f(z) \equiv 0$（恒等的にゼロ）である．

*Proof.* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) = 0$. $f(z)$ は $z = a$ で正則だから，$a$ 中心の開円板 $\Delta(a, r)$ で収束する級数

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots + c_n(z - a)^n + \cdots$$

に展開できる．

$$k = \min\{m :\ |c_m \neq 0\}$$

とおく．

**Claim.** $k = \infty$. 従って，任意の $k \geq 1$ に対して $c_k = 0$, 即ち，$\Delta(a, r)$ 上 $f(z) \equiv 0$ である．

実際，$k < \infty$（有限）と仮定して矛盾を導く．

$$f(z) = (z - a)^k \{c_k + c_{k+1}(z - a) + \cdots + c_{k+m}(z - a)^m + \cdots\}$$

$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots + c_{k+m}(z-a)^m + \cdots$ とおく．$\varphi(a) = c_k$ かつ $0 < |z-a| < r$ を満たす任意の $z$ に対して $\varphi(z)$ は収束する事がわかる．実際，左辺の $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^k}$. よって，$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots + c_{k+m}(z-a)^m + \cdots$ は $z = a$ でのテーラー展開である．従って，$\Delta(a, r)$ で正則である．$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k \varphi(z_n)$ であり $z_n \neq a$ ゆえ，$\varphi(z_n) = 0$.

よって，$\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\varphi(a)=0.$ 一方，$\varphi(a)=c_k\neq 0$ ゆえ，矛盾が生ずる．こうして，$k=\infty$，即ち，任意の $c_k=0$ $(k=1,2,\cdots,)$．故に，$\Delta(a,r)$ で $f(z)\equiv 0$.

次に，任意の $b\in D$ に対し，$f(b)=0$ を示せば，$D$ 上 $f(z)\equiv 0$ であるという結論を得る．実際 $D$ は連結だから弧状連結である．よって，$a$ と $b$ は $D$ 内の連続な曲線 $C$ で結べる．$C$ と $D$ の境界 $\partial D$ との最小距離を $d>0$ とする．$C$ 上に分点 $\{w_0=a,w_1,\cdots,w_N=b\}$ を次を満たすように取る：

(1) $f(z)$ は $\Delta(w_k,r_k)$：$|z-w_k|<r_k<d$ で収束する級数に展開できる．

(2) $C\cap\Delta(w_k,r_k)\cap\Delta(w_{k+1},r_{k+1})\neq\emptyset$ $(0\leq k\leq N)$.

(3) $w_{k+1}\in\partial\Delta(w_k,r_k)\cap C$

(4) $C\subset\bigcup_{k=0}^{N}\Delta(w_k,r_k)$.

今，$\Delta(w_k,r_k)$ 上で $f(z)\equiv 0$ と仮定する．点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\lim_{n\to\infty}z_n=w_{k+1}\ (z_n\neq w_{k+1})$$

かつ

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C\cap\Delta(w_k,r_k)\cap\Delta(w_{k+1},r_{k+1})$$

を満たすように取る（取る事ができる）．仮定から $f(z_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ ゆえ，$\Delta(w_{k+1},r_{k+1})$ 上 $f(z)\equiv 0$ が成立する．従って，帰納法により，$f(z)\equiv 0$ が $\Delta(b,r_N)$ で成立する事が分る．従って，$f(b)=0$，即ち，$D$ 上 $f(z)\equiv 0$ が示された．$\square$

<u>系</u> **22.1.** 領域 $D$ で<u>定数でない</u>正則関数 $f(z)$ の零点集合

$$A:=\{z\in D\ :\ f(z)=0\}$$

は空集合でなければ，孤立点からなる．即ち，任意の $a\in A$ に対して，近傍 $\Delta(a,\rho)$ が存在して，

$$\Delta(a,\rho)\cap(A-\{a\})=\emptyset$$

換言すれば，もし $f(a)=0$ ならば，$\rho>0$ があって，$0<|z-a|<\rho$ 上 $f(z)\neq 0$ が成立する．特に，$\rho>0$ を少し小さく取る事により，$|z-a|=\rho$ 上 $f(z)\neq 0$ とできる．

*Proof.* まず，$A$ は閉集合である．実際，正則関数 $f(z)$ を写像 $f : D \longrightarrow C$ とみれば連続写像である．一点 $0 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．従って，閉集合の連続写像による逆像 $A = f^{-1}(0)$ は閉集合である．よって，$A$ の集積点は $A$ に含まれる．

$A$ が集積点 $a$ を持つとすると，$A$ は閉集合だから $a \in A$ かつ任意の $\alpha\rho > 0$ に対して

$$\Delta(a, \alpha\rho) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

が成立する．特に，$\rho > 0$ として，$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ なる単調減少列

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_n > \cdots \to 0$$

をとれば，

$$^{\exists}z_n \in \Delta(a, \alpha\rho_n) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を得る．即ち，点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ で，$|z_n - a| < \rho_n \ (n \geq 1)$ を満たすものが存在する．特に，$\lim_{n\to\infty} z_n = a \ (z_n \neq a)$ を得る．$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ より $f(z_n) = 0 \ (n \geq 1)$. 一致の定理より，$D$ で $f(z) \equiv 0$ である．これは，$f(z)$ が定数でないという仮定に矛盾する．従って，零点集合 $A$ は決して集積点を持たないので，孤立点ばかりからなる． □

### 22.3 開写像定理

<u>定理</u> **22.3** (開写像定理)**.** 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 $D$ で定義された正則関数 $f(z)$ を（正則）写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ とみるとき，$f$ は開写像である．即ち，任意の開部分集合 $U \subset D$ に対してその像 $f(U)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．従って，$U \subset D$ が部分領域ならば $f(U)$ もまた領域である．

*Proof.* 任意に $w_0 \in f(U)$ をとる．このとき, $w_0 = f(z_0)$ となる $^{\exists}z_0 \in U$ がある．<u>$f(U)$ が開集合</u>である事を示すには<u>$w_0$ のある近傍が $f(U)$ に含まれる</u>事を言えばよい.

正則関数 $f(z) - f(z_0) = f(z) - w_0$ は $z = z_0$ を零点に持つ．一致の定理より $z_0$ を中心とする半径 $\rho > 0$ の円周 $|z - z_0| = \rho$ 上で $f(z) - f(z_0) \neq 0$（決して零を取らない）とできる．そのとき，

$$d := \min_{|z - z_0| = \rho} |f(z) - f(z_0)| > 0$$

**Claim.** $w \notin f(U)$ & $|w-w_0| < d \Longrightarrow |w-w_0| \geq \frac{d}{2}$

これは

$$\Delta(w_0, \frac{d}{2}) := \left\{ w \ : \ |w-w_0| < \frac{d}{2} \right\} \subset f(U)$$

を意味する．即ち，$f(U)$ が $w_0$ の近傍を含む．よって，$f(U)$ は開集合である．

さて, Claim の証明であるが, $w \notin f(U)$ より, $f(z)-w \neq 0$ が $|z-z_0| \leq \rho$ で成立する．よって, $g(z) := \dfrac{1}{f(z)-w} \neq 0$ は $|z-z_0| \leq \rho$ で正則. Cauchy の積分公式より,

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{z-z_0} \ dz.$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|w-w_0|} = |g(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|} \left| \frac{g(z)}{z-z_0} \right| \ |dz| \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{\rho\ |f(z)-w|} \, |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{|f(z)-w_0| - |w-w_0|} \ |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{d-|w-w_0|} \ |dz| \ \ (\because |w-w_0| < d) \\
&= \frac{1}{d-|w-w_0|} \ \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|z-z_0} |dz| \\
&= \frac{1}{d-|w-w_0|}
\end{aligned}$$

よって,

$$|w-w_0| \geq \frac{d}{2}$$

□

## 22.4　最大絶対値の定理

**定理 22.4** (最大絶対値の定理)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数 $f(z)$ の絶対値 $|f(z)|$ が $D$ の内点で最大値をとれば $f(z)$ は定数関数である．従って，定数でない正則関数は領域の内点で決して最大値を取らない．

*Proof.* $f(z)$ は定数関数ではないと仮定する．$f(z)$ が $D$ の内点 $a \in D$ で最大絶対値 $M$ をもつとうれば，$|f(a)| := M \geq |f(z)|$ が全ての $z \in D$ に対して成立する．$f(z)$ は $z = a$ で正則だから，$a$ 中心の閉円板 $\overline{\Delta(a,\rho)} \subset D$ があって，$f(z)$ は $\overline{\Delta(a,\rho)}$ で正則である．よって，

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k < \infty$$

は $\overline{\Delta(a,\rho)}$ 上で絶対一様収束する．ここで，

$$\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})|^2 \ dt = \frac{1}{\rho} \int_{|z-a|=\rho} |f(z)|^2 \ |dz| \leq 2\pi M^2$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})|^2 \ dt &= \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it}) \cdot \overline{f(a+\rho e^{it})} \ dt \\
&= \sum_{k,\ell}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_k \overline{c_\ell} \rho^{k+\ell} e^{i(k-\ell)t} \ dt \\
&= \sum_{k,\ell}^{\infty} \left\{ c_k \overline{c_\ell} \rho^{k+\ell} \cdot \left( \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t} \ dt \right) \right\}
\end{aligned}$$

今，

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t} \ dt = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 2\pi & k = \ell \end{cases}$$

ゆえ，

$$(22.4.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} \leq M^2$$

を得る「グッツマー (Gutzmer) の不等式という」．ここで，$c_0 = f(a)$ だから，$|c_0| = |f(a)| = M$.

$$|c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} = M^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} \leq M^2$$

こうして

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \rho^{2k} \leq 0$$

従って，$c_k = 0 \ \ (k \geq 1)$. 即ち，$f(z) = c_0$ が $\Delta(a,\rho)$ で成立．一致の定理より $f(z)$ は領域 $D$ で定数関数となり矛盾．以上より，$|f(z)|$ は定数でなければ $D$ の内点で最大値を取らない．

**系 22.2.** 閉領域 $\overline{D}$ で非定数な正則関数 $f(z)$ は $D$ の境界 $\partial D$ で最大値絶対値をとる．特に，

$$\max_{z\in D}|f(z)| = \max_{z\in\partial D}|f(z)| = |f(z_0)| \quad ({}^{\exists}z_0 \in \partial D)$$

かつ

$$|f(z)| < |f(z_0)| \quad ({}^{\forall}z \in D).$$

□

## 23 ローラン級数展開

正則関数のテーラー展開は正の冪の項による級数展開であった．ここでは，負冪の項も許した級数展開について解説する．

**設定**: $f(z)$ を穴開き円板 $\Delta^* := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z-\alpha| < r\}$ およびその境界（円周）$C_r := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| = r\}$ で正則な関数とする．但し，$z=\alpha$ では必ずしも正則とは限らない．そのとき

$z \in \Delta^*$ を取れば，$|z-\alpha| > 0$ ゆえ $0 < \epsilon < |z-\alpha| < r$ を満たす任意に $\epsilon > 0$ に対し，$f(z)$ は円環

$$\Delta_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \epsilon \le |z-\alpha| \le r\} \subset \Delta^*$$

で正則である．そこで

$$\partial\Delta_\epsilon = C_r - C_\epsilon, \quad C_\epsilon := \left\{\alpha + \epsilon e^{it} \ (0 \le t \le 2\pi)\right\}, \quad C_r = \left\{\alpha + re^{it} \ (0 \le t \le 2\pi)\right\}$$

とおく．このとき，$f(z)$ は円環 $\Delta_\epsilon$ で正則である．

**補題 23.1.** 任意の $z \in \Delta_\epsilon$ に対して，

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \end{aligned}$$

**証明.** 点 $z$ と変数を区別するため新たな複素変数を $\zeta$ を導入する．そのとき，

$$\Delta(z;\rho) = \{|\zeta - z| < \rho\} \subset \Delta_\epsilon = \{\epsilon < |\zeta - a| < r\}$$

となるように $\rho > 0$ を選ぶ（これは $\rho$ を小さく選べば可能）．

さて，関数 $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は $\zeta$ の関数として円環 $\Delta_\epsilon$ から $\overline{\Delta}(z;\rho)$ を除いた部分 $D := \Delta_\epsilon \setminus \overline{\Delta}(z;\rho)$ で正則である．また，$D$ の境界は向きを考慮して

$$\partial D = C_r - C_\epsilon - \{|\zeta - z| = \rho\}$$

そこで，定理 18.2 を適用すれば

$$0 = \int_{\partial D} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_r} g(\zeta)\, d\zeta - \int_{C_\epsilon} g(\zeta)\, d\zeta - \int_{|\zeta - z| = \rho} g(\zeta)\, d\zeta$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} g(\zeta)\ d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} g(\zeta)\ d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \rho} g(\zeta)\ d\zeta \\
\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta + f(z)
\end{aligned}$$

ここで，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta \quad \text{（定理 19.2 を見よ）}$$

であることに注意．こうして最終的に

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta = \text{(I)} - \text{(II)} \tag{23.1.1}$$

但し，

$$\text{(I)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta\ , \quad \text{(II)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta$$

を得る． □

<u>Claim I</u> ：$\text{(I)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n.$

但し， $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \ \ (n \geq 0)$

($\because$) まず，

$$\frac{1}{\zeta - \alpha} = \frac{1}{(\zeta - \alpha) - (z - \alpha)} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}}$$

と式の変形を行う．　今，$z \in \Delta_\epsilon$, $\zeta \in C_r$ ゆえ，円環領域における $\alpha, z, \zeta$ の位置関係から，

$$\epsilon < |z-\alpha| < |\zeta-\alpha| = r \quad \therefore \quad \left|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right| < 1.$$

が成り立つ．このことから，

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n$$

したがって，

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}$$

このことから，

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\right\}(z-\alpha)^n$$

こうして，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\right\}(z-\alpha)^n\,d\zeta \\
&= \frac{(z-\alpha)^n}{2\pi i}\int_{C_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-\alpha)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n
\end{aligned}$$

但し，

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta \quad (n \geq 0)$$

（**註**）　ここで，３行目から４行目の等号は，この場合

$$\int_{C_r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{C_r}\cdots\right) \quad \text{（順序交換可能）}$$

であることから得られる．　□

<u>Case II</u> : この場合は，$z \in \Delta_\epsilon$, $\zeta \in C_\epsilon$ ゆえ

$$\epsilon = |\zeta - \alpha| < |z - \alpha| < r \quad \therefore \quad \left|\frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}\right| < 1$$

従って，$z$ と $\zeta$ を入れ替える事により (Cases I) と同様の議論により

$$\begin{aligned}
\text{(II)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\, d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - (\dfrac{\zeta-\alpha}{z-\alpha})} d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{z-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\Big)^n d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \left\{\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\alpha)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\alpha)^{n+1}}\right\} d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}\, d\zeta\right\} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^n d\zeta\right\} \frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(z-\alpha)^{n+1}} \qquad \left(\text{但し} \quad d_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} (\zeta-\alpha)^n f(\zeta)\, d\zeta\right)
\end{aligned}$$

こうして

<u>Claim II</u> : $\quad \text{(II)} = \displaystyle\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(z-\alpha)^{n+1}}$

但し，$d_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_\epsilon} (\zeta-\alpha)^n f(\zeta)\, d\zeta$

ここで，$\partial\Delta_\epsilon = C_r - C_\epsilon$ を考慮すれば，定理 18.2 より $d_n$ は $\epsilon$ に依存せず $r > 0$ で決まる．即ち，

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} (\zeta-\alpha)^n f(\zeta)\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} (\zeta-\alpha)^n f(\zeta)\, d\zeta \quad (n \geqq 0)
\end{aligned}$$

次に

$$\begin{cases}
d_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} (\zeta-\alpha)^n f(\zeta)\, d\zeta \quad (n \geqq 0) \\
c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\, d\zeta \quad (n \geqq 0)
\end{cases}$$

において，$c_n$ の $n$ を形式的に $-n$ で置き換えると

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{-n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}d\zeta = d_{n-1}$$

$$\therefore \quad c_{-n} = d_{n-1}$$

特に

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\,d\zeta = f(\alpha) \\ d_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)\,d\zeta = c_{-1} \end{aligned}$$

こうして，

$$\therefore \quad \text{(II)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{(z-\alpha)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_{n-1}}{(z-\alpha)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

と表せる． $\square$

(23.1.1) より $f(z) = \text{(I)} - \text{(II)}$．故に，

**定理 23.1.** $f(z)$ を $(0 < |z-\alpha| \leqq r)$ で連続，$(0 < |z-\alpha| < r)$ 正則とする．そのとき，任意の $z \in \Delta^*$ に対し，

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \\ &= \cdots + \frac{c_{-N}}{(z-\alpha)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \quad \cdots \end{aligned} \tag{23.1.2}$$

但し，

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\ , \quad (\underline{n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm N, \cdots}).$$

**注意 23.1.** 定理 (18.2) より，任意の $0 < \rho < r$ に対して，

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\,d\zeta$$

である．

**注意 23.2.** 上記の $f(z)$ の負幂の項まで含む展開式を $z=\alpha$ での**ローラン展開**という．ここで，$f(z)$ は $z=\alpha$ で定義されているかどうかは分からない．

**定理 23.2** (ローラン展開の一意性)**.** $f(z)$ が $z=\alpha$ で 2 つのローラン展開

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz \quad (n\in\mathbb{Z}) \\ f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n \end{aligned}$$

をもてば，展開係数について $c_m = a_m \quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N,\cdots)$ が成り立つ．即ち，関数 $f(z)$ のローラン展開は $f(z)$ に対し一意的に定まる．

**証明.** まず $C:\{|z-\alpha|=R\}:\ z=\alpha+Re^{i\theta}$ に対し，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi R^k}\int_0^{2\pi} e^{-ki\theta}\,d\theta = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad k=0 \\ 0 & \text{if} \quad 0\neq k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

に注意する． $m\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned} (\spadesuit) \quad \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{m+1}} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-\alpha)^n\right)\frac{1}{(z-\alpha)^{m+1}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\frac{(z-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n}{(z-\alpha)^{m+1-n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{m+1}}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n}{(z-\alpha)^{m+1-n}}\right)dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^{(m-n)+1}}\right) \\ &\qquad \left(\because \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{ と } \int_C \text{ の}\underline{\text{順序交換可能}}\text{である}\right) \\ &= a_m \end{aligned}$$

最後の項は ($\spadesuit$) より得られる．実際 $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z-\alpha)^{(m-n)+1}} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad m=n \\ 0 & \text{if} \quad m\neq n \end{cases}$

ゆえに，$c_m = a_m$ $(m \in \mathbb{Z})$．こうして，二つのローラン展開は一致する． $\square$

**例題 23.1.** $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(2-z)}$ $\quad 1 < |z| < 2$ の $z = 0$ でのローラン展開を求めよ．

解.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}\right)$$

$1 < |z| < 2$ より，$\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \quad \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1.$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$\therefore \quad f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

ローラン展開の一意性（定理 23.2）から，上記の展開は $f(z)$ の $z = 0$ でのローラン展開である.. $\square$

**例題 23.2.** (1) $f(z) = \dfrac{8Z+1}{z(1-z)}$ $\quad (0 < |z| < 1)$ を $z = 0$ でローラン展開せよ．解.

$$f(z) = \frac{8Z+1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1-z} = \frac{1}{z} + 9\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \because \quad |z| < 1$$

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ $\quad (1 < |z-2| < 2)$ を $z = 2$ でローラン展開せよ．
解.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}\right) + \frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n + \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n \\ &\because \left|\frac{z-2}{2}\right| < 1 \quad \& \quad \left|\frac{1}{z-2}\right| < 1 \quad (\because \quad 1 < |z-2| < 2) \end{aligned}$$

**定義 23.1.** $f(z)$ の $z=\alpha$ でのローラン展開 (23.1.2) に於ける係数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta$$

を $f(z)$ の $z=\alpha$ での**留数**と呼び,

$$c_{-1} := \mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta$$

にて表す．ここで，積分路 $C$ は $\alpha$ 中心の十分小さな半径 $\rho>0$ の円

$$C = C_\rho = \{|z-\alpha| = \rho\} \text{（正の向きづけ）}$$

とする．特に，係数 $c_n$ は $\rho>0$ の取り方に依らない.

**例題 23.3.** $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ $(0<|z-1|<2)$ に対し，$\mathrm{Res}(f;1)$ を求めよ.

解.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{-\frac{1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z-3} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{z-1} - \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \\
&\because \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \quad (\because |z-1|<2)
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{z-1}$ の係数は $-\dfrac{1}{4}$ であるから，$c_{-1} = \mathrm{Res}(f;1) = -\dfrac{1}{4}$ □

## 24 解析関数の特異点

関数 $f(z)$ を $0<|z-\alpha|<r$ で正則とする．そのとき，次の 3 つの場合が考えられる.

(1) $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ は有限確定値.

(2) $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$

(3) $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ は不確定値（値が確定しない).

今，$f(z)$ のローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \quad \cdots\cdots (24.1.1)$$

とする．

**定義 24.1.** (i) $z=\alpha$ が $f(z)$ の**除去可能特点：**

$\Longleftrightarrow$ $n>0$ なるすべての $n$ に対し，$c_{-n}=0$ のとき．

このとき，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n.$$

特に，$\lim_{z\to\alpha} f(z) = c_0$ は有限確定値．除去可能特異点に関しては次の定理が知られている．

**定理 24.1** (リーマンの除去可能特異点定理)**.** 関数 $f(z)$ は $0<|z-\alpha|<R$ で正則かつ有界とする．そのとき，$z=\alpha$ は $f(z)$ の除去可能特異点である．

*Proof.* $0<|z-\alpha|<r$ において，$|f(z)|<M$ とする．$f(z)$ の Laurent 展開の負冪（ベキ）の項の係数 $c_{-n}=0$ $(n>0)$ を示す．

実際，任意の $r>\epsilon>0$ に対し，

$$|c_{-n}| \le \int_{|z-\alpha|=\epsilon} |\zeta-\alpha|^{n-1}|f(z)||d\zeta| < \epsilon^n M.$$

$\epsilon>0$ の任意性から，$c_{-n}=0$ $(n>0)$ を得る． □ □

(ii) $z=\alpha$ が $f(z)$ の**極：**

$\Longleftrightarrow$ ある自然数 $N>0$ があって，$c_{-N}\neq 0$ であり，$n>N$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し，$c_{-n}=0$ のとき．

このとき，

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n,\ \ c_{-N}\neq 0.$$

特に，$\lim_{z\to\alpha} f(z)=\infty$ この自然数 $N$ を $f(z)$ の $z=\alpha$ における**極の位数**といい，$N=\mathrm{Ord}_\infty(f;\alpha)$ で表す．

(iii) $z=\alpha$ が $f(z)$ の**本質的特異点：**

$\iff$ 任意の自然数 $N$ に対して，$c_{-k}\neq 0$ となる $k\geq N$ が存在する．

このとき，

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n.$$

本質的特異点については次が知られている（スキップしてよい）．

**定理 24.2.**

$$\overline{\bigcap_{\rho>0} f(\rho<|z-\alpha|<r)}=\mathbb{C}\quad \text{(Weierstrass)}.$$

即ち，任意の複素数 $w_0\in\mathbb{C}$ および任意の $\rho$ に対し $f(z)$ は $\{0<|z-\alpha|<\rho\}$ 上いくらでも $w_0$ を近似する．つまり，$\alpha$ に近づく点列 $\{z_n\}$ が存在し，$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w_0$ とできる．

**証明.** 背理法で示そう：ある $\epsilon>0$ およびある $w_0\in\mathbb{C}$ に対して，穴空き円板 $\{0<|z-\alpha|<r\}$ が存在し，$|f(z)-w_0|>\epsilon$ が成立すると仮定する．

$$|g(z)|<\epsilon$$

が $\{0<|z-\alpha|<r\}$ で成立するので，

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w_0}$$

は $\{0<|z-\alpha|<r\}$ で正則有界である．こうして，リーマンの除去可能定理より，$z=\alpha$ は $g(z)$ の除去可能特異点である．ゆえに，

$$\lim_{z\to\alpha}g(z)=\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{f(z)-w_0}$$

は有限確定値である．このことは，$\lim_{z\to\alpha}f(z)$ が有限確定であるか，または $\lim_{z\to\alpha}f(z)=\infty$ の何れかである事を示す．従って，$z=\alpha$ は $f(z)$ の除去可能特異点または極である．これは，仮定の $z=\alpha$ は $f(z)$ の真性特異点であることに反する． □

**注意 24.1.** ワイエルストラスの定理について補足する．

$$w_0\in\overline{\bigcap_{\rho>0} f(\rho<|z-\alpha|<r)}$$

ならば，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\Delta(w_0, \epsilon) \cap \left( \bigcap_{\rho > 0} f(\rho < |z - \alpha| < r) - \{w_0\} \right) \neq \emptyset$$

よって，$w_0$ に収束する点列

$$^{\exists} w_\epsilon \in \bigcap_{\rho > 0} f(\rho < |z - \alpha| < r) - \{w_0\}$$

が存在する．$w_\epsilon = f(^{\exists} z_\epsilon)$ $(\epsilon < |z_\epsilon - \alpha| < r)$ としてよい．$\epsilon > 0$ の任意性から，$z_\epsilon \to \alpha$ が分る．よって

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(z_\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} w_\epsilon = w_0$$

□

（∗）定理 24.1, 注意 24.1, 定理 24.2 はスキップして良い．

## 25　有理型関数

**定義 25.1.**　(1) 関数 $f(z)$ が $z = \beta$ で有理型あるとは，穴あき円板

$$\Delta^* = \{0 < |z - \beta| < r\}$$

および自然数 $\nu = \nu(\beta)$ があって，$f(z)$ は $\Delta^*$ で正則かつ $z = \beta$ で $\nu$ 位の極をもつとき．即ち，$(z - \beta)^\nu f(z)$ が $|z - \beta| < r$ で正則のとき．

(2) 関数 $f(z)$ が領域 $D$ で**有理型**であるとは，$f(z)$ に付随した有限個の点

$$(f)_\infty = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q\} \subset D$$

があって，$f(z)$ は $D \setminus (f)_\infty$ で正則関数であり，$f(z)$ は各点 $\beta_k$ で位数 $\mathrm{Ord}(f; \beta_k) = \nu_k$ の極をもつ．$(f)_\infty$ を有理型関数 $f(z)$ の**極集合**という．この時,

$$\varphi(z) = (z - \beta_1)^{\nu_1} \cdots (z - \beta_k)^{\nu_k} f(z)$$

は $D$ で正則な関数である．

**注意 25.1.** $f(z)$ が $z=\beta$ を $\nu$ 位の極をもつ有理型関数ならば,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\nu}\frac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\beta)^n,\quad c_{-\nu}\neq 0$$

と表せるので,

$$\begin{aligned}(z-\beta)^{\nu}f(z) &= c_{-\nu}+\cdots+c_{-1}(z-\beta)^{\nu-1}+(z-\beta)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\beta)^n \\ &= \sum_{n=-\nu}^{\infty}c_n(z-\beta)^{n+\nu}\quad (n+\nu\geqq 0)\end{aligned}$$

を得る．右辺は正ベキからなる級数ゆえ解析関数（よって，正則関数）．こうして

$$g(z)=(z-\beta)^{\nu}f(z)\quad \text{特に,}\quad g(\beta)=c_{\nu}\neq 0$$

は正則関数である．即ち，$z=\beta$ で $\nu$ 位の極を持つ有理型関数は

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-\beta)^{\nu}}\quad \Big(\text{但し } g(z) \text{ は正則関数で } g(\beta)\neq 0\Big)$$

と表される．

## 26 偏角の原理と留数の原理

区分的に滑らかな単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域 $D=(C)$とする．$f(z)$ を $D$ で正則な関数とする．今，$f(\alpha)=0$ となる $\alpha\in D$ を $f(z)$ の**零点**という．このとき，$f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n$$

とテーラー展開（ベキ級数展開）できる．$f(\alpha)=0$ から

$$f(z)=(z-\alpha)^{\mu}\{c_{\mu}+c_{\mu+1}(z-\alpha)+\cdots+\}=(z-\alpha)^{\mu}g(z)$$

と表される．但し，$g(z)=c_{\mu}+c_{\mu+1}(z-\alpha)+\cdots+$ は $g(\alpha)=c_{\mu}\neq 0$ をみたす正則関数．この $\mu$ を $f(z)$ の点 $\alpha$ での**零点の位数**といい，$\mu=\mathrm{Ord}_0(f;\alpha)$ で表す．$f(z)$ の $D$ 内の零点の集合を

$$(f)_0:=\{z\in D\ :\ f(z)=0\}\subset D$$

とおく．ここで，次の補題 26.1 より，$D$ を少し広めに取っておけば，

$f(z)$ の零点は $D$ の境界 $C$ 上にはないとしてよい．

**補題 26.1.** 正則関数 $f(z)$ は恒等的に零でなければ，その零点集合は孤立点からなる．特に，$(f)_0$ は $D$ 内の有限個の点からなる集合である．

**証明.** 証明の詳細は省略するが，一致の定理およびコンパクト集合内の孤立集合は有限個の点からなることから従う． □

**定理 26.1.** $D \subset \mathbb{C}$ を区分的に滑らかな単純閉曲線で $C$ で囲まれた領域とし，関数 $f(z)$ は $D$ で正則とし，$f(z)$ の零点集合 $(f)_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ は $D$ の内部に含まれるとする．$\mathrm{Ord}_0(f;\alpha_j) = \mu_j \ (1 \leqq j \leqq p)$ とおく．そのとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=1}^{p}\mu_j = N = \sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f};\alpha_j\right)$$

但し，$N = \sum_{j=1}^{p}\mu_j$ は $D$ における $f(z)$ の重複も許した零点の個数.

**証明.** $\epsilon > 0$ を十分に小さく取れば，各点 $a_j \in (f)_0$ に対し，$\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ 上，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\alpha_j)^n = (z-\alpha_j)^{\mu_i} f_j(z), \quad \text{但し } \mu_j = \mathrm{Ord}_0(f;\alpha_j) \quad (1 \leqq j \leqq p)$$

と表される．但し，$f_j(z)$ は $\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ で正則で $f_j(\alpha_j) \neq 0$.

$$\therefore \quad f'(z) = \mu_i(z-\alpha_j)^{\mu_j - 1} f_j(z) + (z-\alpha_j)^{\mu_j} f_j'(z).$$

こうして，$\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ 上

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu_j}{z-\alpha_j} + \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} \quad \cdots \quad (26.1.0)$$

今，$f_j(\alpha_j) \neq 0$ ゆえ，予め $\epsilon > 0$ を十分小さく取っておけば，$\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ 上で $f_j(z) \neq 0$ とできる（正則関数の連続性から分かる）．このことから，$\dfrac{f_j'(z)}{f_j(z)}$ は $\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ で正則である．コーシーの積分定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\alpha_j)} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = 0 \quad \cdots \quad (26.1.1)$$

一方，$\varphi(z)$ は $D_\epsilon \setminus \bigcup_{j=1}^{p}\Delta_\epsilon(\alpha_j)$ で正則だから，コーシーの積分定理から，その境界

$$\partial D_\epsilon = C - \partial\Delta_1(\alpha_1) - \partial\Delta_2(\alpha_2) - \cdots - \partial\Delta_p(\alpha_p)$$
$$\partial\Delta_j(\alpha_j) : z(t) = \alpha_j + \epsilon e^{it} \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

に対し $\partial D_\epsilon$ 上の積分は以下の通り：

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon}\varphi(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz - \sum_{j=1}^{p}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_j(\alpha_j)}\varphi(z)dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{p}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_i(\alpha_j)}\Big(\frac{\mu_j}{z-\alpha_j}+\frac{f_j'(z)}{f_j(z)}\Big)dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{i=j}^{p}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_j(\alpha_j)}\frac{\mu_j}{z-\alpha_j}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_j(\alpha_j)}\frac{f_j'(z)}{f_j(z)}dz = 0\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{p}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_j(\alpha_j)}\frac{\mu_j}{z-\alpha_j}dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{p}\mu_j\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_j(\alpha_j)}\frac{1}{z-\alpha_j}dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{p}\mu_j\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\epsilon i e^{it}}{\epsilon e^{it}}dt\Big\} \quad \partial\Delta_j(\alpha_j) : z = \alpha_j + \epsilon e^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{p}\mu_j
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{p}\mu_j = N \quad \cdots \quad (26.1.2)
$$

一方，(26.1.0) において，$\dfrac{f_j'(z)}{f_j(z)}$ は $\Delta_\epsilon(\alpha_j) = \{|z-\alpha_j| < \epsilon\}$ で正則ゆえ，テーラー展開

$$
\frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)}(z-\alpha_j)^n
$$

をもつ．

$$
\therefore \quad \varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu_j}{z-\alpha_j} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)}(z-\alpha_j)^n
$$

は $\varphi(z)$ の $\{0 < |z-\alpha_j| < \epsilon\}$ でのローラン展開である（ローラン展開の一意性）．このことから

$$
\mathrm{Res}(\varphi;\alpha_j) = \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f};\alpha_j\right) = \mu_j \quad (1 \leqq j \leqq p)
$$

(26.1.2) に代入して結論を得る． $\square$

同様の方法で

**定理 26.2.** $f(z)$ を $D=(C)$ 上の有理型関数とする．さらに，$f(z)$ は $D$ 内に極のみを持つとする．$f(z)$ の $D$ 内での極全体の集合を

$$(f)_\infty=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q\}\subset D$$

とし，$\nu_j=\mathrm{Ord}_\infty(f;\beta_j)$ を $f(z)$ の $\beta_j$ での極の位数とする．そのとき，

$$\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-\sum_{j=1}^q\nu_j=-P=\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f};\beta_j\right)$$

但し，$P=\sum_{j=1}^q\nu_j$ は $f(z)$ の $D$ 内に於ける重複も許した極の数.

**証明.** 各極 $b_j$ 中心の十分小さな円板

$$\Delta_\epsilon(\beta_j)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-\beta_j|<\epsilon\}\subset D$$

において，

$$\psi(z)=\frac{h_j(z)}{(z-\beta_j)^{\nu_j}}=(z-\beta_j)^{-\nu_j}h_j(z)$$

と表せる．ここに，$\nu_j=\mathrm{Ord}_\infty(f;\beta_j)$ は有理型関数 $f(z)$ の $\beta_j$ での極の位数とし，$h_j(z)$ は $\Delta_\epsilon(\beta_j)$ に於いて正則関数でかつ $h_j(\beta_j)\neq 0$. そのとき，$\Delta_\epsilon(\beta_j)$ 上で，

$$\psi'(z)=-\nu_j(z-\beta_j)^{-\nu_j-1}h_j(z)+(z-\beta_j)^{-\nu_j}h_j'(z)$$

より，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-\nu_j(z-\beta_j)^{-\nu_j-1}}{(z-\beta_j)^{-\nu_j}}+\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}=\frac{-\nu_j}{z-\beta_j}+\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}$$

を得る.

今，$h_j(\beta_j)\neq 0$ より，$\Delta_\epsilon(\beta_j)$ で $h_j(z)\neq 0$ として良い．従って，$\dfrac{h_j(z)}{h_j(z)}$ は $\Delta_\epsilon(\beta_j)$ で正則関数である．こうして，コーシーの積分定理より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)}\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}dz=0\quad\cdots\quad(26.2.1)$$

有理型関数 $\psi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ は

$$D_\epsilon=D-\Delta_\epsilon(\beta_1)-\Delta_\epsilon(\beta_2)-\cdots-\Delta_\epsilon(\beta_q)$$

で正則で，その境界は

$$\partial D_\epsilon = C - \partial\Delta_\epsilon(\beta_1) - \partial\Delta_\epsilon(\beta_2) - \cdots - \partial\Delta_\epsilon(\beta_q)$$

コーシーの積分定理より，

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C-\partial\Delta_\epsilon(\beta_1)-\partial\Delta_\epsilon(\beta_2)-\cdots-\partial\Delta_\epsilon(\beta_q)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}d\zeta - \sum_{j=1}^{q}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{q}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)} \frac{-\nu_j}{z-\beta_j}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)} \frac{h_j'(z)}{h_j(z)}dz = 0\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{q}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)} \frac{-\nu_j}{z-\beta_j}dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{q}(-\nu_j)\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_j)} \frac{dz}{z-\beta_j}dz\Big\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{q}(-\nu_j) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{j=1}^{q}\nu_j
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\sum_{j=1}^{q}\nu_j = -P$$

定理 26.1 の証明の最後の部分の議論と同様の議論により

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f};\beta_j\right) = -\nu_j \quad (1 \leqq j \leqq q)$$

このことから結論を得る． □

定理 26.1 および定理 26.2 より，

**定理 26.3.** **（偏角の原理）** 区分的に滑らかな単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域 $D$ での有理型関数を $f(z)$ とする．その零点集合を

$$(f)_0 := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\} \subset D$$

極集合を

$$(f)_\infty = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q\} \subset D$$

但し，各零点 $\alpha_j$ および極 $\beta_k$ は境界 $C$ 上の点ではないとする．$z=\alpha_j$ での零点の位数を $\mu_j = \mathrm{Ord}_0(f;\alpha_j)$ $(1 \leqq j \leqq p)$，$z=\beta_k$ での極の位数を $\nu_k = \mathrm{Ord}_\infty(f;\beta_k)$ $(1 \leqq k \leqq q)$ とする．その時，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{p}\mu_j - \sum_{k=1}^{q}\nu_k = N - P$$

**系 26.1** (**一般化された偏角の原理**)**.** $g(z)$ を $D$ で正則とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{N} g(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{q} g(\beta_k).$$

**注意 26.1.** $\mu_j g(\alpha_j) = \overbrace{g(\alpha_j)+\cdots+g(a_j)}^{\mu_j}$，$\quad \nu_k g(\beta_k) = \overbrace{g(\beta_k)+\cdots+g(\beta_k)}^{\nu_k}$ と解釈すると

$$N = \sum_{j=1}^{p}\mu_1+\cdots+\mu_p, \quad P = \sum_{k=1}^{q}\nu_k = \nu_1+\cdots+\nu_q$$

なので，最終的には

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{N} g(\alpha_j) - \sum_{k=1}^{P} g(\beta_k).$$

を得る．ここで，$(f)_0 = \left\{\overbrace{\alpha_1,\ldots,\alpha_1}^{\mu_1},\ldots,\overbrace{\alpha_p,\ldots,\alpha_p}^{\mu_p}\right\}$ と解釈する．そこで，改めて，$(f)_0 = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$ を改めて $(f)_0 = \{a_1,\alpha_2,\ldots,a_N\}$ と番号を付け直し，重複も許した $N$ 個の零点集合と解釈する．$(f)_\infty$ についても同様に解釈する．

**証明.** (26.1.1)，(26.2.1) のマイナーチェンジ：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\alpha_j)} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}dz = 0 \implies \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\alpha_j)} g(z)\frac{f_j'(z)}{f_j(z)}dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\alpha_j)} \frac{1}{z-\alpha_j}dz = 1 \implies \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\alpha_j)} \frac{g(z)}{z-\alpha_j}dz = g(\alpha_j) \quad \text{（コーシーの積分公式）}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \frac{h_k'(z)}{h_k(z)}dz = 0 \implies \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} g(z)\frac{h_k'(z)}{h_k(z)}dz = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \frac{1}{z-\beta_k}dz = 1 \implies \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \frac{g(z)}{z-\beta_k}dz = g(\beta_k) \quad \text{（コーシーの積分公式）}$$

□

例題 **26.1.** $(f)_0=\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\},\quad (f)_\infty=\{\beta_1,\dots,\beta_P\}$（重複許す）ならば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{j=1}^N \alpha_j-\sum_{k=1}^P \beta_k\\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^2-\sum_{k=1}^P \beta_k^2\\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^3f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^3-\sum_{k=1}^P \beta_k^3\\ \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^zf'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{j=1}^N e^{\alpha_j}-\sum_{k=1}^P e^{\beta_k}\end{aligned}$$

例題 **26.2.** $f(z)=(z-\alpha)^3$ は $z=\alpha$ で *3* 位の零ゆえ，$(f)_0=\{\alpha,\alpha,\alpha\}$（重複も許して）とする．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{3(z-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{3}{z-a}\,dz=3\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz &= \alpha+\alpha+\alpha=3\alpha\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}\,dz &= \alpha^2+\alpha^2+\alpha^2=3\alpha^2\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=1}\frac{e^zf'(z)}{f(z)}\,dz &= e^\alpha+e^\alpha+e^\alpha=3e^\alpha\end{aligned}$$

例題 **26.3.** $f(z)=\dfrac{(z-\alpha)2}{(z-\beta)^3}\quad(\alpha\neq\beta)$ について $(f)_0=\{\alpha,\alpha\},\quad (f)_\infty=\{\beta,\beta,\beta\}\subset\{|z|<R\}$（$R>0$ は十分大）．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= N-P=2-3=-1\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz &= 2\alpha-3\beta\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}\,dz &= 2\alpha^2-3\beta^3\end{aligned}$$

例題 **26.4.** 3次関数 $f(z)=z^3+az^2+bz+c$ の零点集合 $(f)_0=\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\{|z|<R\}$ とする．解と係数の関係から $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\alpha\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b\\ \alpha\beta\gamma=-c\end{cases}$

今，$f'(z) = 3z^2 + 2az + b$ より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{3z^2+2az+b}{z^3+az^2+bz+c)}\,dz &= 3 \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z(3z^2+2az+b)}{z^3+az^2+bz+c)}\,dz &= \alpha+\beta+\gamma = -a \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z^2(3z^2+2az+b)}{z^3+az^2+bz+c)}\,dz &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) \\
&= a^2 - 2b \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z^3(3z^2+2az+b)}{z^3+az^2+bz+c)}\,dz &= \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + 3\alpha\beta\gamma \\
&= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\
&= -a(a^2-3b-b) - 3c = -a(a^2-4b) - 3c
\end{aligned}$$

定理 26.1,26.2 の証明と同様のアイデアで

**定理 26.4** (**留数定理**)**.** $\varphi(z)$ を単純閉曲線 $C$ で囲まれた領域を $D = (C)$ で有理型とし，$\varphi(z)$ の極集合

$$(\varphi)_\infty = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \subset D$$

とする．そのとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(\varphi;\beta_k)$$

**証明.** $\epsilon > 0$ を十分小さく選べば,

$$D_\epsilon = D - \Delta_\epsilon(\beta_1) - \Delta_\epsilon(\beta_2) - \cdots - \Delta_\epsilon(a_n) \subset D^*$$

とできる.

$$\partial D_\epsilon = C - \partial\Delta_\epsilon(\beta_1) - \cdots - \partial\Delta_\epsilon(\beta_n)$$

コーシーの積分定理により

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon} \varphi(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C-\partial\Delta_\epsilon(\beta_1)-\partial\Delta_\epsilon(\beta_2)-\cdots-\partial\Delta_\epsilon(\beta_n)} \varphi(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \varphi(z)dz\Big\} \\
\therefore\ \ & \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \varphi(z)dz\Big\} \quad \cdots \quad (26.4.1)
\end{aligned}$$

$\varphi(z)$ は $0 < |z-\beta_k| < \epsilon$ で正則関数．$z=\beta_k$ でのローラン展開を

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{(k)}(z-\beta_k)^n$$

とする．そのとき，

$$\mathrm{Res}(\varphi;\beta_k) = c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\epsilon(\beta_k)} \varphi(z)dz \ \ (1 \le k \le n).$$

(26.4.1) により，定理の結論を得る． □

最後に

**定理 26.5 (留数公式).** $f(z)$ を $z=\beta$ で $\nu > 0$ 位の極を持つ有理型関数 $f(z)$ とする．そのとき，

$$\mathrm{Res}(f;\beta) = \frac{1}{(\nu-1)!}\lim_{\substack{z\to\beta\\ z\neq\beta}} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\Big\{(z-\beta)^\nu f(z)\Big\}.$$

**証明.** $r>0$ を適切に選ぶことにより $f(z)$ は $\{0<|z-\beta|<r\}$ で正則としてよい．そのとき，$f(z)$ の $z=\beta$ でのローラン展開は

$$f(z) = \frac{c_{-\nu}}{(z-\beta)^\nu} + \frac{c_{-\nu+1}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\beta)^n\ , \quad 但し \quad c_{-\nu}\neq 0$$

$$\therefore \quad (z-\beta)^\nu f(z) = c_{-\nu} + c_{-\nu+1}(z-\beta) + \cdots + c_{-1}(z-\beta)^{\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\beta)^{n+\nu}.$$

今，$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\beta)^{n+\nu}$ とおく．そのとき，$g(z)$ は $\{|z-\beta|<r\}$ において正則でその $\nu-1$ 階導関数は

$$g^{(\nu-1)}(z) = \frac{d^{\nu-1}g(z)}{dz^{\nu-1}} = (\nu-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(n+2)(z-\beta)^{n+1}$$

$$\therefore \quad g^{(\nu-1)}(\beta) = 0$$

こうして，$(z-\beta)^\nu f(z)$ の $z=\beta$ での $\nu-1$ 階の微分係数は

$$\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\Big\{(z-\beta)^\nu f(z)\Big\}\Big|_{z=\beta} = (\nu-1)!c_{-1} + g^{(\nu-1)}(z)\Big|_{z=\beta} = (\nu-1)!c_{-1}$$

$$\frac{1}{(\nu-1)!}\lim_{\substack{z\to\beta\\ z\neq\beta}} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\Big\{(z-\beta)^\nu f(z)\Big\} = c_{-1} = \mathrm{Res}(f;\beta)$$

□

**注意 26.2.** 端的にいえば

$$\mathrm{Ord}_\infty(f;\beta)=\nu \Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\beta|=r} f(z)\,dz=\frac{1}{(\nu-1)!}\lim_{\substack{z\to\beta\\ z\neq\beta}}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\Big\{(z-\beta)^\nu f(z)\Big\}$$

ここで，左辺の積分の値は，右辺を微分することにより得られるということを主張している．実は，コーシーの積分公式も同じ範疇にある原理である．これが，複素変数の微積分学の真髄である．

**例題 26.5.** 次の留数を求めよ．

(1) $a>0$ とする．$f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}=\dfrac{1}{(z+ai)(z-ai)}$ は $z=\pm ai$ で一位の極．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+a^2};ai\right) &= \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{1}{(z+ai)(z-ai)}=\frac{1}{2ai}\\
\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+a^2};-ai\right) &= \lim_{z\to -ai}(z+ai)\frac{1}{(z+ai)(z-ai)}=-\frac{1}{2ai}
\end{aligned}$$

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}=\dfrac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$ は $z=\pm i$ でそれぞれ *2* 位の極をもつ．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2};i\right) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z+i)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\left\{\frac{2iz}{(z+i)^3}\right\}=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}\\
\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2};-i\right) &= \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{(z+i)^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right\}\\
\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z-i)^2}\right\} &= \lim_{z\to -i}\left\{\frac{-2iz}{(z-i)^3}\right\}=\frac{-2}{(-2i)^3}=\frac{i}{4}
\end{aligned}$$

**例題 26.6.** 次の有理型関数の線積分の値を留数定理および留数公式を用いて計算せよ．

(1) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ の極 $z=\pm i$ は $|z|<2$ にある．例題 26.5-(2) より，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz=\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2};i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2};-i\right)=-\frac{i}{4}+\frac{i}{4}=0$$

(2) $z^2+z+1=0$ の解は $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である．$|\alpha|=|\beta|=1$ より，$\alpha,\beta$ は $\{|z|<2\}$ 内にある．よって，正則関数 $f(z)=z^2+z+1$ は $|z|<2$ 内に $N=2$ 個の零点 $\alpha,\beta$ をもつ．よって，偏角の原理から，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz=N=2 \quad \cdots \quad (26.6.1)$$

また，$z^2+z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$ より，$z=\alpha,\beta$ はそれぞれ $\dfrac{1}{f(z)}$ の 1 位の極．留数定理から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2+z+1}\,dz &= \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1}:\alpha\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+z+1};\beta\right)\\
&= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}-\lim_{z\to\beta}(z-\beta)\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\\
&= \lim_{z\to\alpha}\frac{1}{z-\beta}+\lim_{z\to\beta}\frac{1}{z-\alpha}\\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}=0 \quad \cdots \quad (26.6.2)
\end{aligned}$$

(26.6.1),(26.6.2) から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z}{z^2+z+1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{1}{2}\left(\frac{2z+1}{z^2+z+1}-\frac{1}{z^2+z+1}\right)dz\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z^2+z+1}\,dz\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2=1
\end{aligned}$$

このように偏角の原理と留数定理・公式の組み合わせで直接的に線積分を避けることができる（計算が楽になる）． □

# 27 留数の定理の実定積分への応用例

いつかの実定積分の値は留数定理（公式）により比較的容易に求まる場合がある（万能ではない！）この際，重要なのは積分路（単純閉曲線）をどう選ぶか工夫が必要であるが，基本的には，零点や極をすっぽり囲むような区分的に滑らかな単純閉曲線を選ぶ．

**例題 27.1.** $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$

$$I(R)=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}$$

とおく．

**解．** $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ の極は $z=\pm i$ である．

> ポイント
>
> $I(R)$ は実軸上の区間 $[-R,R]=\{-R\leqq x\leqq R\}$ 上の定積分なので，積分路の中に $[-R,R]$ が含まれるような区分的に滑らかな閉曲線 $C$ でその極が $C$ の内部 $(C)$ に含まれるようにとる．

$R>1$ を満たす任意の $R>0$ をとる．

$\begin{cases}\ell : z=x\ (-R\leqq x\leqq R)\\ \gamma : z=Re^{it}\ (0\leqq t\leqq\pi)\end{cases}$ ，$C:=\ell+\gamma$ とおく．

$C$ は原点中心半径 $R$ の上半円である．

$$\int_C\frac{1}{z^2+1}\,dz=\int_\ell\frac{1}{z^2+1}\,dz+\int_\gamma\frac{1}{z^2+1}\,dz$$

いま，極の一つ $z=i$ は $(C)$ に含まれる（$z=-i$ は $C$ の内部 $(C)$ に含まれない）

$$\begin{aligned}\int_C\frac{1}{z^2+1}\,dz &= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1},i\right)\\ &= 2\pi i\lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{1}{(z+i)(z-i)},i\right)\\ &= 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=(2\pi i)\,\frac{1}{2i}\\ &= \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma\frac{1}{z^2+1}\,dz\right| &\leqq \int_\gamma\left|\frac{1}{z^2+1}\,dz\right|=\int_\gamma\frac{1}{|z^2+1|}\,|dz|\leqq\int_\gamma\frac{1}{|z|^2-1}|dz|\\ &= \int_\gamma\frac{1}{|R|^2-1}|dz|=\frac{1}{R^2-1}\int_\gamma|dz|\\ &= \frac{\pi R}{R^2-1}\to 0\ (R\to\infty)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{R\to\infty}\int_\gamma\frac{1}{z^2+1}\,dz=0$$

一方,

$$\lim_{R\to\infty}\int_\ell \frac{1}{z^2+1}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\,dx$$

$$\therefore\quad \pi = \int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

左辺は $R$ に無関係であるので,両辺 $R\to\infty$ とすれば

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx\end{aligned}$$

を得る.$\therefore\quad I=\pi.$ □

**例題 27.2.** $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

**解.** 積分路は例題 27.1 と同じ $C=\ell+\gamma$ とする.以下,例題 26.5,26.6 を参考にせよ.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

は領域 $(C)$ 内に 2 位の極 $z=i$ を 1 個もつ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = \mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2};i\right) = -\frac{i}{4}\quad\therefore\quad \int_C\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz\\ &= \int_\ell \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz\end{aligned}$$

$$\left|\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leqq \int_\gamma \left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right| |dz| = \lim_{R\to\infty}\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$$

こうして

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to\infty}\int_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\therefore\quad I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$ □

**問題 27.1.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$ であることを調べよ（多くの関数論のテキストに例題として解答も示されている．ここでは，途中計算の省略を極力少なくして詳しく解説しよう．

**解説.**

(1) $\dfrac{\sin x}{x}$ を複素変数 $z$ で置き換えれば $\dfrac{\sin z}{z}$ であるが，そうすれば $\sin z$ について考察する必要があるので面倒である．そこで，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ に着目して

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \therefore \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} = \frac{e^{ix}}{2ix} + \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}$$

の複素変数化．$f(z) = \dfrac{e^{i}z}{2iz}$ を考える．そのとき，$f(z)$ は $z = 0$ を 1 位の極にもつ．ここで，$f(z)$ は実軸（$z = x + 0i = x$）上，$f(x) = \dfrac{e^{ix}}{2\pi x}$ であることに注意する．

(3) $0 < r < R$ に対し，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\,dx + \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \left(\frac{e^{ix}}{2ix} + \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}\right) dx + \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \left(\frac{e^{ix}}{2ix} + \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}\right) dx \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{2ix}dx + \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}dx \\
&+ \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{2ix}dx + \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}dx
\end{aligned}$$

さらに，次の事実より

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{2ix}dx &\overset{t=-x}{=} \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{R}^{r} \frac{e^{-ti}}{2i(-t)}(-dt) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{-ti}}{2i(-t)}dt \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{-xi}}{2i(-x)}dx
\end{aligned}$$

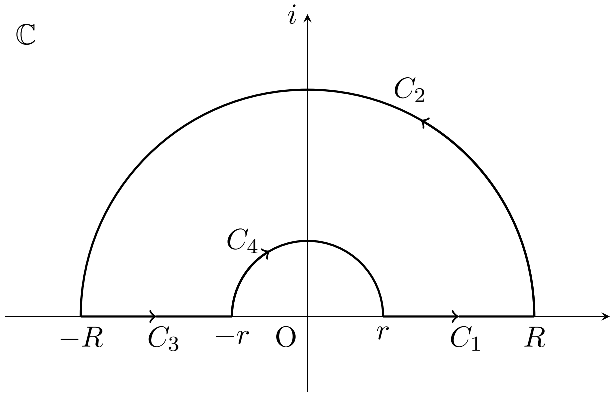
$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{-ix}}{2i(-x)}dx \overset{t=-x}{=} \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{R}^{r} \frac{e^{it}}{2it}(-dt) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{it}}{2it}dt = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{2ix}dx$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} 2\left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx + 2\int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{2ix}\,dx\right) \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{ix}\,dx + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{ix}dx\right) \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{ix}\,dx + \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{ix}dx \quad \cdots \quad (27.1.1)
\end{aligned}
$$

(4) さて，問題 13.1 での単純閉曲線

$$
C = \begin{cases} C_1: \ z(t) = t \ (r \leqq t \leqq R) \\ C_2: \ z(t) = Re^{it} \ (0 \leqq t \leqq \pi) \\ C_3: \ z(t) = t \ (-R \leqq t \leqq -r) \\ -C_4: \ z(t) = re^{i(\pi - t)} = re^{-it} \ (0 \leqq t \leqq \pi) \ \text{（負の向き！）} \end{cases}
$$

および $C$ で囲まれる領域を $D = (C)$ で表す．このとき，$f(z) = \dfrac{e^{iz}}{iz}$ は $D$ で正則である．そのとき，$\partial D = C_1 + C_2 + C_3 - C_4$（領域 $D$ を左に見る向き：反時計回り）




したがってコーシーの積分定理から

$$
0 = \int_{\partial D} \frac{e^{iz}}{iz}\,dz = \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{iz}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{iz}\,dz + \int_{C_3} \frac{e^{iz}}{iz}\,dz - \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{iz}\,dz
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left(\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz-\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz\right) &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left(\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz+\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz\right)\\
\therefore\quad \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz-\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_1}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz+\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_3}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz\\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_r^R\frac{e^{ix}}{ix}\,dx+\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{ix}\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{by}\quad (27.1.1)
\end{aligned}
$$

(5) 一方,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz\right| &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left|\int_0^\pi\frac{e^{ire^{it}}}{ire^{it}}(rie^{it})\,dt\right| = \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left|\int_0^\pi e^{ire^{it}}\,dt\right|\\
&= \lim_{r\to 0}\left|\int_0^\pi e^{ir(\cos t+i\sin t)}\,dt\right| = \lim_{r\to 0}\left|\int_0^\pi e^{-r\sin t}e^{ir\cos t}dt\right|\\
&\leqq \lim_{r\to 0}\int_0^\pi\left|e^{-r\sin t}e^{ir\cos t}\right|\,dt = \lim_{r\to 0}\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt\\
&= \int_0^\pi\lim_{r\to 0}e^{-r\sin t}\,dt = \int_0^\pi dt = \pi
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\left|\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz\right| &\leqq \lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-R\sin t}dt = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-R\sin t}\,dt\right)\\
&= 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin t}\,dt \quad (\text{set } t\to\pi-t)\\
&\leqq 2\lim_{R\to\infty}e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt = -\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{2R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \left(\sin t\geqq\frac{2}{\pi}t \quad \text{if}\quad 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) < \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{R} = 0
\end{aligned}
$$

よって, (27.1.1) により

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_4}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz-\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_2}\frac{e^{iz}}{iz}\,dz = \pi-0=\pi
$$