

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.0
はじめに			11 積分の計算テクニック 22		
この講義資料は熊本大学の理工医薬系（理学部数学科は除く）用に作成された「微積分学総括入門書」である。講義の事前事後学習に役立ててほしい。ミスに気づいた時は授業担当の先生か数理科学センターの先生に質問なり報告して下さい。多くの問題や例題を解答つきで掲載したので皆さんは自分で手を動かして解いてほしい。			11.1 分数関数の積分法（部分分数分解） 22		
			11.1.1 分数関数の積分への帰着 22		
			11.2 無理関数の積分法 22		
目 次			12 広義積分 23		
1 記号および準備 2			13 曲線の長さ 23		
1.1 自然数、整数、有理数について 2			14 曲線で囲まれる部分の面積 24		
1.2 有理数および無理数 2			14.1 極方程式で表される図形の面積 24		
1.3 数列 2			15 微分方程式 25		
1.4 実数列の極限值 3			15.1 1 階微分方程式 25		
1.5 無限数列の和 4			15.2 1 階線形微分方程式 25		
1.6 変数と関数 4			15.3 定係数 2 階線形微分方程式 27		
1.7 関数の極限值 4			15.3.1 (♠) の解法 27		
1.8 連続関数 5			15.3.2 $f(x) = 0$ の場合 27		
2 微分可能な関数 5			15.3.3 固有方程式が虚数解を持つときの取り扱い 27		
2.1 微分可能性 5			16 練習問題（積分） 29		
2.2 導関数 6			16.1 基本問題 30		
3 初等関数の導関数 6			17 2 変数の関数の微分学 32		
3.1 高階導関数 6			17.1 定義域と値域 32		
4 微分学の基本定理 6			17.2 極限值と連続性 32		
5 テーラーの定理（テーラー展開） 7			17.3 偏微分可能性と偏微分係数 33		
6 微分の応用 8			17.4 偏導関数 33		
6.1 ランダウ記号（マクローリン展開の応用） 8			17.5 全微分可能性 34		
6.2 極値問題 8			17.6 2 変数合成関数の偏微分 35		
6.3 ロピタルの定理 9			17.7 高階偏導関数 35		
6.4 一次近似 10			17.8 極値問題 38		
6.5 逆関数 10			17.9 極値条件 38		
6.6 曲線と接線 12			18 陰関数定理 40		
7 練習問題 12			18.1 陰関数定理の応用 40		
7.1 練習問題の解答例 14			18.2 極大点・極小点（陰関数の極値） 41		
8 1 変数の積分 18			18.3 ラグランジュの未定乗数法 41		
8.1 定積分 18			19 2 変数微分演習問題 43		
8.2 定積分の第 1 基本定理 18			19.1 関数の極限・連続性 43		
9 定積分の計算 19			19.2 偏微分・極値問題 43		
9.1 積分の第 2 基本定理 19			20 2 変数の積分学（重積分の計算法） 48		
9.2 練習問題 A 20			20.1 2 重積分の大雑把な定義 48		
9.3 練習問題 B 21			20.2 区間上の定積分を 2 回繰り返した 2 重積分 48		
10 不定積分（原始関数） 22			20.3 縦線領域および横線領域と 2 重積分の計算例 48		
10.1 原始関数の例 22			20.4 変数変換とヤコビアン（ヤコビ行列式） 49		
			21 線積分の話 51		
			21.1 線積分と置換積分 51		
			21.2 線積分と面積分の関係 51		
			22 2 変数関数の広義積分（概説） 53		
			23 2 変数微分補足問題 56		
			24 重積分補足問題 59		

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある <u>注意書き</u> の欄も見たい)						
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.1			
1 記号および準備 1.1 自然数、整数、有理数について A, B を集合とする. ▶ $a \in A \overset{\text{意味}}{\iff} a$ は集合 A の元 (または要素) である. ▶ $A \subset B$ は B に含まれる (または B は A を含む). 即ち, <u>任意の元 $a \in A$ に対し $a \in B$</u> ということである. ▶ $\forall a \in A$: 「集合 A の任意の元 a に対して」と読む. ▶ $\exists x \in A$: 「集合 A の中に元 x が存在する」と読む. • $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合 : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n + 1, \cdots\}$ • $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合 : $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$ • $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合 $\left\{\frac{n}{m} : m, n \text{ は整数で } m \neq 0\right\}$ • $\mathbb{R}$: 実数全体の集合 (数直線上の点と 1 対 1 に対応させる) 1.2 有理数および無理数 • 小数: 0 と 1 の間にある数で $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ と表記する. 但し, 各 a_n は $0 \leq a_n \leq 9$ を満たす整数 • $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ の $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ を小数部分という. また a_n を小数第 n 位の数という. 例 (小数の型). (1) $0.141421356, 0.23620679, 0.33$ (有限小数: 小数点以下の数が有限個) (2) $0.333333\cdots, 0.12121212\cdots$ (循環小数: 小数点以下一定の長さの数が循環して現れる) (3) $0.14159765\cdots, 0.123254809\cdots$ (非循環小数) 注意 1. (1) 有限小数は有理数である. また, 循環小数も有理数である. 証明. 有限小数は $0.a_1a_2\cdots a_n$ ($a_n \neq 0$)(小数 n 位) と表わされるので, $\begin{aligned} 0.a_1a_2\cdots a_n &= 0.a_1 + 0.0a_2 + 0.00a_3 + \cdots + 0.\overbrace{000\cdots 0}^{n-1}a_n \\ &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\ &= \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^{n-1}} \end{aligned}$ は有理数である (分母は整数であり分子も整数の和として整数である). 次に, 循環小数が有理数であることを示そう. 循環小数を $0.a_1a_2\cdots \dot{a}_n = 0.\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}^{n-1}\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}^{n-1}\cdots$ とかく. 但し, 最後の $a_n \neq 0$ とする. $\begin{aligned} 0.a_1a_2\cdots \dot{a}_n &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}} + \cdots \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} \left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + \cdots\right) \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n - 1} \cdots (*) \end{aligned}$			となり, 有理数であることが分かる. 但し, 最後の式において, 無限等比級数の和に関する次の事実を用いた. 公式 1 (後述). $r < 1$ ならば $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1 - r}$. 実際, $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$ ($\because \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$) 特に, $r = \frac{1}{10^n}$ と置けば最後の式 (*) が得られる. (2) 有理数 q は整数部分と小数部分に分けたとき, その小数部分は循環小数として表されるもの, 即ち, $q = N + (\text{循環小数})$, 但し, $N \neq 0$ は整数. (3) 無理数 r は整数部分と小数部分に分けたとき, 小数部分が循環しない小数として表されるもの, 即ち, $r = N + \text{循環しない小数}$. (4) 実数は有理数と無理数からなり, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は数直線上の点と 1 対 1 に対応する. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す 以上, 4 つの数の集合には次の包含関係がある. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 1.3 数列 実数からなる数列 (実数列) $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. ▶ $\{x_n\}$ が有界とは, 全ての番号 n に対し, $x_n \leq M$ となる実数 M が存在するときをいう. 例題 1. • 実数列 $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である. 実際, $\frac{n}{3^n} < 1$. 証明. 不等式 $n < 3^n$ を, 数学的帰納法で示す. まず, (I) $n = 1$ のとき, 左辺 $= 1$, 右辺 $= 3$ で不等式は成立. (II) $n = k > 1$ のとき不等式が成立していると<u>仮定する</u>, 即ち, $k < 3^k$ と仮定する. $n = k + 1$ のとき, 帰納法の仮定から $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k > k + 1$. このことは, 不等式が $n = k + 1$ のとき成立している事を示している. 故に, 全ての自然数 n に対して, $n < 3^n$, 即ち, $\frac{n}{3^n} < 1$ が成立する. $\square$ 定義 1. 実数列 $\{x_n\}$ が単調増加であるとは, $x_n \leq x_{n+1}$ がすべての自然数 n に対して成立するときをいう. 逆に, $x_n \geq x_{n+1}$ が全ての n に対して成立するとき, 数列 $\{x_n\}$ は単調減少であるという. 課題. 次の問いに答えよ. (1) $\frac{2}{7}$ を循環小数で表せ. (2) 循環小数 $0.17\dot{4} = 0.174174174\cdots$ を有理数で表せ. (3) 数列 $\left\{\frac{n^2}{3^n}\right\}$ は有界である. (4) 数列 $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$ は単調減少である. 実数の連続性公理 (認める) ▶ 有界な単調増加実数列 $\{a_n\}$ は収束する. ▶ 有界な単調減少実数列 $\{a_n\}$ は収束する.					
					学籍 番号	No.	氏 名	評 点

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.2
-----	------------	---------	-------	-------	---------------

1.4 実数列の極限值

実数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ が収束するとは、ある有限確定値 $a \in \mathbb{R}$ が存在して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$ を満たすとき、即ち、 n を限りなく大きくしたとき、数列 $\{|a_n - a|\}$ が限りなく 0 に近くときをいう。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ とかき、 a を数列 $\{a_n\}$ の極限值という。

- $\{a_n\}$ が収束するとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ とかく。
- n が限りなく大きくなるとき、 a_n もまた限りなく大きくなるなら、 $\{a_n\}$ は発散するという。この時、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ とかく
- $\{a_n\}$ の極限值が有限であるが不確定である時は収束しないということにする（発散も収束しないにあるが）。

基本事項（各自押さえておこう）

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ (\forall k \in \mathbb{N})$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ if $|r| < 1$

(3) $\begin{cases} b_n \leq a_n \leq c_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \infty$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n \pm qb_n) = p \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm q \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) < \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) < \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) = \frac{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)} < \infty \text{ if } a_n \neq 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c_n} \right) = 0$$

例題 2.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 1$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

($\because$) 二項定理より、 $n > 3$ ならば、 $2^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > {}_nC_3$.

$$\therefore 0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{{}_nC_3} = \frac{6n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{6}{(n-1)(n-2)}$$
$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{(n-1)(n-2)} = 0$$
$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \because \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} > 1 + 2n\sqrt{n} > n \text{ (二項定理)}.$$
$$\therefore 1 \leq n < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \quad \therefore 1 \leq \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

例題 3. 数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は収束し、極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e = 2.718281828459045235360287471352 \dots$$

解説. まず、数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを以下の (i),(ii),(iii) で示す。

- (i) $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k > 1 - \frac{k}{n+1} \ (k \geq 2)$ を k に関する数学的帰納法で示そう。

(I) : $k = 2$ のときは以下により成り立つ。

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{2}{n+1}$$

(II) : k のとき正しいと仮定して、 $k + 1$ のときも成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \\ &> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \text{ (帰納法の仮定)} \\ &= 1 - \frac{k+1}{n+1} + \frac{k}{(n+1)^2} \\ &> 1 - \frac{k+1}{n+1} \end{aligned}$$

これは $k + 1$ のときも成立していることを示す。よって、全ての $2 \leq k \leq n$ に対して成立する。

- (ii) (i) より $2 \leq k \leq n$ に対し、

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k > 1 - \frac{k}{n+1} \xLeftrightarrow{\text{同値}} \frac{n+1}{n+1-k} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k > \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

下線の両辺に $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ を乗じると

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)n!}{(n+1-k)(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k &> \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ \therefore \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k &> \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \end{aligned}$$

このことから、

$$\therefore {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k > {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad (2 \leq k \leq n)$$

を得る。

- (iii)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &> 1 + 1 + \sum_{k=2}^n {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\ &> 1 + 1 + \sum_{k=2}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= a_n \end{aligned}$$

よって、 $a_n < a_{n+1}$ となり、数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列である。

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見て欲しい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.3
次に以下の (v) で数列 $\{a_n\}$ が有界であること, 実は $a_n < 3$ ($n \geq 1$) であることを示そう. その前に, 次の (iv) を示す: (iv) $k \geq 2$ のとき, $k! \geq 2^{k-1}$ が成立する. (数学的帰納法で示すことができる.) (I) $k = 2$ のとき, $2! = 2 = 2^{2-1}$ より成立している. (II) $k > 2$ のとき成立していると仮定し, $k + 1$ の時も成立していることを示す. 実際, $(k + 1)! = (k + 1) k! > (k + 1) \cdot 2^{k-1} > 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ こうして, 全ての $k \geq 2$ に対して成立している. (v) 最後に, $n \geq 1$ に対して $2 < a_n < 3$ であることを示す. <u>証明.</u> 二項定理より $\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^n \overbrace{1 \cdots \cdots 1}^{n-k+1} \frac{1}{k!} \quad \text{by (iv)} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n 2^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$ 一方, $2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 3$ ゆえ $2 < a_n < 3$ ($n \geq 2$) が示された. 故に, $\{a_n\}$ は有界な単調増加実数列であり, 実数の連続性公理から $\{a_n\}$ は収束する. その極限値を e とおく. 即ち, $2 < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e < 3$			(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \frac{1}{2}$ を示せ. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$		
1.5 無限数列の和 $\{a_n\}$ を数列とし, 無限和 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ を考える. この n 項までの和 (n 部分和ともいう) を $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく. そのとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が収束するとき, 無限和 S は収束するという. $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ とかく. 例題 4. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2$ を示せ. 実際, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ (帰納法) . $\therefore S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) = 2$ 一方, $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ if $n \geq 2$ より, $\frac{n+2}{2^n} = \frac{n}{2^n} + \frac{2}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} + \frac{2}{2^n}$ $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^n} = 0 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) = 2. \quad \square$			1.6 変数と関数 - 変数とはある範囲内にある任意の数を記号で表したもので, 文字 x で表す. - 関数とは, 変数 x に対して唯一つの値 y を対応させる規則のことをいう. この対応の規則を x の関数といい $y = f(x)$ とかく. この y を従属変数と呼ぶこともある. - 関数 $y = f(x)$ が定義できる (有限確定する) ときの, x のとり得る範囲 $D(f)$ を定義域という. このとき, 値 $y = f(x)$ が取り得る範囲 $R(f)$ を値域という. 注意 2. (1) 変数 x が $0 \leq x \leq 1$ を満たす, または, $0 \leq x \leq 1$ を満たす変数 x とは 0 以上 1 以下の全ての値をとり得る数を意味する. x は特定された値でなく, 区間内を変化して動く. (2) 変数 x に対して x^2 を対応させる規則を $f(x) = x^2$ とかく. (3) 関数 $f(x) = x^2$ の定義域は $D(f) = \{-\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty)$ である. その時 $y = f(x) = x^2 \geq 0$ より, 値域は $R(f) = \{y \geq 0\}$. (4) $y = f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $D(f) = \{x : x \geq 0\}$ である. そのとき, $\sqrt{x} \geq 0$ より値域は $R(f) = \{y : y \geq 0\}$. 例. (1) $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ (n 次関数) (2) $f(x) = \sin x, \cos x, \tan x$ (三角関数) (3) $f(x) = a^x$ ($a > 0$) (指数関数) (4) $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, x > 0$) (対数関数) (5) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$		
1.7 関数の極限值 関数 $f(x)$ において x が限りなく c に近くときの $f(x)$ が限りなく近く値 (無限大もあり得る) を $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x)$ で表し, 関数 $f(x)$ の $x \rightarrow c$ のときの極限值 (無限大にもなり得る) という. 注意 3. 関数 $f(x)$ は必ずしも $x = c$ で定義されているとは限らない. 例えば, 関数 $f(x) = \frac{x^2 - c^2}{x - c}$ は $x = c$ では定義されない. しかし, $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} (x + c) = 2c$ 関数の極限值については以下の 3 つの場合が考えられる. $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x) = A < \infty$ (有限確定値) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x)$ (有限ではあるが値が唯一つでない) $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x) = \infty$ (値が無限大)					
学籍 番号		No.	氏 名	評 点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.4
例題 5. (1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{\log x}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\log x}{x} = \infty$ (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} (x^2 + x + 1) = 3$ (3) $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ (後述) (4) 一般には $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) \neq \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$ である (反例) $1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) \neq \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0 \times \infty$ 1.8 連続関数 定義 2. $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとは, $a \leq \forall c \leq b$ に対し, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x) = f(c)$ が成立するとき. 即ち, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f(x) - f(c) = 0$ のとき. ここに, 関数 $f(x)$ は $x = c$ で定義されていることが必要. 例題 6. $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ は开区間 $(0, 1)$ で連続である. しかし. $x = 0, 1$ では連続でない. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ 実は $f(x)$ は $x = 0, 1$ では定義されないので連続であり得ない. 大学初年次で扱う関数の多くは連続関数である. 例題 7. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ A & \text{if } x = 0 \end{cases}$ が $x = 0$ で連続になるように A の値を求めよ. 定義から $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = A$ となるように A の値を求める. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (後で解説する)}$ 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で連続であるためには $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = A$ より $A = 1$ を得る. □ 例題 8. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 1 \\ x + A & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$ が $x = 1$ で連続となるように A の値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x + A) = 1 + A$ $f(1) = 1 = 1 + A$ ゆえに, $A = 0$ を得る. □ 命題 1. $f(x), g(x)$ は閉区間 $\mathbf{I} = [a, b]$ で連続とする. そのとき, (1) $f(x) \pm g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続. (2) $f(x) \cdot g(x)$ は $[a, b]$ で連続. $\therefore \begin{cases} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) \end{cases}$			定理 1 (最大値・最小値定理). 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数は区間内の点で最大値および最小値をとる. 即ち, 最大値および最小値を与える点 $c_0 \in [a, b]$ および $c_1 \in [a, b]$ が存在して閉区間 $[a, b]$ 内の任意の点 x に対し $f(c_0) \leq f(x), \quad f(c_1) \geq f(x)$ が成立する. 注意 4. ▶ $f(x)$ の最大値や最小値を与える点が区間 $[a, b]$ の内部に存在することが重要である. 実際, $f(x) = x^2$ の区間 $[-1, 2]$ での最大値は $f(2) = 4$, 最小値は $f(0) = 0$. ▶ 开区間 (a, b) で連続な関数 $f(x)$ は最大値または最小値を区間内の点で取るとは限らない. 実際, $f(x) = x^2$ は开区間 $(0, 1)$ で最大値も最小値も取らない. ♠ 連続関数は閉区間に制限して取り扱えば上記の最大値・最小値の定理が適用できる. 注意 5. $F(x), f(x)$ を連続関数とし, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p < \infty$ (収束する) と仮定する. $y = f(x)$ とおくと, $x \rightarrow a$ なら $y \rightarrow p$ であり, $\lim_{y \rightarrow p} F(y) = F(p)$. $\therefore \lim_{x \rightarrow a} F(f(x)) = F(p)$, i.e. $\lim_{x \rightarrow a} F(f(x)) = F\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ 2 微分可能な関数 2.1 微分可能性 定義 3. 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続とする. $a < \forall c < b$ に対し, 次の極限值 $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$ が有限確定値として存在するとき, $f(x)$ は $x = c$ で微分可能という. この確定した値を $f(x)$ に因んで $f'(c)$ で表し, $f(x)$ の $x = c$ での微分係数という. 関数 $f(x)$ が开区間 (a, b) の各点で微分可能であるとき, $f(x)$ は开区間 (a, b) で微分可能という. 注意 6. ▶ $c \in (a, b)$ なる任意の c に対し, $h > 0$ を十分小さくすると $c \pm h \in (a, b)$ とできる. したがって, 関数値 $f(c \pm h)$ は定義される. こうして, 上記の定義 2 の右辺は意味がある. $c \pm h$ が (a, b) の中に含まれなければ, $f(c \pm h)$ は定義できない. ▶ $f(x)$ が $x = c$ で微分可能とは $x = c$ を含む小さい区間 $(c - h, c + h) \subset (a, b)$ の各点で微分可能のときをいう. ▶ 微分可能性は开区間で意味をなす (閉区間の場合, 区間の両端での微分係数は定義されない). しかし, 連続関数であるので閉区間で定義されているとした方が都合が良い. こうして, <u>$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で开区間 (a, b) で微分可能と仮定する</u> 定理 2. $f(x)$ が $x = c$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = c$ で連続である. 証明. $\lim_{x \rightarrow a} (x - c) = 0, \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$ より, $\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0 \end{aligned}$ よって, $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = 0 \therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. 故に, $f(x)$ は $x = c$ で連続. □		

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島	No.5
-----	------------	---------	-------	-------	----------	------

例題 9. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ($0 < x < 1$) について,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty\end{aligned}$$

なので, $x = 0$ で微分可能でない.

2.2 導関数

定義 4. 関数 $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続かつ开区間 (a, b) で微分可能とする. そのとき,

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

なる関数 $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の導関数という. $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ と記すこともある.

注意 7. 導関数 $f'(x)$ の $x = c$ での値 $f'(c)$ が $f(x)$ の $x = c$ での微分係数である.

次の公式はよく知られている.

公式 2. (1) $(af(x) \pm bg(x))' = af'(x) \pm bg'(x)$ (微分操作の線形性) .

(2) $\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法) .

(3) $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (分数関数の微分法) .

(4) $\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (合成関数の微分法) .

(5) $\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (対数微分法) .

3 初等関数の導関数

公式 3. (1) $f(x) = x^k, \quad f'(x) = kx^{k-1}$. 更に,

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^n (a_k x^k)' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}.$$

(2) $(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 但し, $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.

(3) $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin x$

(4) $(\tan x)' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

(5) $(e^x)' = e^x, \quad (\log |x|)' = \frac{1}{x}$.

(6) $\left(\log(x + \sqrt{x^2 + 1})\right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3.1 高階導関数

関数 $f(x)$ が n -回微分して得られる関数を n -階導関数といい,

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = f^{(n)}(x)$$

とかく. 特に, $f(x) = f^{(0)}(x)$. 帰納的に

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right)$$

と定義される.

例題 10.

$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$$\rightarrow f''(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \cdots$$
$$\rightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$$\rightarrow f''(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \cdots$$
$$\rightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$
$$\rightarrow f''(x) = 2(\tan x + \tan^3 x)$$
$$\rightarrow f^{(3)}(x) = 2(1 + 4 \tan^2 x + 3 \tan^4 x)$$

公式 4 (ライプニッツの公式). :

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

例題 11. 次が成り立つ :

$$f(x) = x^m e^x \implies f^{(n)}(x) = e^x \cdot \sum_{k=0}^n {}_n C_k k! {}_m C_k x^{m-k}$$

$$f(x) = e^x \sin x \implies f^{(n)}(x) = e^x \cdot \sum_{k=0}^n \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

練習問題 1. $f(x) = \sin x \cos x$ の n -階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

4 微分学の基本定理

定理 3. (1) $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続かつ开区間 (a, b) で微分可能な関数とする. そのとき, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ となる $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する (平均値の定理) .

(2) $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続かつ开区間 (a, b) で微分可能とする. そのとき, $f(a) = f(b)$ ならば, $f'(c) = 0$ をみたす $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する (ロールの定理)

証明. (2) $\rightarrow$ (1) : $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$ とおけば,

$$g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

ロールの定理 (2) より, $g'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ が少なくとも一つ存在する. $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ より,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.6
(証明の続き) ロールの定理 (2) は最大値・最小値定理から従う. 実際, $g(x)$ は閉区間で連続なので, $f(x)$ は最大値 $M = g(x_1)$, 最小値 $m = g(x_0)$ ($a \leq x_0, x_1 \leq b$) をとる. ▶ $x_0 = x_1$ ならば, $m \leq g(x) \leq M \quad \therefore \quad g(x) = M = m$. こうして, $g(x)$ は定数関数であり, この場合は除く. こうして, $x_0 \neq x_1$ としてよい. ▶ $x_0 = a$ (端点) ならば $x_1 \neq x_0$ より $a = x_0 < x_1 < b$. $g(x_1)$ が最小値なので, 任意の $a < x < b$) に対して, $g(x) \geq g(x_1) = m$. よって, 十分小さな $h > 0$ に対し, $g(x_1 \pm h) \geq g(x_1)$. $\begin{aligned} 0 &\geq \frac{g(x_1 + h) - g(x_1)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_1) \\ 0 &\leq \frac{g(x_1 - h) - g(x_1)}{-h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_1) \end{aligned}$ よって, $0 \leq g'(x_1) \leq g'(x_1) \leq 0 \quad \therefore \quad g'(x_1) = 0.$ 特に, $c = x_1$ と置けばよい. ▶ $x_1 = a$ (端点) ならば $x_0 \neq x_1$ より $a < x_0 < b$. $\begin{aligned} 0 &\geq \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_0) \\ 0 &\leq \frac{g(x_0 - h) - g(x_0)}{-h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x_0) \end{aligned}$ よって, $0 \leq g'(x_0) \leq g'(x_0) \leq 0 \quad \therefore \quad g'(x_0) = 0.$ 特に, $c = x_0$ と置けばよい. ▶ $x_0 = b$ および $x_1 = b$ の場合も同様. ▶ $a < x_0, x_1 < b$ の場合について, 上の議論によって, $x_0 = c$ となるか又は $x_1 = c$ となる. 注意 8. 最大値・最小値の定理は実数の連続性公理から従う (証明は省略). 例題 12. $f(x) = x^3$ について $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ となる c を求めよ. 但し, $0 < a < b$ とする. 実際, $f'(c) = 3c^2 = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = b^2 + ab + a^2 \implies c = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$ 特に, $a < c < b$ は明らか. $f(x) = x^3 - 3x \quad (1 \leq x \leq 2) \text{ について } f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 4 \text{ となる } c \quad (1 < c < 2) \text{ が存在する. 実際, } f'(c) = 3c^2 - 3 = 4 \text{ より, } c = \sqrt{\frac{7}{3}}.$ 定理 4 (コーシーの平均値定理). $f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続で開区間 (a, b) で微分可能とする. (1) $g(b) \neq g(a)$ (2) : $f(x), g(x)$ は $a < x < b$ で同時に 0 にはならない. そのとき, $a < c < b$ なる点 c が少なくとも 1 つ存在して, $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす.			証明. $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$ とおくと $F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ を得る. ロルの定理より, $F'(c) = 0$ なる c ($a < c < b$) が少なくとも一つ存在する. こうして $0 = F'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c)$ i.e. $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$. 今, $g'(c) \neq 0$ である. 実際, $g'(c) = 0$ なら $g(b) - g(a) \neq 0$ なので $f'(c) = 0$ これは (2) に反する. 故に, $(g(b) - g(a))g'(c) (\neq 0)$ で両辺を割ると $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ を得る. □ 5 テーラーの定理 (テーラー展開) 定義 5. 関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) で C^r-級 (r-階連続微分可能) であるとは, $f(x)$ の r-回までの導関数が (a, b) で連続であるときをいう. 定理 5. 関数 $f(x)$ を $(a - r, a + r)$ ($r > 0$) で C^{n+1}-級とする, そのとき, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$ を満たす c が存在する. ここに, $c = a + (x - a)\theta$ ($0 < \theta < 1$) と表される. 証明. $F(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b - x)^k - A(b - x)^{n+1}$ とおく (これはテクニックでもある). 但し, $F(a) = F(b)$ となるように A を定める. $\begin{aligned} F(a) &= f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k - A(b - a)^{n+1} \\ &= F(b) = f(b) - f(b) = 0 \end{aligned}$ $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + A(b - a)^{n+1}$ $\begin{aligned} F'(x) &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b - x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{(k - 1)!} (b - x)^{k-1} \\ &\quad + (n + 1)A(b - x)^n \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b - x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b - x)^k \\ &\quad + (n + 1)A(b - x)^n \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b - x)^n + (n + 1)A(b - x)^n \end{aligned}$ よって, ロールの定理より, $F'(c) = 0$ となる c ($a < c < b$) が少なくとも一つ存在する. このとき, $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}$. よって, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$ と表される.		
学籍番号		氏名		評点	
	No.				

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある <u>注意書き</u> の欄も見て欲しい)																																		
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.7																															
例題 13.			• $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o(6)$. • $(x \sin x)^2 = x^4 - \frac{x^6}{3} + o(6)$ • $(x \sin x)^3 = x^6 + o(6)$ ▶ $e^{x \sin x} = 1 + x \sin x + \frac{1}{2!}(x \sin x)^2 + \frac{1}{3!}(x \sin x)^3 + o(6)$ とおけば, $e^{x \sin x} = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(6)$ を得る. 注意 10. • $o(cn) = o(n)$, • $k \leq \ell \rightarrow x^k + x^\ell = o(k)$, • $o(k) \cdot o(\ell) = o(k + \ell)$ 6.2 極値問題 高等学校で学んだように, 極大値・極小値については以下の事が知られている: 復習. (1) <u>$f'(a) = 0$ & $f''(a) > 0 \implies f(a)$ は極小値である.</u> (2) <u>$f'(a) = 0$ & $f''(a) < 0 \implies f(a)$ は極大値である.</u> 注意 11. ▶ $f(x)$ が $x = a$ で極値をもつとき $f'(a) = 0$. ▶ 一方, 3 次関数 $f(x) = x^3$ については $f'(x) = 3x^2$ より $f'(0) = 0$ であるが $f(0) = 0$ は極大値でも極大値でもない. このことから $f'(a) = 0$ は $x = a$ で極値をもつための必要条件であって十分条件ではない. それでは, <u>$x = a$ で極値を取るための必要十分条件は何であろうか.</u> 命題 2. $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば $f'(a) = 0$ である. (i) <u>$f(a)$ が極大値ならば</u>, $h > 0$ (十分小) に対して $f(a \pm h) \leq f(a) \therefore 0 \geq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ \& \> } \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \leq 0.$. $h \rightarrow 0$ とすれば, $0 \geq f'(a) \text{ \& \> } f'(a) \leq 0$. 故に, <u>$f'(a) = 0$.</u> (ii) <u>$f(a)$ が極小値ならば</u>, $h > 0$ (十分小) に対して $f(a \pm h) \geq f(a) \therefore 0 \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ \& \> } \frac{f(a-h)-f(a)}{h} \geq 0.$ $h \rightarrow 0$ とすれば, $0 \leq f'(a) \text{ \& \> } f'(a) \leq 0$. 故に, <u>$f'(a) = 0$.</u> □ 注意 12 (極値の求め方). (1) $f'(x) = 0$ の解を求める ($f'(a) = 0$ なる a を求める) (2) $f''(a)$ の値を求める. $\begin{cases} f''(a) > 0 & \xrightarrow{\text{ナラバ}} f(a) \text{ 極小値である} \\ f''(a) < 0 & \xrightarrow{\text{ナラバ}} f(a) \text{ 極大値である.} \end{cases}$ <table><tr><td>x</td><td>$\cdots$</td><td>a</td><td>$\cdots$</td><td>b</td><td>$\cdots$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>$*$</td><td>$-$</td><td>$*$</td><td>$+$</td><td>$*$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$f(a)$</td><td>$\searrow$</td><td>$f(b)$</td><td>$\nearrow$</td></tr></table> 例題 14. ▶ $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(1)$ (一次近似) $\lim_{x \rightarrow 0} o(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(1)}{x} = 0.$ ▶ $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}x^2 + o(2)$ (2 次近似) $\lim_{x \rightarrow 0} o(2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(2)}{x^2} = 0.$ ▶ $\sin x = x + o(1)$, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(3)$, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(5)$ ▶ $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(2)$ 例題 15. 次を $o(6)$ までを計算してみよう.			x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$f''(x)$	$*$	$-$	$*$	$+$	$*$	$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	学籍 番号			氏 名		評 点	
x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$																															
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$																															
$f''(x)$	$*$	$-$	$*$	$+$	$*$																															
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$																															
		No.																																		

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No. 8
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 16. 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$*$	$-$	$*$	$+$	$*$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

実際

$f'(x) = 3(x + 1)(x - 1), f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0$ の解は $x = \pm 1$. また,

$f'(x) < 0 \iff -1 < x < 1 \quad f'(x) > 0 \iff x > 1, x < -1$

$f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0.$

よって, $f(-1) = 2$ は極大値, $f(1) = -2$ は極小値.

(*) 実際は増減表は描かなくても良い.

課題. (1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ の極値を求めよ.

(2) $f(x) = e^x \sin x \ (0 \leq x \leq \pi)$ の最大値を求めよ.

注意 13 (連続性と無限小). 連続関数 $f(x)$ の $x = a$ の付近 $(a - \delta, a + \delta)$ (近傍という) での挙動を調べる.

(i) $f(a) > 0$ ならば, $\delta > 0$ 十分小さく選べば $f(x)$ の連続性から

$f(x) > 0 \quad \text{for} \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$

とできる. $f(a) < 0$ ならば, 同じく

$f(x) < 0 \quad \text{for} \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta)$

とできる.

(ii) $x \rightleftharpoons a$ (x は a に限りなく近いの意味) で $f(x) > 0$ ならば,

$f(x) \pm o(x, a; n) > 0 \quad \text{for} \quad x \rightleftharpoons a$

$x \rightleftharpoons a$ で $f(x) < 0$ ならば同様に

$f(x) \pm o(x, a; n) < 0 \quad \text{for} \quad x \rightleftharpoons a$

注意 1 2 から極大・極小の条件を見てみよう.

命題 3. (1) $f'(a) = 0$ & $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値,
即ち, $x = a$ の付近の x に対し $f(x) \geq f(a)$ が成り立つ.

(2) $f'(a) = 0$ & $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値,
即ち, $x = a$ の付近の x に対し $f(x) \leq f(a)$ が成り立つ.

証明. (1) の証明: $x = a$ 付近の x を $x \rightleftharpoons a$ と書くことにしよう (多少曖昧だが気にしない). テイラーの定理から

$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + o(x, a; 2)$

注意 1 3 -(ii) からが $x \rightleftharpoons a$ のとき $\frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + o(x, a; 2) \geq 0$. 但し, 等号は $x = a$ の付近では $x = a$ の時のみ成立. 従って, $f(x) - f(a) \geq 0$, 即ち, $f(x) \geq f(a)$ が $x = a$ の付近で成立. これは $f(a)$ が極小値であることを示している.

(2) の証明: テイラーの定理から

$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + o(x, a; 2)$

注意 1 3 -(ii) から $x \rightleftharpoons a$ なら, $\frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + o(x, a; 2) \leq 0$. 但し, 等号は $x = a$ の付近では $x = a$ の時のみ成立. 従って, $f(x) - f(a) \leq 0$. 即ち, $f(x) \leq f(a)$ が $x = a$ の付近で成立している. こうして, $f(a)$ は極大値である.

注意 14.

$$\begin{aligned} f''(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a; h) - f(a)) + (f(a - h) - f(a))}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} \end{aligned}$$

これより, $f(x)$ が $x = a$ の近くで定数でなく, $f(a)$ が最小値なら, 十分小さな $h > 0$ に対し,

$f(a \pm h) > f(a) \iff f'(a) = 0 \text{ \& } f''(a) > 0$

が分かる.

6.3 ロピタルの定理

定理 6. .

(1) $f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で开区間 (a, b) で微分可能とする. 更に, (a, b) で $g'(x) \neq 0$ とする.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ とする.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

.

(2) $f(x), g(x)$ は开区間 $(a, +\infty)$ で微分可能かつ $g'(x) \neq 0$ とし,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ とする.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

証明. (1) の証明: コーシーの平均値定理から (b を x で置き換える)

$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c = a + \theta(x - a) \ (0 < \theta < 1)$

$f(a) = f(b) = 0$ なので,

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$x \rightarrow a \iff c \rightarrow a$ より,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) < \infty$

(2) の証明: $x = \frac{1}{t}$ とおくと, $x \rightarrow \infty \longleftrightarrow t \rightarrow 0 \ F(t) = f(\frac{1}{t}), G(t) = g(\frac{1}{t})$ とおくと, $F(t), G(t)$ は $(0, \frac{1}{a})$ で定義される.

$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} G(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ であった. 任意の $\frac{1}{a} > \epsilon > 0$ に対し, コーシーの平均値定理から

$\frac{F(t) - F(\epsilon)}{G(t) - G(\epsilon)} = \frac{F'(\epsilon + \theta(t - \epsilon))}{G'(\epsilon + \theta(t - \epsilon))}$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.9
-----	------------	---------	-------	-------	---------------

(証明の続き) これより,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(\epsilon)}{G(t) - G(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F'(\epsilon + \theta(t - \epsilon))}{G'(\epsilon + \theta(t - \epsilon))}$$
$$\therefore \frac{F(t)}{G(t)} = \frac{F'(\theta t)}{G'(\theta t)} \quad \because \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon) = 0$$
$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(\theta t)}{G'(\theta t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)}$$

今,

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$F'(t) = f'(\frac{1}{t}) = f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2}) = -x^2 f'(x). \text{ 同様に, } G'(t) = -x^2 g'(x).$$
$$\therefore \frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

例題 17. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x \log 4 - 3^x \log 3}{1} = \log 4 - \log 3 = \log \frac{4}{3}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right).$

そこで, $t = \frac{1}{x}$ とおけば, $x \rightarrow \infty \leftrightarrow t \rightarrow 0$ ゆえ, ロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1.$$
$$\log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ここに, 注意5 より, $F(x) = \log x$ は $x > 0$ で連続ゆえ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right\} = \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \right)$$

6.4 一次近似

関数 $f(x)$ を $x = a$ で C^2 -級とする. このとき, テーラーの定理より, $h = x - a \iff x = a + h$ (h は十分小) とおくと,

$$f(a + h) = \underline{f(a) + f'(a)h} + R_2(h) (= \frac{f''(a + \theta h)}{2} h^2)$$

を得る. ここに, $R_2(h) = o(1).$

例題 18. (1) $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$) について,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \text{ より,}$$
$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h - \frac{1}{8}(a+\theta h)^{-\frac{3}{2}}h^2.$$

故に, $a = 4, h = 0.01$ とおくと, $4 < c = 4 + 0.01\theta < 4.01$ より,

$$\sqrt{4.01} = \sqrt{4} + \frac{0.01}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.01}{4}$$
$$|R_2| = \frac{1}{8c^{\frac{3}{2}}}(0.01)^2 < \frac{1}{8 \times 4^{\frac{3}{2}} \times 10000} = \frac{1}{64 \times 10000} < 0.000002.$$

こうして 1 次近似 $\sqrt{4.01} \sim 2 + 0.0025 = 2.0025, R_2 < 0.000002$ を得る. 誤差の限界は $R_1 < 0.000002$ である.

(2) $e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}a^n + R_n$

$$R_n = \frac{e^{a\theta}}{(n+1)!} < \frac{e^a}{(n+1)!} \quad (\because e^{a\theta} < e^a \quad (\text{for } 0 < \theta < 1)).$$

特に, $a = 1$ とおけば, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} + R_{n+1}$

$$e < 3 \text{ より, } R_{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

特に, $n = 3$ なら, $e \sim 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$

最大誤差は

$$\frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0.125$$

特に, e が有理数でないことも最大誤差を用いて示せる.

6.5 逆関数

- 関数 $y = f(x)$ の定義域とは $f(x)$ が関数として定義される x の範囲を指し $D(f)$ にて表し, $y = f(x)$ の取りうる値の範囲を値域といい $R(f)$ で表した.
- 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ を考えるとき, $g(x)$ の値域 $R(g)$ は $f(x)$ の定義域 $D(f)$ に含まれなければならない, 即ち,

$$f(g(x)) \longleftrightarrow R(g) \subset D(f)$$

- $y = f(x)$ の逆関数とは $f(g(x)) \overset{(\text{恒等的に等しい})}{=} x$ を満たす関数 $g(x)$ の事である. 但し, 関数 $f(x)$ に対し, その逆関数 $g(x)$ が無条件に常に存在するとは限らない. 特に, $f(g(x)) = x$ から $g(x)$ の定義域は, $f(x)$ の値域である事が分かる, 即ち, $D(g) = R(f).$
- $f(x)$ に値域から任意に点 $y_0 \in R(f)$ をとる, このとき, $y_0 = f(x)$ となる x が唯一つ定まるような x の範囲

$$D_f = \{x \in D(f) : \text{任意の } y_0 \text{ に対し } y_0 = f(x) \text{ なる } x \text{ が唯一つ存在}\}$$

を $f(x)$ の定義域として新たに指定するとこれが $g(x)$ の値域となる. $g(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域である. $g(x) = f^{-1}(x)$ とかく. こうして, $f(f^{-1}(x)) = x$ を得る.

(♠) 大雑把に言えば, $f(x)$ の逆関数とは $y = f(x)$ に於いて, x を y の関数として $x = g(y)$ と表し, x と y を入れ替え, $y = g(x)$ としたものが逆関数であつる.. 例えば, $y = e^x$ に対し両辺の自然対数を取れば $\log y = \log e^x = x \therefore x = \log y$ を得る. そこで, x, y を入れ替えれば $y = \log x$ となり, $y = e^x$ の逆関数 $y = \log x$ を得る.

注意 15. $f(x)$ が連続 (または微分可能) なら逆関数 $g(x) = f^{-1}(x)$ もまた連続 (または微分可能) である (証明は難しいので省略). 実際, 逆関数の導関数は $f(g(x)) = x$ の両辺を x で微分して

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \therefore (g(x))' = \frac{1}{f'(g(x))}$$
$$\therefore (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

実際は $f'(f^{-1}(x))$ を具体的に x の関数としてどう表すかであるが, これについては次の例題 19 を参考にせよ.

学籍 番号		氏		評 点	
	No.	名			

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.10
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

注意 16 (三角関数の逆関数).

(1) 関数 $y = \sin^{-1} x$ を逆正弦関数という. $\sin x$ の値域は $-1 \leq \sin x \leq 1$ なので $\sin^{-1} x$ の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ である. $\sin x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に狭めると, $y = \sin^{-1} x$ の値域は必然的に $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ となる. 今, $\sin(\sin^{-1} x) = x$ より両辺を x で微分して

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

または, $y = \sin x$ の x と y を交換して $x = \sin y$. 両辺を x で微分して $1 = (\cos y) \cdot y' = (\sqrt{1-\sin^2 y}) \cdot y' = \sqrt{1-x^2} \cdot y'$.

$$y' = (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで, $y = \sin^{-1} x$ の値域は $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \therefore \cos y \geq 0$

$$\therefore \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

(2) 関数 $y = \cos^{-1} x$ を逆余弦関数という. $\cos x$ の値域は $-1 \leq \cos x \leq 1$ なので $\cos^{-1} x$ の定義域は $-1 \leq x \leq 1$ である, 値域は $\cos x$ の定義域を $0 \leq x \leq \pi$ に絞ることにより, $0 \leq y = \cos^{-1} x \leq \pi$. 次に, $\cos(\cos^{-1} x) = x$ の両辺を x で微分することにより

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{1}{\cos'(\cos^{-1} x)} = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1} x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

または, $y = \cos x$ の x と y を交換して $x = \cos y$. 両辺を x で微分して

$$1 = (-\sin y) \cdot y' = (-\sqrt{1-\cos^2 y}) = -\sqrt{1-x^2} \cdot y'$$

$$\therefore y' = (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

今, $0 \leq y = \cos^{-1} x \leq \pi$ より,

$$0 \leq \sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

(3) 関数 $y = \tan^{-1} x$ を逆正接関数という. $\tan x$ の値域は $-\infty < \tan x < \infty$ なので $\tan^{-1}$ の定義域は $-\infty < x < +\infty$, $\tan x$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \tan x$ に限定すると, 値域は $-\frac{\pi}{2} < y = \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ となる. このとき,

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

実際, $\tan(\tan^{-1} x) = x$ より,

$$\tan^2(\tan^{-1} x) = (\tan(\tan^{-1} x))^2 = x^2.$$

または, $y = \tan x$ の x, y を交換して, $x = \tan y$ を得る. 両辺を x で微分して $1 = (\tan y)' = (1+\tan^2 y) \cdot y' = (1+x^2) \cdot y'$

$$\therefore y' = (\tan^{-1})' = \frac{1}{1+x^2}$$

例題 19. (1) $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$. よって,

$$\begin{aligned} \cos(\sin^{-1} x) &= \sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1} x)} \\ &= \sqrt{1-(\sin(\sin^{-1} x))^2} \\ &= \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

(2) $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ より, $\sin(\cos^{-1} x) \geq 0$. よって,

$$\begin{aligned} \sin(\cos^{-1} x) &= \sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1} x)} \\ &= \sqrt{1-(\cos(\cos^{-1} x))^2} = \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

(3) $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos(\tan^{-1} x) > 0$.

$y = \tan^{-1} x$ とおくと, $x = \tan y$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y. \text{ 特に, } \cos y = \cos(\tan^{-1} x) > 0$$

$$\text{なので} \quad \cos y = \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(4) $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ なので $-1 < \sin(\tan^{-1} x) < 1$.

$y = \tan^{-1} x$ とおくと, $x = \tan y$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y. \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ゆえ}$$

$$\sin y = \pm \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$\therefore \sin(\tan^{-1} x) = \sin y = \pm \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(5) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ であるが, $\tan$ の定義域を $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ としており, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ なので, $0 < \cos^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ として考える.

$$y = \cos^{-1} x \text{ とおくと } x = \cos y \quad \left(0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < x < 1\right).$$

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

$$\therefore \tan y = \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$y = \sin^{-1} x \quad (0 < x < 1) \text{ とおくと } x = \sin y \quad (0 < y < \frac{\pi}{2}).$$

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \quad \therefore \tan^2 y = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\tan y = \tan(\sin^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

特に,

$$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad (0 < x < 1)$$

実際, $u = \cos^{-1} x$, $v = \sin^{-1} x$ とおくと,

$$\tan u = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \tan v = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{\tan u + \tan v}{1-1} = \infty$$

$$\therefore u+v = \cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

例えば, $a = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $b = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ とおく. そのとき, $a + b = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ は次のようにして求める. $\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $a = \frac{\pi}{4}$. 一方, $\cos b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $b = \frac{\pi}{4}$. よって, $a+b = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore a+b = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島	No.11
-----	------------	---------	-------	-------	----------	-------

6.6 曲線と接線

定義 7. xy -平面内の曲線 C とは媒介変数（パラメータ） t および閉区間 $a \leqq t \leqq b$ で連続かつ開区間 (a, b) で微分可能な関数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ を用いて,

$$C: \begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b)$$

と表示される図形を指す.

例. (1) 原点中心, 半径 1 の円周

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2) 放物線 $y = x^2$ ($0 \leqq x \leqq 1$) の一部分

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

(3) サイクロイド

$$C: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(3) $y = f(x)$ ($a \leqq x \leqq b$) のグラフ

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b)$$

例題 20. サイクロイド曲線 C は滑らかである.

定理 7. 曲線 $C: \begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b)$ とする.

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \frac{d\psi(t)}{dt}\right) \neq (0, 0) \quad (a <^\forall t < b)$$

の時, C を滑らかな曲線という. 区間 (a, b) 内の有限個の点 $t_1, t_2, \dots, t_k$ を除き, $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \neq (0, 0)$ の時, C は区分的に滑らかな曲線という.

例. 曲線

$$C: \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

は $t = 0$ 以外では $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \neq (0, 0)$ ゆえ, 区分的に滑らかである.

注意 17. 曲線 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leqq t \leqq b)$ とする. そのとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \quad \text{if} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

(不完全な証明). 実際, t を固定する.

$\Delta x := x(t + \Delta t) - x(t) \neq 0$ (と仮定し), $\Delta y := y(t + \Delta t) - y(t)$ とおく.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} < \infty \text{ の時, } \Delta x = \frac{dx}{dt} \Delta t + \epsilon_1 \text{ と表される. 同様に,}$$
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} < \infty \text{ の時, } \Delta y = \frac{dy}{dt} \Delta t + \epsilon_2 \text{ と表される.}$$

但し, $\epsilon_i = \epsilon_i(t, \Delta t)$ は $\epsilon(t, 0) = 0$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon_i = 0$ なる Δt の連続関数.

よって, $\Delta x \rightarrow 0 \implies x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta t \left(x'(t + \theta \Delta t)\right) \rightarrow 0$.

$\frac{dx}{dt} \neq 0$ なら, 連続性から $x'(t + \theta \Delta t) \neq 0$ とできる. こうして,
 $\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta t \rightarrow 0 \implies \epsilon_i \rightarrow 0$ を考慮に入れて,

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t) + \epsilon_2}{x'(t) + \epsilon_1} \implies \frac{dy}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

例題 21. サイクロイド

(1) $C: \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について, $\frac{dy}{dx}$ を求める.

$$\frac{dy}{dt} = a \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

(2) アステロイド $C: \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ について, $\frac{dy}{dx}$ を求める.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t$$

7 練習問題

練習問題 1.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \ (a > 0) = 0$ を示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示せ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ を認めて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ を示せ.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = -\frac{1}{2}$ を示せ.
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$ を示せ.
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ を示せ.
- (7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = 1$ を示せ.
- (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 2}) = 2$ を示せ.

練習問題 2. 次の逆三角関数の値を求めよ.

- (1) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$, (2) $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
- (3) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$ (4) $\sin^{-1} 1$, (5) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (6) $\tan^{-1} \sqrt{3}$ (7) $\tan^{-1}(-1)$ (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$
- (9) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7}$, (10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x$

練習問題 3. 次を示せ.

- (1) $\cos^2(\sin^{-1} x) = 1 - x^2$, (2) $\cos^2(\cos^{-1} x) = x^2$,
- (3) $\cos^2(\tan^{-1} x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ を示せ.

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある <u>注意書き</u> の欄も見て欲しい)				
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.12	
練習問題 4. $y = f^{-1}(x)$ について,			練習問題 11.			
$f(f^{-1}(x)) = x \implies f'(f^{-1}(x)) \left(f^{-1}(x)\right)' = 1$			$e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + R_n ; R_n < \frac{3}{(n+1)!}$			
より, $y' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$. 次の公式を示せ.			を示して e が無理数である事を示せ.			
練習問題 5 (次を示せ).			練習問題 12. 次の関数の極値を求めよ.			
(1) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (2) $(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$			(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$			
(3) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.			(2) $f(x) = x \log x \ (x > 0)$			
練習問題 6 (次の関数を微分せよ).			(3) $f(x) = \sin x \ (0 \leq x \leq 2\pi)$			
1) $\sin^{-1} \frac{x}{a} \ (a > 0) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.			(4) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \ (-1 \leq x \leq 1)$			
2) $\cos^{-1} \frac{x}{a} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.			(5) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$			
3) $\tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{a^2+x^2}$.			練習問題 13. 曲線 $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) = (a \leq t \leq b) \end{cases}$ とする. そのとき,			
練習問題 7. n 階導関数を求めよ			$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$			
(1) $x^2 e^x$ (2) $\cos x \cos 2x$ (3) $\frac{1}{x(x+1)}$ (4) $x^{n-1} \log x$			を示せ.			
(5) $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, $(1+x^2)f(x) = 1$ を示し,			練習問題 14. $a_i > 0 \ (1 \leq i \leq n)$ とする. そのとき,			
(1) $(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0 \ (n \geq 2)$			$(\spadesuit) \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$			
を示せ. また, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.			が成立することを証明せよ.			
練習問題 8. 次の関数のマクローリン展開を求めよ.			特に, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1, a_n = a > 0$ とおき, $(\spadesuit)$ を適用すれば			
(1) 2^x (2) $(e^x + 1)^2$ (3) $2 \sin x \sin 2x$ (4) $\cos^2 x$			$\frac{n-1+a}{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq \frac{n}{n-1+\frac{1}{a}} \quad \therefore 1 + \frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq \frac{1}{1+\frac{1-a}{na}}$			
練習問題 9 (ロピタルの定理). 次の極限値を求めよ.			$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a-1}{n}\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-a}{na}\right)} = 1$			
(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$			$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$			
(4) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4t} - e^t - 3t}{t^2}$ (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^n}{x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$			練習問題 15. 実数 $x > 0$ に対し, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を示せ.			
練習問題 10. テーラーの公式:			(ヒント) 実数 $x > 0$ をとる. このとき, 自然数 n が存在し $n \leq x < n+1$			
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}(a;h)$			を満たす. ここに, n は x に依存する. 即ち, x が大きくとれば, n も			
但し,			大きくとる必要がある. ゆえに, $x \rightarrow \infty \implies n \rightarrow \infty$. このとき,			
$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$			$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$			
この公式を利用して, 次の値の一次近似と誤差を求めよ.			$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$			
(1) $\sqrt[3]{8.01}$ (2) $\sqrt[5]{31}$ (3) $\log(1 + \frac{1}{100})$			$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot e = e$			
$f(x) = \sqrt[n]{x}, f'(x) = \frac{1}{m} \frac{\sqrt[n]{x}}{x}, f''(x) = -\frac{(m-1)}{m^2} \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2}$			このことから,			
$g(x) = \log(1+x), g'(x) = \frac{1}{1+x}, g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$			$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$			
(1) 2.00083, $ R_2(8, 0.01) < 0.00000035$						
(2) 1.9875, $ R_2(32, -1) < 0.0027$						
(3) 0.01, $ R_1(1, 0.01) < 0.00005$						

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.13
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

7.1 練習問題の解答例

練習問題 1

- (1) $0 < a < 1$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. $a \geq 1$ のときは, $k > 2a$ となる自然数 k をとる. $n > k$ となる任意の自然数 n に対して, $\frac{a}{n} < \frac{a}{k} < \frac{1}{2}$ ゆえ,
$$\frac{a^n}{n!} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^k}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(n-k)}}{(k+1) \cdots n} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(2^k \cdot \frac{a^k}{k!}\right) \cdot \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
- (2) ロピタルの定理から $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}}$ より, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{\log x}{x}\right)} = e^0 = 1$.
- (3) $n^2 = m$ とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\sqrt{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \log(1 + \frac{1}{m})^m\right)}$.
今, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 0 \cdot 1 = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-1)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 1)} = -\frac{1}{2}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}\right) = 0 \cdot 1 = 0$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \cdot 1 = 1$
- (7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \stackrel{t=\cos x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (\because x \rightarrow \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow t = \cos x \rightarrow 0)$
- (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1$

練習問題 2

- (1) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = t \iff \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore t = \frac{\pi}{4}$
- (2) $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = t \iff \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore t = -\frac{\pi}{3}$
- (3) $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{1}{3} \implies \tan \alpha = \frac{1}{2}$
 $\tan \beta = \frac{1}{3} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$.
 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4} \iff \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \quad \text{i.e.} \quad \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$
- (4) $\sin^{-1} 1 = t \iff \sin t = 1 \quad \therefore t = \frac{\pi}{2}$
- (5) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = t \iff \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 < t < \pi) \quad \therefore t = \frac{\pi}{6}$
- (6) $\tan^{-1} \sqrt{3} = t \iff \tan t = \sqrt{3} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore t = \frac{\pi}{3}$
- (7) $\tan^{-1} 1 = t \iff \tan t = 1 \quad \therefore t = \frac{\pi}{4}$
- (8) $t = \tan^{-1} x \iff x = \tan t. \quad x \rightarrow \infty \iff t \rightarrow \frac{\pi}{2}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} t = \frac{\pi}{2}$

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.14
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

(9) $\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{3}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{1}{7} \quad \therefore \quad \tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{1}{7}$

ここで, $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \beta}{1 - \tan 2\alpha \tan \beta}, \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$ より, $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \frac{1}{7}} = \frac{25}{25} = 1$

(10) $t = \tan^{-1} x \iff x = \tan t. \quad x \rightarrow -\infty \iff t \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = \lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} t = -\frac{\pi}{2}.$

練習問題 3

(1) $\cos^2(\sin^{-1} x) = 1 - \sin^2(\sin^{-1} x) = 1 - \{\sin(\sin^{-1} x)\}^2 = 1 - x^2$

(2) $\cos^2(\cos^{-1} x) = \{\cos(\cos^{-1} x)\}^2 = x^2$

(3) $\cos^2(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + \{\tan(\tan^{-1} x)\}^2} = \frac{1}{1 + x^2}$

練習問題 4

(1) $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$ 実際, $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$ であることに注意.

(2) $(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sin(\cos^{-1} x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$ 実際, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ より $\sin(\cos^{-1} x) \geq 0$ であることに注意.

(3) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$

練習問題 5

(1) $\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(2) $\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{-\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)} = \frac{-\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \cos^2\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}} = \frac{-\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(3) $\left(\tan^{-1} \frac{x}{a}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1 + \tan^2(\tan^{-1} \frac{x}{a})} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2 + x^2}$

練習問題 6

(1) $y = x \log x - x \implies y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$

(2) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \implies y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(3) $y = 4^x - 3^x = e^{x \log 4} - e^{x \log 3} \implies y' = (\log 4)e^{x \log 4} - (\log 3)e^{x \log 3} = (\log 4) \cdot 4^x - (\log 3) \cdot 3^x$

(4) $y = 2^{\sin x} = e^{(\log 2) \sin x} \implies y' = e^{(\log 2) \sin x} \{(\log 2) \sin x\}' = e^{(\log 2) \sin x} (\log 2) \cos x = 2^{\sin x} (\log 2) \cos x$

(5) $y = x^x = e^{x \log x} \implies y' = e^{x \log x} \cdot (x \log x)' = x^x (\log x + 1)$

(6) $y = x^{\log x} = e^{(\log x)^2} \implies y' = e^{(\log x)^2} \{(\log x)^2\}'$
 $= e^{(\log x)^2} (2 \log x) \frac{1}{x} = 2x^{\log x - 1} \log x$

(7) $y = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2} \implies y' = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\cos(\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2})}$
 $= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

(8) $y = \tan^{-1} \frac{1 + x}{1 - x} \implies y' = \frac{\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)'}{1 + \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2} = \frac{\frac{2}{(1 - x)^2}}{\frac{(1 - x)^2 + (1 + x)^2}{(1 - x)^2}} = \frac{1}{1 + x^2}$

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.15
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

練習問題 7

- (1) $\{x^2e^x\}^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^2 {}_nC_k \cdot {}_2P_k x^{2-k}\right)e^x = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$
- (2) $y = \cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \quad \therefore \quad y^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$
- (3)
$$\left\{\frac{1}{x(x+1)}\right\}^{(n)} = \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\}^{(n)} = \left\{(-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{x^{n+1}}\right\} - \left\{(-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\} = (-1)^n n! \left\{\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$$
- (4) $y = x^{n-1} \log x$. 今, $1 \leq k \leq n-1$ 対して, $y^{(k)} = {}_{n-1}P_k x^{n-k-1} \left(\log x + \sum_{j=1}^k \frac{1}{n-j}\right)$ であることが数学的帰納法で示せる.
$$y^{(n-1)} = {}_{n-1}P_{n-1} x^0 \left(\log x + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-j}\right) = (n-1)! \left(\log x + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell}\right) \quad \therefore \quad \therefore \quad y^{(n)} = \{y^{(n-1)}\}' = \frac{(n-1)!}{x}$$
- (5) $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ より $(1+x^2)f'(x) = 1$. 両辺を x で微分すると $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$. 更に, 両辺を x で微分すると,
 $(1+x^2)f^{(3)}(x) + 4xf^{(2)}(x) + 2f(x) = 0$. 一般に, $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \geq 2)$ が成立することが数学的帰納法で示す事ができる. $x = 0$ を代入すると
$$f(0) = f^{(2)}(0) = \dots = f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, f^{(3)}(0) = \frac{-1}{2!}, \dots, f^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

練習問題 8

- (1) $f(x) = 2^x = e^{x \log 2} \quad \therefore f^{(n)}(x) = (\log 2)^n 2^x$
 $\rightarrow f^{(n)}(0) = (\log 2)^n \therefore 2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n!} x^n$
- (2) $(e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n + 2)}{n!} x^n + 1 + 1$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 1}{n!} x^n$$
- (3) $2 \sin x \cdot \sin 2x = \cos(2x - x) - \cos(2x + x) = \cos x - \cos 3x$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (3x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - 9^n)}{(2n)!} x^{2n}$$
- (4) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

練習問題 9

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log 4)4^x - (\log 3)3^x}{1} = \log \frac{4}{3}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$
- (4) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4t} - e^t - 3t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4e^{4t} - e^t - 3}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{16e^{4t} - e^t}{2} = \frac{15}{2}$

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.16
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^n}{x} = n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^{n-1}}{x} = n(n-1) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^{n-2}}{x} \dots = n! \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^0}{x} = n! \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \log x} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}\right)} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$

練習問題 1 0

(1) $\sqrt[3]{8.01} = \sqrt[3]{8+0.01} = \sqrt[3]{8} + \frac{0.01}{12} + R_2 = 2.000833 + R_2. \quad |R_2| < \frac{(0.01)^2}{18 \times 16} < 0.00000035.$

(2) $\sqrt[5]{31} = \sqrt[5]{32-1} = \sqrt[5]{32} - \frac{1}{80} + R_2 = 1.9875 + R_2. \quad |R_2| < \frac{1}{2} \times \frac{4}{25} \times \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{6400} < 0.00017$

(3) $\log \left(1 + \frac{1}{100}\right) = \log 1 + \frac{1}{100} + R_2 = 0.01 + R_2. \quad |R_2| < \frac{1}{20000} = 0.00005$

練習問題 1 1

e を有理数と仮定する. そのとき, $e = \frac{m}{n}$, 但し, m, n は互いに素な整数, と表す事ができる. このとき, $ne = m$ は整数である. 両辺に $(n-1)!$ を乗じて, $n!e = (n-1)!m$ もまた整数である. e^x の n 次マクローリン展開において, $x = 1$ とおくと

(♠) $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}$ を得る. 但し, $R_{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$. 一方, $e^\theta < e^1 < 3$ より, (♣) $R_{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$ を得る. (♠) の両辺に $n!$ を乗ずると, $n! \cdot e = n! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + n! \cdot R_n$ を得る. 今, $n! \cdot e$ も $n! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ も整数ゆえ, $n! \cdot R_{n+1}$ もまた整数である. ところが, (♣) より $0 < n! \cdot R_n < \frac{3n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$. こうして, $n = 1$ なければならない, 即ち, $e = m$ (整数) でなければならない. (♠) から $2 < e < 3$. これは明らかに矛盾である. ゆえに, e は有理数でない. 即ち, e は無理数である.

練習問題 1 2

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2. \quad \therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \iff x = \pm 1. \quad f''(x) = 6x$ ゆえ, $f''(1) = 6 > 0, f''(-1) = -6 < 0$. こうして, $f(1) = 0$ は極小値であり, $f(-1) = -4$ は極大値.

(2) $f(x) = x \log x. \quad \therefore f'(x) = \log x + 1 = 0 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad f''(x) = \frac{1}{x}$ より, $f''(e^{-1}) = e > 0$. よって, $f(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$ は極小値.

(3) $f(x) = \sin x. \quad f'(x) = \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \quad f''(x) = -\sin x$ より, $f''(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0, f''(\frac{3\pi}{2}) = 1 > 0$. 故に, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ は極大値であり $f(\frac{3\pi}{2}) = -1$ は極小値である.

(4) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad \therefore f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0. \quad f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = 2 \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}. \quad f''(0) = -2 < 0$ より, $f(0) = 1$ は極大値.

(5) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}. \quad f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) = 0 \iff x = \pm 1. \quad f''(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)$ よって, $f''(1) < 0, f''(-1) > 0$ こうして, $f(1) = e^{\frac{1}{2}}$ は極大値, $f(-1) = -e^{\frac{1}{2}}$ は極小値.

練習問題 1 3

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ であつた. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$

練習問題 1 4

関数 $f(x) = \log x - (x-1) \quad (x > 0)$ について, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0$ の解は $x = 1$. $x < 1$ のとき $f'(x) > 0$. よって, $f(x)$ は単調増加し, $x > 1$ のとき, $f'(x) < 0$ より, $f(x)$ は単調減少する. こうして, $f(1) = 0$ は極小値であり最小値でもある. こうして, $f(x) \leq 0$. 即ち, (*) $\log x \leq x-1 \quad (x > 0)$ が成り立つ. $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ とおき, $x = \frac{a_i}{A} > 0$ を (*) に代入すれば $\log \frac{a_i}{A} \leq \frac{a_i}{A} - 1 \quad (1 \leq i \leq n)$ を得る. 従つて, $\sum_{i=1}^n \log \frac{a_i}{A} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{A} - 1 \right) = \frac{1}{A} \cdot \sum_{i=1}^n a_i - n = \frac{nA}{A} - n = n - n = 0$. よって, $\sum_{i=1}^n \log \frac{a_i}{A} \leq 0 \quad \therefore \quad \log \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{A^n} \leq 0$ 従つて, $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{A^n} \leq 1 \implies a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq A^n \implies \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \square$

練習問題 1 5

所謂, 挟みうちの原理を応用する. $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$. 即ち,

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある <u>注意書き</u> の欄も見て欲しい)							
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限		担 当 者	石田・大嶋・古島 No.17			
8 1 変数の積分									
8.1 定積分									
$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする. そのとき, $f(x)$ の $[a, b]$ での最大値を M, 最小値を m とする (最大値・最小値の定理), 即ち, $\min_{a \leq x \leq b} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ が成り立つ. $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする (等分割とは限らない). $f(x)$ の $[x_{i-1}, x_i]$ での最大値を M_i, 最小値を m_i とする. $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i に対し $S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ $S_{\min} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$ $S_{\max} = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ 但し, $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - x_{i-1}$. $S_{\min}$ を不足和といい, S_{max} を過剰和という. そのとき, $m(b-a) \leq S_{\min} \leq S_{\Delta} \leq S_{\max} \leq M(b-a)$ を得る. $\Delta \rightarrow 0 \iff n \rightarrow \infty$ であることに注意せよ. そこで, 閉区間の如何なる分割 Δ をとっても $n \rightarrow \infty$ としたときの極限值が存在する (有限確定値) とき : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta} = \lim_{ \Delta \rightarrow 0} S_{\Delta} = \int_a^b f(x) dx$ と表し $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での定積分という. 実は, $f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならこの極限值は必ず存在する. 特に, n 等分割をとれば, 高校で習ったような定義 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad \text{となる.}$ 例題 22. $\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{n}{n^2 + i^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{2n^2}{n^2 + i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{2}{1 + 4(\frac{i}{2n})^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1 + (2x)^2} dx = \left[\tan^{-1} 2x \right]_0^1 \\ &= \tan^{-1} 2 \end{aligned}$ 注意 18. $f(x) \geq 0$ なら, $\int_a^b f(x) dx$ は $y = f(x)$ のグラフの $[a, b]$ 上の部分の面積そのものである. 定積分の定義から容易に次が分かる. 注意 19. $f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする.									
(1) $f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする. そのとき, $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$ (2) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, 但し $(a < c < b)$.									
8.2 定積分の第 1 基本定理									
$f(x), g(x)$ を閉区間 $[a, b]$ で連続な関数とする. $a \leq t \leq b$ をみたす任意の t に対して, $F(t) := \int_a^t f(x) dx$ とおく. $a < t + h < b$ なる十分小さな h に対し, 閉区間 $[t, t + h]$ の分割 : $\Delta_n : t = x_0 < x_1 < \dots < x_n = t + h$ を考える. そこで, $S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ とおく. 今, $\max_{t \leq x \leq t+h} f(x) = M(h), \quad \min_{t \leq x \leq t+h} f(x) = m(h)$ とおくと, $m(h) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq S_{\Delta_n} \leq M(h) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$ ここで, $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = (t + h) - t = h$ に注意すれば, $m(h) \cdot h \leq S_{\Delta_n} \leq M(h) \cdot h$ $\therefore m(h) \leq \frac{S_{\Delta_n}}{h} \leq M(h).$ を得る. そこで, $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n} = \int_t^{t+h} f(x) dx = F(t + h) - F(t)$ より, $m(h) \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}}{h} \leq M(h) \implies m(h) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx \leq M(h)$ を得る. $(**) \quad m(h) \leq \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_h^{t+h} f(x) dx \leq M(h)$ $\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} M(h) = f(t)$ なので, $(**)$ において $h \rightarrow 0$ とすれば $F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx = f(t)$ 即ち, $F'(t) = f(t)$. こうして, 積分学の第 1 基本定理 定理 8. 区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ を得る.									
学籍 番号		氏						評	
	No.	名						点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.18
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

9 定積分の計算

9.1 積分の第2基本定理

次に、閉区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

に対し、平均値の定理より

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

となる ξ_i ($x_{i-1} < \xi_i < x_i$) が存在する. この ξ_i を用いると,

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b) - f(a)) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という. そのとき,

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

と定義すれば、 $f(x) = F'(x)$ より次を得る.

定理 9.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b F'(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

これを積分の第2基本定理という.

積分の変数変換については

公式 5. (1) $x = \varphi(t)$ と変換すれば、 $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \therefore \quad dx = \varphi'(t) \, dt$ より,

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

(2)

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

但し、 $x = \varphi(\alpha)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (積分の変数変換)

証明. 定積分の場合について示す. $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする. $\{F(\varphi(t))\}' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ より,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt &= \int_\alpha^\beta \{F(\varphi(t))\}' \, dt \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

更に、 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より,

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]_a^b &:= f(b)g(b) - f(a)g(a) \\ &= \int_a^b \{f(x)g(x)\}' \, dx \\ &= \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \, dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx. \end{aligned}$$

このことから,

公式 6. (1)

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

(2)

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

を得る.

注意 20. $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) \\ &= -[F(x)]_b^a \\ &= -\int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

例題 23. (1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = [\log(x + \sqrt{x^2+1})]_0^1 = \log(1 + \sqrt{2})$

(2) $\int_0^1 \sin^{-1} x \, dx = [x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \, (a > 0) = [\sin^{-1} \frac{x}{a}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

(4) $I = \int \tan^2 x \, dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \, dx = \int (\tan x)' - 1 \, dx$
 $\therefore \quad I = \tan x - x + C.$

(5) $I = \int \sqrt{x^2+a} \, dx = \int (x)' \sqrt{x^2+a} \, dx$
 $= x\sqrt{x^2+a} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}} \, dx$
 $= x\sqrt{x^2+a} + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$
 $= x\sqrt{x^2+a} + a \log|x + \sqrt{x^2+a}| - I$
 $\therefore \quad I = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+a} + a \log|x + \sqrt{x^2+a}| \right)$

(5) $\int_1^e x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$
 $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

(6) $I_n = \int (\log x)^n \, dx = \int (x)' (\log x)^n \, dx$
 $= x(\log x)^n - \int (x)n(\log x)^{n-1} \frac{1}{x} \, dx$
 $= x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx = x(\log x)^n - nI_{n-1}.$

(7) $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx = \int_0^1 (e^x)' x^n \, dx$
 $= [x^n e^x]_0^1 - n \int x^{n-1} e^x \, dx = e - nI_{n-1}$
 $\therefore \quad I_n + nI_{n-1} = e$

(8) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \stackrel{x=\tan \theta}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^2} \, d\theta.$
 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \, d\theta = 2 \left[\frac{2\theta + \sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.19
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 24.

$$(1) \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} \, dx \stackrel{t=\sqrt{1-x}}{=} \int_1^0 (1-t^2)^2 t (-2t) \, dt$$
$$= 2 \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) \, dt = \frac{16}{105}.$$

$$(2) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \, dt \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{-1} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= - \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x^2} = - \left[\tan^{-1} x \right]_{-1}^0 = -\frac{\pi}{4}$$

$$(3) J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \stackrel{t=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n t (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) \cos^{n-1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \cos^{n-1} x \, dx$$
$$= \left[\sin x \cdot \cos^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^{n-2} (\cos x)' \, dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x \, dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$
$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$
$$= (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n$$
$$\therefore J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad J_1 = 1, \quad J_0 = \frac{\pi}{2}$$
$$J_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{3} \cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$$(4) a > 0 \text{ とする.}$$
$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int (a \cos t)(a \cos t) \, dt = a^2 \int \cos^2 t \, dt$$
$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t)$$
$$= \frac{a^2}{2} \left\{ t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right\} = \frac{a^2}{2} \left\{ \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right\}$$
$$\therefore I = \frac{a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + a^2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}}{2} = \frac{a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2}}{2}$$

$$(5) t = x + \sqrt{x^2 + a} \text{ とおくと, } dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} \right) dx$$
$$\therefore dx = \frac{\sqrt{x^2 + a}}{x + \sqrt{x^2 + a}} \, dt$$
$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx \stackrel{t=x+\sqrt{x^2+a}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a}}{x + \sqrt{x^2 + a}} \, dt$$
$$I = \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \, dt = \int \frac{1}{t} \, dt = \log t = \log(x + \sqrt{x^2 + a})$$
$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \, dx = \log(x + \sqrt{x^2 + a}) + C$$

9.2 練習問題 A

$$(1) I = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{4}} \, dx \stackrel{t=(1-x)^{\frac{1}{4}}}{=} \int_1^0 (1-t^4) \cdot t \cdot (-4t^3) \, dt$$
$$= 4 \int_0^1 (t^4 - t^8) \, dt = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{45}$$

$$(2) I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} \stackrel{x=t^2}{=} \int_0^1 \frac{2t}{t+1} \, dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) \, dt$$
$$= 2 \left[t - \log(t+1) \right]_0^1 = 2(1 - \log 2)$$

$$(3) I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^n}{x} \, dx = \left[\log x (\log x)^n \right]_1^e - n I_n = 1 - n I_n$$
$$\therefore (n+1) I_n = 1 \implies I_n = \frac{1}{n+1}$$

$$(4) I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin^{-1} x)' \sin^{-1} x \, dx$$
$$= \left[(\sin^{-1} x)^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - I.$$
$$\therefore 2I = \frac{\pi^2}{36} \quad \therefore I = \frac{\pi^2}{72}$$

$$(5) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos(m-n)x - \cos(m+n)x \} \, dx$$
$$= \begin{cases} \pi & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (0 < m, n \in \mathbb{Z}) \text{ 実際, } k > 0 \text{ を整数とす}$$

ると $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$ であることに注意.

$$(6) I_n = \int_1^e x^n \log x \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log x \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n \, dx$$
$$= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1} - 1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

$$(7) I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} \, dx$$
$$= \int_0^{2a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \, dx \stackrel{x-a=\sin t}{=} a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$
$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{\pi a^2}{2} \quad \because \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$(8) I = 2 \int_0^1 (3-x^2) \sqrt{1-x^2} \, dx \stackrel{x=\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - \sin^2 t) \cos^2 t \, dt$$
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = 4 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + 2 \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{8}$$

$$(9) I_n = \int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^n}{1+x^2} \, dx$$
$$= \int_0^1 (\tan^{-1} x)' (\tan^{-1} x)^n \, dx = \left[(\tan^{-1} x)^{n+1} \right]_0^1 - n I_n$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} - n I_n$$
$$\therefore (n+1) I_n = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} \quad \therefore I_n = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

$$(10) I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \, dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, dt$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見たい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.20
9.3 練習問題 B					
(1) $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log(1 + \tan t) dt$ とおく. そのとき, $f(\frac{\pi}{8}) = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \log(1 + \tan t) dt = 0$ である. 一方, $\begin{aligned} f'(x) &= \log\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - x\right)' - \log(1 + \tan x) \\ &= -\log\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) - \log(1 + \tan x) \\ &= -\log 2 \end{aligned}$ $\therefore f(x) = -(\log 2) \cdot x + C. f(\frac{\pi}{8}) = 0$ より $-\frac{\pi}{8} \cdot \log 2 + C = 0.$ $\therefore C = \frac{\pi}{8} \cdot \log 2$ 以上により, $f(x) = \left(\frac{\pi}{8} - x\right) \cdot \log 2 \quad \therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx = f(0) = \frac{\pi}{8} \log 2$					
(2) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + e^x} dx \stackrel{t=-x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(-t) \sin(-t)}{1 + e^{-t}} (-1) dt$ $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t \sin t}{1 + e^{-t}} dt \stackrel{x=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + e^{-x}} dx$ $2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + e^x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{1 + e^{-x}} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx$ $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x dx = 2 \cdot \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$ $\text{故に } I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$					
(3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx \stackrel{t=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t} (-dt).$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx$ $\therefore 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x + \sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \therefore I = \frac{\pi}{4}$					
(4) $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ について, 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ において, $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ より, $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$ また $1 < \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} < \frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1.$ 一方, $J_{2n} J_{2n+1} = \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore J_{2n} J_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \quad \therefore \pi = 2(2n+1) J_{2n} J_{2n+1}.$ $\sqrt{\pi} = \sqrt{2(2n+1)} J_{2n+1} \sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}} \text{ より,}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{2(2n+1)}{4n}} \sqrt{n} J_{2n+1} \sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{4n}}\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_{2n+1}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}}}$					
			$(\heartsuit) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_{2n}$ 実際, $J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1}$ より $\sqrt{n} J_{2n+1} < \sqrt{n} J_{2n} < \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{n-1} J_{2n-1}$ に注意すれば $(\heartsuit)$ は分かる. (5) $n \geq 2$ なる自然数 n に対し, 次の不等式を証明せよ. $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$k \geq x \geq k+1 \text{ に対し, } \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \text{ より,}$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \text{ を得る.}$$\therefore \frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$\therefore \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ (右側 2 つの項の計算より)}$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n \text{ (左側 2 つの項の計算より)}$こうして, $(\spadesuit) \quad \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$ 注意 21. $(\spadesuit)$ より, $1 < \frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} < 1 + \frac{1}{\log n}$$n \rightarrow \infty \text{ とすると,}$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n} = 1$実は, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = C \quad \text{: Euler の定数}$ (6) 次を示せ. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx. t = \frac{\pi}{2} - x$ と変換する. $\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))}{f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) + f(\cos(\frac{\pi}{2} - t))} (-dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x) + f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx = \frac{\pi}{4}.$os 特に, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$		
学籍 番号	No.	氏 名		評 点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.21
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

10 不定積分（原始関数）

$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよび、 $F(x) = \int f(x) dx$ と書く．従って、 $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$ を得る．
 $\int f(x) dx$ を $f(x)$ の不定積分とよぶ．以下の公式は両辺を微分すれば容易に分かる．

- (1) $\int \{af(x) + bg(x)\} dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$
- (2) $\int f(x) dx \stackrel{x=g(t)}{=} \int f(g(t))g'(t) dt.$
- (3) $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$
- (3') $\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$

10.1 原始関数の例

- ($a \neq -1, b \neq 0, d > 0$ かつ C は定数.)
- (1) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
- (2) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$
- (3) $\int e^{bx} dx = \frac{1}{b}e^{bx} + C$
- (4) $\int \sin bx dx = -\frac{1}{b} \cos bx + C$
- (5) $\int \cos bx dx = \frac{1}{b} \sin bx + C$
- (6) $\int \frac{dx}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{d} + C$
- (7) $\int \frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} + C$
- (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \log(x + \sqrt{x^2 + d^2}) + C$
- (9) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \ (a > 0) = \frac{1}{2} \left(a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) + C$
- (10) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$
 $\therefore I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2a^2n} I_n + \frac{1}{2a^2n} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} \ (n \geq 1)$

11 積分の計算テクニック

11.1 分数関数の積分法（部分分数分解）

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x), Q(x)$ は多項式) は $\frac{1}{(x-a)^m}$ ($m \geq 1$), $\frac{\beta x + \gamma}{((x-b)^2 + c^2)^n}$ ($n \geq 1, c \neq 0$) の形の分数関数の和に分解できる．

- 例題 25. (1)
- $$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$
- (2)
- $$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

11.1.1 分数関数の積分への帰着

$R(t)$ は t の分数関数、 $R(u, v)$ は u, v の分数関数とする．

- (1)
- $$\int R(e^x) dx \stackrel{t=e^x}{=} \int \frac{R(t)}{t} dt$$
- (2)
- $$\int R(\sin x, \cos x) dx \stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt$$

ここに、(1) の場合、 $t = e^x (\Leftrightarrow x = \log t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$
(2) の場合、 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと、
 $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ と t の関数として表わされるが、最終的には x の関数に戻す

- 例題 26. (1) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx \stackrel{x=\log t}{=} \int \frac{1}{t(t+1)} dt$
 $= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt$
 $= \log t - \log(t+1) = \log e^x (= x) - \log(e^x + 1) + C$
- (2) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + (1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$
 $= \int dt = t + C = \tan \frac{x}{2} + C$
- (3) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$
 $= \log |t| + C = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$

11.2 無理関数の積分法

- $R(u, v)$ は u, v の分数関数
- (1) $ad - bc \neq 0, n \geq 2$ とする．
- $$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \stackrel{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=} \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt,$$
- ($\because$) $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} \quad \therefore dx = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$
- (2) $a > 0$ とする． $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$
 $= \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}, t - \sqrt{a} \cdot \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}\right) dt$
 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$ とおく
そのとき、 $x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} \quad \therefore dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$
- (3) $a < 0, b^2 - 4ac > 0$ とする．
- $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R\left(x, (x - \alpha)\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}\right) dx.$$
- 但し、 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの実数解 $\alpha < \beta$ とする．
 $\alpha < x < \beta$ に対し、
 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}.$
 $t = \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$ とおくと、 $-a\alpha + a\beta = a\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ より、(1) の $n = 2$ の場合が適用できる．

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.22
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 27.

(1) $\int x(1-x)^{\frac{1}{4}} dx \stackrel{t=(1-x)^{1/4}}{=} = 4 \int (t^8 - t^4) dt$
 $= 4 \left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^5}{5} \right) + C = -\frac{4}{45}(5x+4)(1-x)^{5/4} + C$

(2) $\int \sqrt{x^2+A} dx \ (A>0) \stackrel{\sqrt{x^2+A}=t-x}{=} \int \frac{1}{4} \frac{t^4+2At^2+A^2}{t^3} dt$
 $= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{A^2}{2t^2} + 2A \log|t| \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+A} + A \log \left| x + \sqrt{x^2+A} \right| \right) + C$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{dt}{t}$
 $= \log|t| + C = \log \left| x + \sqrt{x^2+A} \right| + C, \quad (\sqrt{x^2+A} = t-x) \text{ とおく.}$

(4) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$
 $(\because \sqrt{x^2+1} = t-x \implies \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{dt}{t}, \ x = \frac{t^2-1}{2t})$

(5) $I = \int \frac{x}{\sqrt{-6+5x-x^2}} dx = 5 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{3-x}} - \sqrt{-6+5x-x^2} + C$
 $\left[\sqrt{-6+5x-x^2} = (3-x)\sqrt{\frac{x-2}{3-x}}, \quad t = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}} \right].$
 $I = 6 \int \frac{dt}{t^2+1} - 2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 5 \int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} + C$
 $= 5 \tan^{-1} t - \frac{t}{t^2+1} + C \quad \left[(3-x)\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} = \frac{t}{t^2+1} \right] \text{ に注意!}$

12 広義積分

$f(x)$ は (a, b) で連続であるが, 端点 $x = a, b$ では必ずしも連続とは限らないとする. その時, $\epsilon > 0$ (十分小さい) とする. 積分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b+\epsilon} f(x) dx$$

が収束 (有限確定値) するとき, $f(x)$ は (a, b) で**広義積分可能**という. 同様に, $f(x)$ が $[a, \infty)$ で連続とする. そのとき, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ が収束するとき, $f(x)$ は $[a, \infty)$ で**広義積分可能**という.

例題 28.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-a} dx \ (a \neq 1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^{-a} dx \\ &= \left[\frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_{\epsilon}^1 \\ &= \frac{1}{1-a} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{1-a}}{1-a} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{if } a < 1 \\ \infty & \text{if } a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

13 曲線の長さ

関数 $g(t), h(t)$ を閉区間 $[\alpha, \beta]$ で $\mathcal{C}^1$ -級とし, 曲線 C は $x = g(t), h(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) で表される曲線とする.

$\Delta: \alpha = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n \beta$ を $[\alpha, \beta]$ の分割とし, 各 t_i に対応する C 上の点を $P(t_i) = (g(t_i), h(t_i))$ とする.

$$L(C) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(g(t_i) - g(t_{i-1}))^2 + (h(t_i) - h(t_{i-1}))^2}$$

が収束するとき, その極限値 $L(C)$ を曲線 C の長さという. 曲線 $C: x = g(t), y = h(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で $\mathcal{C}^1$ -級とする. このとき, 曲線 C の長さは

定理 10. $L(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dx$ で与えられる.

実際, 平均値の定理より $t_{i-1} < \xi_i, \eta_i < t_i$ が存在して,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sqrt{(\{g(t_i) - g(t_{i-1})\}^2 + \{h(t_i) - h(t_{i-1})\}^2)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{g'(\xi_i)^2 + h'(\eta_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$
$$L(C) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{g'(\xi_i)^2 + h'(\eta_i)^2} (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

実際, 平均値の定理より $x_{i-1} < \xi_i, \eta_i < x_i$ が存在するので,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sqrt{(\{g(t_i) - g(t_{i-1})\}^2 + \{h(t_i) - h(t_{i-1})\}^2)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{g'(\xi_i)^2 + h'(\eta_i)^2} (t_i - t_{i-1}) \stackrel{|\Delta| \rightarrow 0}{\longrightarrow} L(C) \end{aligned}$$

$\therefore L(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dx$

$\Delta x = g(t_i) - g(t_{i-1}), \quad \Delta y = h(t_i) - h(t_{i-1})$ とく. $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ は曲線の微小部分の長さで $L(C)$ はその総和と見做すことができる.

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.23
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 29.

(1) 放物線 $C: y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) のとき,
$$L(C) = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx \stackrel{t=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1+t^2} dt$$
$$= \frac{1}{4} \left[t\sqrt{1+t^2} + \log \left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5}) \right)$$

(2) 曲線 $C: x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$; ($0 \leq t \leq \pi$) について,
$$L(C) = \int_0^\pi \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = \int_0^\pi at dx = \frac{a\pi^2}{2}$$

(3) $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ について,
 $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) と媒介変数表示すれば,
 $dx = -4 \cos^3 t (\sin t) dt, \quad dy = 4 \sin^3 t (\cos t) dt$
$$L(C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^4 t + \cos^4 t)} dt.$$
$$\therefore L(C) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + \cos^2 2t} dt$$
$$\stackrel{u=\cos 2t}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{-1} \sqrt{1+u^2} (-du) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$$

(4) 曲線 $C: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$; ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) の長さについて,
$$L(C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt$$
$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3}{4} [-\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

極座標表示 $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) に対しては $x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \sin \theta$. とおくと $\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$. よって

例題 30.

(1) 曲線 (カージオイド) $r = a(1 + \cos \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) の長さは
$$L = 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a$$

(2) 曲線 $r = a \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の長さは, $L = \int_0^\pi \sqrt{a^2} dt = a\pi$

(3) アルキメデス螺旋 $r = a\theta$ ($0 \leq \theta \leq \alpha$) の長さは,
$$L = \int_0^\alpha \sqrt{a^2(1 + \theta^2)} dt = \frac{a}{2} \left(\alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} + \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}) \right)$$

14 曲線で囲まれる部分の面積

区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x) \geq 0$ のグラフ $y = f(x)$ と x -軸 および直線 $x = a$ および $x = b$ で囲まれた部分の面積は

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

であった.

例題 31.

(1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と x -軸, y -軸で囲まれた部分の面積は,
 $y = (1 - \sqrt{x})^2$ ($0 \leq x \leq 1$) なので,
$$S = \int_0^1 y dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \frac{1}{6}$$

(2) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) と x -軸, y -軸で囲まれた部分の面積は

$$S = \int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} (\cos t \sin t + \cos^2 t) dt$$
$$= \frac{e^\pi - 1}{4}$$

14.1 極方程式で表される図形の面積

$r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) および半直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれる部分の面積はこの部分が十分小さな扇形で近似される事を用いて, $\Delta: \alpha < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$ に対し,

$$S = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(\xi_i)^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta$$

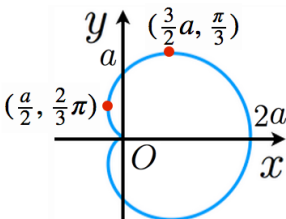
例題 32.

(1) $r = a(1 + \cos \theta)$ が囲む部分の面積は
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$
$$= \frac{3}{2} \pi a^2$$

(2) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ によって囲まれる部分の面積は
$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta$$
$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$$
$$= 2a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

(3) 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ で囲まれる部分の面積は $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ とおく. $0 \leq x \leq a$ より, $t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ に注意すれば,
$$S = 4 \int_0^a y dx = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt$$
$$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = 12a^2 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= \frac{3}{8} \pi a^2$$

学籍 番号		氏		評 点	
	No.	名			

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見て欲しい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.24
(4) カージオイド（曲線）$r := r(t) = a(1 + \cos t)$ で囲まれる図形の面積を求める。 この曲線は $0 \leq t \leq \pi$ に対しては $\cos t$ は単調減少なので r も減少して 0 になる．$r(0) = 2a$, $r(\pi) = 0$．また，$\cos(-t) = \cos t$ なのでこの曲線は直交座標に関して x 軸に関して対称な図形である．よって，囲まれる面積 S は $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 dt = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t)^2 dt$ $\therefore S = a^2 \int_0^{\pi} \left(2 \cos^2 \frac{t}{2}\right)^2 dt = 4a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{t}{2} dt = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt$ $S = 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{3}{2} \pi a^2 = \frac{3}{2} \pi a^2.$			例題 33. (1) $\frac{dy}{dx} = xy$. この時, $\frac{dy}{y} = x dx \quad \therefore \log y = \int \frac{dy}{y} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1$ $y = A e^{\frac{x^2}{2}}, \quad (A = e^{C_1})$ (2) $\frac{dy}{dx} = -x^3 y^2$. この時, $\frac{-dy}{y^2} = x^3 dx \quad \therefore \frac{1}{y} = \int \frac{-dy}{y^2} = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1$ $y = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right)^{-1}$ (3) $\frac{dy}{dx} = x e^{-y^2}$ については, $\int \frac{dy}{e^{-y^2}} = \int e^{y^2} dy$ が従う．しかし, $\int e^{y^2} dx$ を y の関数として具体的に求めることは不可能である．		
 注：座標は(r, θ)					
15 微分方程式					
15.1 1階微分方程式					
定義 8. $y = y(x)$ を x の微分可能な関数で $y' = \frac{dy}{dx}$ とおく． $y' = f(x, y)$ の形をした方程式を 1 階の微分方程式という．但し, $f(x, y)$ は 2 変数 x, y の連続関数（微分可能な関数の場合が多い）． 例. (1) $y' = x e^{-y^2}$ (2) $y' = x^3 y^2$ (3) $y' = y^2 + x^2 + 1$ (4) $y' = (x + y)^2$ 注意 22. 一階の微分方程式の解を求める一般的な方法はないが $f(x, y)$ が特別な形をしている場合は解を求めることができる． 定義 9 (変数分離型). $y' = P(x)Q(y) \iff \frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$ の形の微分方程式を変数分離型の微分方程式という． 注意 23. 変数分離型の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$ は $\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx$ と表され, 両辺を積分して $\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) dx$ を得る．左辺は y の関数であり, 右辺は x の関数である．しかし, 一般に, $\int \frac{dy}{Q(y)}$ を具体的に y の関数として表すのは不可能に近いが, $Q(y)$ が特別な関数のときは可能な場合がある．					
15.2 1階線形微分方程式					
定義 10. $y' + P(x)y + Q(x) = 0 \cdots \cdots (*)$ 但し, $P(x), Q(x)$ は連続関数とする．この形の微分方程式を 1 階線形微分方程式という． この 1 階線形微分方程式はの解の公式は存在する．実際, $(*)$ の両辺に $e^{\int P(x) dx}$ を掛けると $e^{\int P(x) dx} y' + P(x) e^{\int P(x) dx} y + Q(x) e^{\int P(x) dx} = 0$ $\therefore \left(e^{\int P(x) dx} \cdot y\right)' = -Q(x) e^{\int P(x) dx}$ $\therefore e^{\int P(x) dx} \cdot y = - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + A$ $\therefore y = - \left(e^{-\int P(x) dx}\right) \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + A\right)$					
定理 11. $y' + P(x)y + Q(x) = 0 \cdots \cdots (*)$ の解は, $\varphi(x) = \int P(x) dx$ とおけば, $y = y(x) = -e^{-\varphi(x)} \left(\int Q(x) \cdot e^{\varphi(x)} + A\right) \quad (A \text{ は定数})$ 系. 特に, $P(x) = a (\neq 0)$, $Q(x) = b$ (定数関数) ならば, このとき, $y' + ay + b = 0$ を得る．この形の微分方程式を定係数 1 階線形微分方程式という．この解は, $\varphi(x) = \int a dx = ax$ ゆえ, 上記の公式から $y = e^{-ax} \left(\int b e^{ax} dx + A\right) = e^{-ax} \left(\frac{b}{a} e^{ax} + A\right) = \frac{b}{a} + A e^{-ax}$ $\therefore y = \frac{b}{a} + A e^{-ax}$					
課題. (1) $y' + 2y + 4 = 0$ の解は $y = \frac{4}{2} + A e^{-2x} = 2 + A e^{-2x}$. (2) $2y' + 3y + 1 = 0$ の解は $y = \frac{1}{3} + A e^{-\frac{3}{2}x}$. (3) $3y' + 2y = 0$ の解は $y = A e^{-\frac{2}{3}x}$.					
学籍 番号		氏 名		評 点	
No.					

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.25
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

15.3 定係数2階線形微分方程式

(♠) $y''+ay'+by=f(x)$ (但し, a, b は定数, $f(x)$ は連続関数とする)
を定係数2階線形微分方程式という.

15.3.1 (♠) の解法

1. (♠) を以下のように変形する：

$(y'-\lambda_1y)'-\lambda_2(y'-\lambda_1y)=f(x)$ (1)

$(y'-\lambda_2y)'-\lambda_1(y'-\lambda_2y)=f(x)$ (2)

これは、以下の2階線形微分方程式と同じであるから (♠) と比較して

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2=f(x)$$
$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=-a \\ \lambda_1\cdot\lambda_2=b \end{cases}$$

を得る．解と係数の関係から λ_1, λ_2 は2次方程式（固有方程式という）

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

根（又は解）である．

2. (1) の両辺に $e^{-\lambda_1x}$ を (2) の両辺に $e^{-\lambda_2x}$ を掛けて次を得る．

$\left\{e^{-\lambda_2x}(y'-\lambda_1y)\right\}'=e^{-\lambda_2x}f(x)$ (3)

$\left\{e^{-\lambda_1x}(y'-\lambda_2y)\right\}'=e^{-\lambda_1x}f(x)$ (4)

$$e^{-\lambda_2x}(y'-\lambda_1y)=\int e^{-\lambda_2x}f(x)dx$$
 (5)

$$e^{-\lambda_1x}(y'-\lambda_2y)=\int e^{-\lambda_1x}f(x)dx$$
 (6)

$$y'-\lambda_1y=e^{\lambda_2x}\int e^{-\lambda_2x}f(x)dx$$
 (7)

$$y'-\lambda_2y=e^{\lambda_1x}\int e^{-\lambda_1x}f(x)dx$$
 (8)

3. $\lambda_1\neq\lambda_2$, 即ち, 固有方程式の判別式 $D=a^2-4b\neq 0$ ($D>0$ なら実数解, $D<0$ なら虚数解) のとき, (7) – (8) により

$$(\lambda_2-\lambda_1)y=e^{\lambda_2x}\int e^{-\lambda_2x}f(x)dx-e^{\lambda_1x}\int e^{-\lambda_1x}f(x)dx$$
$$\therefore y=\frac{e^{\lambda_2x}\cdot\int e^{-\lambda_2x}f(x)dx-e^{\lambda_1x}\cdot\int e^{-\lambda_1x}f(x)dx}{\lambda_2-\lambda_1}$$
 (9)

4. $\lambda_1=\lambda_2(=\lambda)$, 即ち, 固有方程式の判別式 $D=a^2-4b=0$ (重解又は重根) のとき, (5) 又は (6) から

$$e^{-\lambda x}(y'-\lambda y)=\int e^{-\lambda x}f(x)dx$$
$$\left\{e^{-\lambda x}y\right\}'=\int e^{-\lambda x}f(x)dx$$
$$e^{-\lambda x}y=\int\left(\int e^{-\lambda x}f(x)dx\right)dx$$
$$\therefore y=e^{\lambda x}\cdot\int\left(\int e^{-\lambda x}f(x)dx\right)dx$$
 (10)

15.3.2 $f(x)=0$ の場合

$$\int e^{-\lambda_2x}f(x)dx=\int 0dx=C_2,\quad \int e^{-\lambda_1x}f(x)dx=\int 0dx=C_1$$

よって $D\neq 0$ の時は (9) より,

$$\therefore y=\frac{C_2e^{\lambda_2x}-C_1e^{\lambda_1x}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

一方, $D=0$ の時は (10) より,

$$y=e^{\lambda x}\int\left(\int 0dx\right)dx=\int C_1dx=e^{\lambda x}(C_1x+C_2)$$

$$\therefore y=e^{\lambda x}(C_1x+C_2)$$

15.3.3 固有方程式が虚数解を持つときの取り扱い

固有方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ が虚数解 λ を持てばもう一つの虚数解は λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ である．今,

$$\lambda=\alpha+\beta i,\quad \overline{\lambda}=\alpha-\beta i\quad (i=\sqrt{-1}),\quad \text{但し } \alpha, \beta \text{ は実数}$$

とおく．そのとき, $2\alpha=-a$, $\alpha^2+\beta^2=b$.

公式 7 (オイラーの公式).

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\quad \therefore \underline{e^{\alpha+\beta i}}=e^\alpha\cdot e^{\beta i}=e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)$$

従って, この場合, $\lambda_2=\lambda=\alpha+\beta i$, $\lambda_1=\overline{\lambda}=\alpha-\beta i$ とおくと,

$$y=\frac{C_2e^{\lambda x}-C_1e^{\overline{\lambda}x}}{\lambda-\overline{\lambda}}$$

$y=y(x)$ が実数値関数ならば (例えば, $y(0)$, $y'(0)$ が実数の場合)

$$y=\frac{C_2e^{\lambda x}-C_1e^{\overline{\lambda}x}}{\lambda-\overline{\lambda}}=\overline{y}=\frac{\overline{C_2}e^{\overline{\lambda}x}-\overline{C_1}e^{\lambda x}}{\overline{\lambda}-\lambda}=\frac{\overline{C_1}e^{\lambda x}-\overline{C_2}e^{\overline{\lambda}x}}{\lambda-\overline{\lambda}}$$

$\therefore C_1=\overline{C_2}$. そこで, $C=C_2$ とおけば

$$y=\frac{C e^{\lambda x}-\overline{C} e^{\overline{\lambda}x}}{\lambda-\overline{\lambda}}=\frac{\text{Im}(C e^{\lambda x})}{\text{Im } \lambda}$$
 (11)

特に, $C=A+Bi$, $\lambda=\alpha+\beta i$ (A, B, α, β は実数) とおくと

$$y=e^{\alpha x}\frac{A\sin\beta x+B\cos\beta x}{\beta}=\underline{e^{\alpha x}(A_1\sin\beta x+B_1\cos\beta x)}$$

但し, $A_1=\frac{A}{\beta}$, $B_1=\frac{B}{\beta}$ とおいた.

例題 34. (1) $y''+\omega^2y=0$ ($\omega>0$), $y(0)=1$, $y'(0)=\omega$ の解は

$$y=A_1\sin\omega x+B_1\cos\omega x$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=\omega \text{ より,}$$

$$y=\sin\omega x+\cos\omega x$$

(2) $y''-2y'+2y=0$ $y(0)=1$, $y'(0)=1$ の解は固有方程式の解が $\lambda=1\pm i$ ゆえ, 解は $y=e^x(A\sin x+B\cos x)$. $y(0)=1$ より $B=1$. $y'(0)=B+A=2 \therefore A=1$.

$$y=e^x(\sin x+\cos x)$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.26			
例題 35. $y'' - y = e^x$ の解は, $y'' - y' + y' - y = e^x$ と変形すると, $\{e^x (y' - y)\}' = e^{2x} \quad \therefore e^x (y' - y) = \int e^{2x} dx + c_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1$ $(y' - y) = e^{-x} \left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1 \right)$ 両辺に e^{-x} を掛けて $e^{-x} (y' - y) = e^{-2x} \left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1 \right) = \frac{1}{2} + c_1 e^{-2x}$ $\therefore (e^{-x} y)' = \frac{1}{2} + c_1 e^{-2x} \therefore e^{-x} y = \int \left(\frac{1}{2} + c_1 e^{-2x} \right) dx$ $\therefore e^{-x} y = \frac{1}{2}x - \frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2 \quad \therefore y = \frac{1}{2}xe^x - \frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x$ よって, 最終的に解は $y = \left(\frac{1}{2}x + C_2 \right) e^x + C_1 e^{-x} \quad (C_1 = -\frac{c_1}{2}, C_2 = c_2 \text{ とおく})$ □			$\therefore y = \frac{1}{2i\omega} \left\{ \frac{2i\omega}{(1-i\omega)(1+i\omega)} e^x + c_1 e^{i\omega x} - c_2 e^{-i\omega x} \right\}$ $\therefore y = \frac{e^x}{1+\omega^2} + \frac{\frac{c_1}{\omega} e^{i\omega x} - \frac{\overline{c_1}}{\omega} e^{-i\omega x}}{2i}$ こうして, $y = \frac{e^x}{1+\omega^2} + \text{Im}(c \cdot e^{i\omega x}), \quad (c := \frac{c_1}{\omega} = C_2 + C_1 i)$ $y = \frac{e^x}{1+\omega^2} + C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ 補足説明. 15.3.3-(11) についての補足. 今, $y(0), y'(0)$ は実数とする. そのとき, $y(x) = \frac{C_2 e^{\lambda x} - C_1 e^{\bar{\lambda} x}}{\lambda - \bar{\lambda}}, \quad y'(x) = \frac{C_2 \lambda e^{\lambda x} - C_1 \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} x}}{\lambda - \bar{\lambda}}$ より, $y(0) = \frac{C_2 - C_1}{\lambda - \bar{\lambda}}, \quad y'(0) = \frac{C_2 \lambda - C_1 \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}}$ $y'(0) = \frac{C_2 \lambda - C_1 \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{C_2(\lambda - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}(C_2 - C_1)}{\lambda - \bar{\lambda}} = C_2 + \bar{\lambda} y(0)$ $= \frac{C_2 \lambda - C_1 \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{(C_2 - C_1)\lambda + C_1(\lambda - \bar{\lambda})}{\lambda - \bar{\lambda}} = C_1 + \lambda y(0)$ $y(0), y'(0)$ は実数より, $\overline{y(0)} = y(0), \overline{y'(0)} = y'(0)$ このことから, $C_1 + \lambda y(0) = y'(0) = \overline{y'(0)} = \overline{(C_2 + \bar{\lambda} y(0))} = \overline{C_2} + \overline{\bar{\lambda} y(0)} = \overline{C_2} + \lambda y(0)$ $\therefore C_1 + \lambda y(0) = \overline{C_2} + \lambda y(0) \quad \therefore C_1 = \overline{C_2}$ こうして, $C = C_2$ とおくと, $C_1 = \overline{C}$ であり, 結果的に $y(x) = \frac{C e^{\lambda x} - \overline{C} e^{\bar{\lambda} x}}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{\text{Im}(C \cdot e^{\lambda x})}{\text{Im} \lambda}$ $\lambda = \alpha + \beta i, C = A + Bi$ とおくと, $y = \frac{\text{Im}(C \cdot e^{\lambda x})}{\text{Im} \lambda} = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} \text{Im} \{ (A + Bi) e^{i\beta x} \} = \frac{e^{\alpha x}}{\beta} (A \sin \beta x + B \cos \beta x)$ よって, $q = \frac{A}{\beta}, \quad p = \frac{B}{\beta}$ とおけば. $\underline{y = y(x) = e^{\alpha x} (p \cos \beta x + q \sin \beta x)}$ 但し, $p = y(0), \quad q = \frac{y'(0) - \alpha y(0)}{\beta} \quad (\lambda = \alpha + \beta i)$					
			学籍 番号		氏 名		評 点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見たい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.27

16 練習問題（積分）

(1.) 不定形の極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} x \log x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow +0} x^x &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \log x} \\ &= e^{\left(\lim_{x \rightarrow +0} x \log x\right)} = e^0 = 1\end{aligned}$$

(2) 関数 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\right)' &= \frac{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \sin x \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(1 + \sin^2 x) - \sin x \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}} \\ &= \frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)\sqrt{1 + \sin^2 x}}\end{aligned}$$

(3) $y = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ を微分せよ.

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ とおくと,}$$
$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{\sqrt{1 + x^2} - x \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \\ \sqrt{1 - h^2(x)} &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ (\sin^{-1} h(x))' &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - h^2(x)}} \\ &= \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{1}{(1 + x^2)^2}\end{aligned}$$

(4) 対数微分法を用いて $y = \sqrt{\frac{(1 - x)(2x^2 + 5)}{(x - 2)^3}}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\log y &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{(1 - x)(2x^2 + 5)}{(x - 2)^3} \right| \\ &= \frac{1}{2} \{ \log |1 - x| + \log |2x^2 + 5| \} - \frac{3}{2} \log |x - 2| \\ \therefore \frac{y'}{y} &= \left\{ \frac{1}{x - 1} + \frac{4x}{2x^2 + 5} - \frac{3}{x - 2} \right\} \\ \therefore y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - x)(2x^2 + 5)}{(x - 2)^3}} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{4x}{2x^2 + 5} - \frac{3}{x - 2} \right)\end{aligned}$$

(5) $y = \tan^{-1} x$ は $(1 + x^2)y' = 1$ を満たす事を示し, 漸化式

$$(\spadesuit) \quad (1 + x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n - 1)y^{(n-1)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ事を示せ.

数学的帰納法で示す. まず, $(1 + x^2)y' = 1$ の両辺を x で微分して, $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$. 故に $n = 1$ の時 $(\spadesuit)$ が成立する. $n = k$ のとき, $(\spadesuit)$ が成り立つと仮定する. そのとき,

$$(\clubsuit) \quad (1 + x^2)y^{(k+1)} + 2kxy^{(k)} + k(k - 1)y^{(k-1)} = 0$$

が成立していると仮定する. この $(\clubsuit)$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}(1 + x^2)y^{(k+2)} + 2xy^{(k+1)} + 2ky^{(k)} + 2kxy^{(k+1)} + k(k - 1)y^{(k)} \\ = (1 + x^2)y^{(k+2)} + 2(k + 1)xy^{(k+1)} + \{2k + k(k - 1)\}y^{(k)} = 0\end{aligned}$$

$$(1 + x^2)y^{(k+2)} + 2(k + 1)xy^{(k+1)} + k(k + 1)y^{(k)} = 0$$

これは $n = k + 1$ の時も $(\spadesuit)$ が成り立つ事を示している. よって, 全ての自然数 n に対して $(\spadesuit)$ は成立する.

(6) $\log(1 + \sin x)$ のマクローリン展開の x^3 の項までを求めよ.

$$f(x) = \log(1 + \sin x) \text{ とおく. } f(0) = 0.$$
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\cos x}{1 + \sin x} \longrightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{(1 + \sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{1 + \sin x} \longrightarrow f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \\ &\longrightarrow f^{(3)}(0) = 1\end{aligned}$$
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

より,

$$\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

(7) 不定積分 $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3}$ を求めよ.

$$t = \tan \frac{x}{2} \implies dx = \frac{2dt}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$
$$\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} + 3} \\ &= \int \frac{2dt}{(t + 1)^2 + 2^2} = \tan^{-1} \frac{t + 1}{2} + C \\ &= \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\tan \frac{x}{2} + 1 \right) \right\} + C\end{aligned}$$

注意 24. $|a| \neq 1$ のとき,

$$\int \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \tan^{-1} \left(\frac{1 + a}{1 - a} \tan \frac{x}{2} \right)$$

が成立する. ($t = \tan \frac{x}{2}$ と変換する).

学籍 番号		氏 名		評 点
	No.			

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.28
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

(8) 不定積分 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ を求めよ. $t = \sqrt[6]{x}$ とおくと, $x = t^6 \therefore dx = 6t^5 dt$. $\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{t^3}{1+t^2} (6t^5) dt = 6 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt \\ &= 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \tan^{-1} t \right) \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \tan^{-1} \sqrt[6]{x} \right) \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \sqrt[6]{x} + \tan^{-1} \sqrt[6]{x} \right)\end{aligned}$ 積分定数は省略. (9) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ を求めよ. $t = \tan^{-1} x$ とくと, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$. $\int \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$ $\therefore \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{1}{2} [t^2]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$ (10) 等角螺旋 $r = a^\theta$ ($-\infty < \theta \leq 0$; $a > 1$) の長さを求めよ. $\begin{aligned}L &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{(\log a)^2 (a^\theta)^2 + (a^\theta)^2} d\theta \\ &= \int_{-\infty}^0 a^\theta \cdot \sqrt{(\log a)^2 + 1} d\theta = \sqrt{1 + (\log a)^2} \int_{-\infty}^0 a^\theta d\theta \\ &= \sqrt{1 + (\log a)^2} \cdot \left[\frac{a^\theta}{\log a} \right]_{-\infty}^0 = \frac{\sqrt{1 + (\log a)^2}}{\log a}\end{aligned}$ 16.1 基本問題 (1) $y = 2^{\log x}$ のとき, $\log y = (\log 2) \cdot \log x$. $\therefore \frac{y'}{y} = \frac{\log 2}{x}$ $\therefore y' = \frac{\log 2}{x} 2^{\log x}$ (2) $y = \sin^{-1}(x-1) + \cos^{-1} 2x$ のとき, $y' = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \frac{2}{1-4x^2}$. また, $y = e^{\tan^{-1} x}$ のとき, $y' = \frac{1}{1+x^2} e^{\tan^{-1} x}$ (3) $y = e^{-x} \cos x \rightarrow y' = -e^{-x}(\cos x + \sin x) \rightarrow y'' = 2e^{-x} \sin x \rightarrow y^{(3)} = 2e^{-x}(-\sin x + \cos x) \rightarrow y^{(4)} = -4e^{-x} \cos x$ (4) $f(x) = (x-a)\sqrt{b-x}$ ($a < b$) $\rightarrow f(a) = f(b) = 0 \rightarrow c = \frac{a+2b}{3}$ とおくと, $a < c < b$ かつ $f'(c) = 0$ (ロルの定理)	(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1) - x}{x \log(x+1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(x+1) \log(x+1) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\log(x+1) + 2} = -\frac{1}{2}$ (ロピタルの定理) (6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x = 1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \sin x \right)$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)$ $= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \cdot \cos t \right) = 1$ (7) $\sqrt{e} \sim 1.649$ (少数第3位四捨五入) $e^{\frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\theta^2 + \frac{1}{16}\theta^3 - \frac{1}{384}\theta^4 e^{\frac{\theta x}{2}} \therefore \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + R_5 = 1.64843 + R_5$. $0 < \theta < 1, 2 < e < 3$ より $\sqrt{2} < e^{\frac{\theta}{2}} < \sqrt{3}$. よって $\frac{\sqrt{2}}{384} = 0.00036 < R_5 = \frac{1}{384} < e^{\frac{\theta}{2}} < 0.00045 < \frac{\sqrt{3}}{384}$ $\therefore \sqrt{e} \sim 1.649$ (8) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - (R_4 = \frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}})$ $\therefore \sqrt{1.1} = 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} + \frac{1}{16000} - R_4 = 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.0000625 - R_4 = 1.0488125 - R_4 \sim 1.049$. (9) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ なら, $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} \therefore f(-1) = -2$ (極大値). $f(1) = 2$ (極小値). $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ なら, $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ $\therefore f(-1) = -1$ (極小値) $f(1) = 1$ (極大値) (10) $\begin{cases} I = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} J \\ J = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} I \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \\ J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \end{cases}$ (11) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \log x-1 + C$. 実際, $\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$ に注意. (12) $\begin{aligned}I &= \int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{4} \int \frac{(x-1)^2}{((x-1)^2+4)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8} \int (x-1) \left\{ \frac{1}{(x-1)^2+4} \right\}' dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8} \frac{(x-1)}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{8} \frac{(x-1)}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5} + \tan^{-1} \frac{x-1}{2} \right) + C\end{aligned}$
--	--

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.29
(13) $I = \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 1} = \log \sqrt{\left \frac{\tan(\frac{x}{2}) + 1}{\tan(\frac{x}{2}) - 3} \right }$ $t = \tan \frac{x}{2}$ とおく. $dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $I = -2 \int \frac{dt}{(t-3)(t+1)} = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+1} \right) dt$ (14) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2-2x-5}-x}{\sqrt{5}} \right) + C$ $\therefore t = \sqrt{x^2-2x-5}-x$ とおく. $x = -\frac{t^2+5}{2(1+t)}, dx = -\frac{t^2+2t-5}{2(1+t)^2}$ $\sqrt{x^2-2x-5} = t+x = \frac{t^2+2t-5}{2(1+t)}$ $\therefore I = \int \frac{-2(1+t)}{t^2+5} \cdot \frac{2(1+t)}{t^2+2t-5} \cdot \frac{t^2+2t-5}{-2(1+t)^2} dt$ $= 2 \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{5}}$ (15) $\frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} f(t) dt = 2xf(x^2) - 2f(2x).$ $\therefore F(t) = \int f(t) dt$ とおく. $\int_{2x}^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(2x)$ $\therefore \{F(x^2)\}' = f(x^2) \cdot (2x) = 2xf(x^2)$ (16) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$ $\therefore t = \tan \frac{x}{2}$ と置く. $dx = \frac{2dt}{1+t^2} \ (0 \leq t \leq 1). \ 2+\cos x = 2+\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{3+t^2}{1+t^2}$ $I = \int_0^1 \frac{2}{t^2+3} dt = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_0^1$ $= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (17) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{16}.$ 実際, $x = \sin t$ とおく. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$ $= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$ $= \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 u du = \frac{1}{16} \int_0^{\pi} (1-\cos 2u) du$ $= \frac{\pi}{16}$ (18) $y = 2^x$ と $y = x+1$ で囲まれる部分の面積 $S = \frac{3}{2} - \frac{1}{\log 2}$ $\therefore S = \int_0^1 (x+1-2^x) dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1.$			(18) $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2} \ (a > 0)$ と半直線 $\theta = 0, \ \theta = \alpha \ (0 < \alpha < \pi)$ で囲まれる部分の面積 $S = a^2 \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right)$ $S = \int_0^\alpha \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^\alpha \sec^4 \frac{\theta}{2} d\theta$ $= a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sec^4 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1+\tan^2 t)^2 dt$ $= a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1+\tan^2 t)(\tan t)' dt$ $= a^2 [(1+\tan^2 t) \tan t]_0^{\frac{\alpha}{2}} - 2a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \tan^2 t (1+\tan^2 t) dt$ $= a^2 \left(1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} - 2a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1+\tan^2 t)^2 dt$ $+ 2a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1+\tan^2 t) dt$ $= a^2 \left(1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} - 2a^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1+\tan^2 t)^4 dt$ $+ 2a^2 [\tan t]_0^{\frac{\alpha}{2}}$ $= a^2 \left(3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2} - 2S$ $\therefore 3S = a^2 \left(3 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \tan \frac{\alpha}{2}$ (19) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を練習問題 B-(4)-(♡) を用いて示す. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}e^{\theta x} \ (0 < \theta < 1)$ より $e^x > 1+x \ \therefore e^{-x^2} > 1-x^2.$ 一方, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} < \frac{1}{1+x}$ より $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$ $1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad \therefore (1-x^2)^n < e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}$ $\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^\infty (1-x^2)^n dx$ なので $\therefore \int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ 中央の項の積分において, x に $\frac{x}{\sqrt{n}}$ を代入すると $dx \rightarrow \frac{dx}{\sqrt{n}}.$ $\therefore \sqrt{n} J_{2n+1} < \int_0^\infty e^{-x^2} dx < \sqrt{n} J_{2n-2}$ 但し, 最初の項では $x = \sin x$, 最後の項では $x = \tan x$ で置き換えれば J_{2n+1}, J_{2n-2} が得られる. 練習問題 B-(4) から $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} J_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ よって, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ 注意 25. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ $x = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ と変数変換する. このとき, $dx = \frac{dt}{\sqrt{2}\sigma}$ $\therefore \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sqrt{2}\sigma}$ $\therefore P(-\infty < X < \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$ 統計学で出てくる平均 μ 分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ である.		
学籍 番号			氏 名		評 点

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.30
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

17 2変数の関数の微分学

17.1 定義域と値域

$\mathbb{R}$ にて数直線を表し、 $\mathbb{R}^2$ にて xy (座標) 平面を表す。
2つの独立 (実) 変数 x, y の (実数値) 関数 $z = f(x, y)$ を考える。
そのとき、 $z = f(x, y)$ は座標平面上に与えられた点 (x, y) に対して、
唯一つの有限な実数値が定める (有限確定値という)。即ち、

$$(x, y) = (p, q) \implies f(x, y) = f(p, q)$$

が成り立つ。 $z = f(x, y)$ が関数として定義されるような、 (x, y) の満たすべき条件や範囲を定義域といい $D(f)$ にて表す。

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \text{ は有限確定値をとる} \}$$

定義域としてはいくつかの不等式によって表されることが多い。関数 $z = f(x, y)$ の取り得る値の範囲を値域といい $R(f)$ で表す。

$$R(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), \text{ 但し, } (x, y) \text{ は定義域 } D(f) \text{ 内の任意の点} \}$$

例題 38. (1) $z = f(x, y) = e^x \sin x$ の定義域および値域は

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R}^2 \text{ (平面全体)} \\ R(f) &= \{z : -\infty < z < \infty\}. \end{aligned}$$

(2) $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の定義域および値域は

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \\ R(f) &= \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\} \end{aligned}$$

(3) $z = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ の定義域および値域は

$$\begin{aligned} D(f) &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ (平面から原点を除いた集合)} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\} \\ R(f) &= \{z : z \geq 0\}. \end{aligned}$$

(4) $f(x, y) = \frac{1}{(x - 1)(y - 1)}$ の定義域および値域は

$$\begin{aligned} D(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1, y \neq 1\} \\ R(f) &= \{z \in \mathbb{R} : z \neq 0\} \end{aligned}$$

17.2 極限值と連続性

2変数関数 $f(x, y)$ は $D \subset D(f)$ (D を領域と呼ぶ) で定義されているとする。即ち、 D 内の点 $(a, b) \in D$ について、その値 $f(a, b)$ は有限確定値とする。点 (x, y) が点 (a, b) に限りなく近づく時 $(x, y) \rightarrow (a, b)$ と記す。正確には

$$(x, y) \rightarrow (a, b) \overset{\text{定義}}{\iff} \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow 0$$

$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ とおくと、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と表される。

定義 11. (x, y) が限りなく (a, b) に近づく時、関数値 $f(x, y)$ が限りなく A に近づく時、 A を $f(x, y)$ の極限值 (または、 $f(x, y)$ は A に収束する) という。この時、

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ (x, y) \neq (a, b) \\ (x, y) \in D}} f(x, y) = \lim_{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow 0} f(x, y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) = A \end{aligned}$$

とかく (但し、 A は θ に無関係な有限の数でなければならない)。

注意 26. $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = A$ は、点 (x, y) が (a, b) に限りなく近づくとき、関数 $f(x, y)$ はその近づき方によらずに有限確定値 A に近づくと事を意味する。

定義 12. $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = A$ が収束しないとき、即ち、

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = A$$

の値が有限でない (無限) 又は有限であるが一意的でない (不確定) (近づき方で極限值が異なる) かの何れかの場合が考えられる。

例題 39. (1) $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = y}} \frac{y}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ x = -y}} \frac{y}{x},$

$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx}} \frac{y}{x} = m$ ($\Leftarrow y = mx$ に沿って $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ の意) となり、 m は任意なので有限不確定である。故に収束しない、

(2) $x = a + r \cos \theta, y = b + r \sin \theta$ とおくと、 $(x, y) \rightarrow (a, b) \iff r \rightarrow 0$ 。
故に、 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$ より θ に依存する。よって、発散する。

定義 13. $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D で定義された関数 $f(x, y)$ が D 内の点 $(a, b) \in D$ で連続であるとは

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) &= \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ (x, y) \neq (a, b) \\ (x, y) \in D}} f(x, y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) \\ &= f(a, b) \end{aligned}$$

のときをいう。 $f(x, y)$ が領域 D の各点で連続の時、 $f(x, y)$ は D で連続という。

例題 40. (1) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ A & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ が連続になるのは

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos 2\theta}{r} = 0, \quad f(0, 0) = A$$

より $A = 0$ のとき $(0, 0)$ で連続である。

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ は

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos 2\theta}{r^2} = 0, \quad f(0, 0) = 0$$

ゆえ、原点 $(x, y) = (0, 0)$ で連続。

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.31
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

(3) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ について

$f(x,0)=0$ は $x=0$ で連続である. また, $f(0,y)=0$ は $y=0$ で連続であるが $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続でない.

実際,

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\rightarrow0}\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$

となり極限值が θ に依存するので有限不確定である. こうして $f(x,y)$ は x,y の変数毎には連続であるが2変数関数としては連続でないことを示す例である.

17.3 偏微分可能性と偏微分係数

定義 14. $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D で定義された関数とする. 点 $(a,b)\in D$ に対して, (a,b) と $f(x,y)$ にのみ依存する有限確定値 A, B が存在して

$$\begin{aligned}\lim_{h\rightarrow0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{h} = A \\ \lim_{k\rightarrow0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} &= \lim_{y\rightarrow b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = B\end{aligned}$$

となるとき, $f(x,y)$ は点 (a,b) で**偏微分可能**という. この時,

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b), \quad B=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f_y(a,b)$$

とかいて, これらを $f(x,y)$ の点 (a,b) での**偏微分係数**という.

例題 41. (1) $f(x,y)=(x^2+x+1)(y^3+y+2)$ とする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{2(h^2+h+1)-2}{h} = 2\cdot\lim_{h\rightarrow0}\frac{h^2+h}{h} \\ &= 2\cdot\lim_{h\rightarrow0}(h+1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\rightarrow0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\rightarrow0}\frac{1\cdot(k^3+k+2)-2}{k} = \lim_{k\rightarrow0}\frac{k^3+k}{k} \\ &= \lim_{k\rightarrow0}(k^2+1) = 1\end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=e^{xy}$ とする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} \\ &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{e^{1+h}-e}{h} = \lim_{h\rightarrow0}\frac{e(e^h-1)}{h} \\ &= e\cdot\lim_{h\rightarrow0}\frac{e^h-1}{h} \\ &= e\cdot 1 = e \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) &= \lim_{k\rightarrow0}\frac{f(1,1+k)-f(1,1)}{k} \\ &= \lim_{k\rightarrow0}\frac{e^{k+1}-e}{k} = \lim_{k\rightarrow0}\frac{e(e^k-1)}{k} \\ &= e\cdot\lim_{k\rightarrow0}\frac{e^k-1}{k} \\ &= e\cdot 1 = e\end{aligned}$$

(3) $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ とする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h^2}-1\right) \\ &= \lim_{h\rightarrow0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h^2}{1+h^2} \\ &= -\lim_{h\rightarrow0}\frac{h}{1+h^2} = 0\end{aligned}$$

$f(x,y)$ は x,y に関して対称ゆえ, 同様にして $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ を得る.

17.4 偏導関数

領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ に対し, (x,y) の関数

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h\rightarrow0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{k\rightarrow0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{h}\end{aligned}$$

をそれぞれ $f(x,y)$ の x に関する (y に関する) **偏導関数**という.

注意 27. $f_x(x,y)$ は $f(x,y)$ の y を定数と見做して, x で微分した関数であり, $f_y(x,y)$ は x を定数と見做して, y で微分した関数である.

注意 28. 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ の点 (a,b) での値 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ は偏微分係数である.

例題 42. (1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2\implies f_x=2x-y, f_y=2y-x$

(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{x}{y}\implies f_x=-\frac{y}{x^2+y^2}, f_y=\frac{x}{x^2+y^2}$

(3) $f=\log(x^2+y^2)\implies f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}, f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

(4) $f=\frac{x}{x^2+y^2}\implies f_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, f_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(5) $f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は $(x,y)\neq(0,0)$ で定義された関数である.

$f(x,y)$ の x,y に関する対称性から, $\frac{\partial f}{\partial x}$ が求まれば, 変数 x と y を入れ替えることで, $\frac{\partial f}{\partial y}$ も求まる. 対称性を持つ関数の場合は同じことを2度行う必要はない. 関数や式が出てきたときは, 対称性があるか無いかで計算は楽になる.

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+y)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}(2x) \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+y)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}(2y) \\ \therefore f_x &= \frac{y^2-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{x^2-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

(6) $f(x,y)=\log(x^2+y^2+1)$ は全平面で定義された関数である. この関数も対称性を持つ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.32
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 43. (1) $f(x,y) = \sin^{-1} \frac{x}{y}$ について,

$$f_x = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \quad f_y = \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

(2) $f(x,y) = e^{ax}(\cos by + \sin by)$ について,

$$\begin{aligned} f_x &= ae^{ax}(\cos by + \sin by) \\ f_y &= e^{ax}(-b \sin by + b \cos by) \\ &= -be^{ax}(\sin by - \cos by) \end{aligned}$$

(3) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ について,

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{(x^2+y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y &= \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

(4) $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ について,

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ f_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(5) $f(x,y) = \tan^{-1} \varphi(x,y)$ について,

$$f_x = \frac{\varphi_x}{1 + \varphi^2(x,y)}, \quad f_y = \frac{\varphi_y}{1 + \varphi^2(x,y)}$$

(6) $f(x,y) = \sin^{-1} \varphi(x,y)$ について,

$$f_x = \frac{\varphi_x}{1 + \varphi^2(x,y)}, \quad f_y = \frac{\varphi_y}{1 + \varphi^2(x,y)}$$

(7) $f(x,y) = \tan^{-1} \varphi(x,y)$ について,

$$f_x = \frac{\varphi_x}{\sqrt{1 - \varphi^2(x,y)}}, \quad f_y = \frac{\varphi_y}{\sqrt{1 - \varphi^2(x,y)}}$$

17.5 全微分可能性

復習 (1 変数の微分可能性). $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

で与えられる.

$$\delta(x,a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow a} \delta(x,a) = 0.$$

こうして, $\Delta(x,a) = (x-a)\delta(x,a)$ とおくと $\Delta(x,a)$ は連続関数であり,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \Delta(x,a), \quad \text{但し,} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta(x,a)}{x-a} = 0$$

とできる. そこで, $f(x)$ の $x = a$ での微分可能性の定義を (有限確定した) 定数 A および連続関数 $\Delta(x,a)$ が存在して,

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \Delta(x,a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta(x,a)}{x-a} = 0$$

を満たすときとする. こうして, $f(x)$ が上の意味で $x = a$ で微分可能ならば, $A = f'(a)$ を得る.

1 変数関数の場合に習って, 2 変数関数 $f(x,y)$ の (a,b) での微分可能性 (正確には全微分可能性という) を定義しよう.

定義 15. 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとは, 定数 (有限確定) A, B および連続関数 $\Delta(x,y;a,b)$ が存在し,

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + \Delta(x,y;a,b)$$

但し $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\Delta(x,y;a,b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$

を満たすときとする.

注意 29. (1) $y = b$ とおくと,

$$f(x,b) = f(a,b) + A(x-a) + \Delta(x,b;a,b)$$

そのとき,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\Delta(x,y;a,b)}{\sqrt{(x-a)^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta(x,b;a,b)}{|x-a|} = 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} - A \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta(x,b;a,b)}{x-a} = 0 \\ \therefore A &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{aligned}$$

結果的に, A は $f(x,y)$ の (a,b) での x に関する偏微分係数である.

(2) $x = a$ とおくと, 同様に

$$f(a,y) = f(a,b) + B(y-b) + \Delta(a,y;a,b)$$

そのとき,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Delta(a,y;a,b)}{\sqrt{(y-b)^2}} &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Delta(a,y;a,b)}{|y-b|} = 0 \\ \therefore \lim_{y \rightarrow b} \left(\frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} - B \right) &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Delta(a,y;a,b)}{y-b} = 0 \\ \therefore B &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{aligned}$$

結果的に, B は $f(x,y)$ の (a,b) の y に関する偏微分係数である.

従って,

命題 4. $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能ならば $f(x,y)$ は (a,b) で偏微分可能である. 逆は必ずしも正しくない.

課題. (1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{if } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

は $(0,0)$ で偏微分可能であるが, $(0,0)$ で全微分可能でないことを示せ.

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

は $(0,0)$ では連続ではないが, $(0,0)$ に於いて偏微分可能, 即ち, $f_x(0,0), f_y(0,0)$ が存在することを示せ. 今, $f(x,0)$ は $x = 0$ で連続, $f(0,y)$ は $y = 0$ で連続である. 即ち, $f(x,y)$ は各変数ごとに原点で連続であるが, 2 変数関数としては $(0,0)$ で連続でない.

(3) $f(x,y)$ は全微分可能ならば $f(x,y)$ は連続関数である事を証明せよ.

注意 30. 1 変数関数 $f(x)$ は微分可能ならば連続である. 一方, 2 変数関数 $f(x,y)$ についてもは全微分可能なら連続である.

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.33
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

17.6 2変数合成関数の偏微分

復習 (合成関数の微分法 (1 変数)). 微分可能な関数 $f(x)$ において, $x = g(t)$ とおくと,

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) \iff \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

を得る.

例. $f(t) = \log(1 + t^2)$ は $y = f(x) = \log x$ と $x = 1 + t^2$ の合成関数である.

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \cdot (2t) = \frac{1}{1 + t^2} \cdot (2t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

この合成関数の微分法を 2 変数関数 $f(x, y)$ について考える.

公式 8. (1) $f(x, y); x = x(t), y = y(t)$ に対し,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

(2) $f(x, y); x = x(\textcolor{red}{u}, v), y = y(\textcolor{red}{u}, v)$ に対し,

$$\frac{\partial f}{\partial \textcolor{red}{u}} = \frac{\partial f(x(\textcolor{red}{u}, v), y(\textcolor{red}{u}, v))}{\partial \textcolor{red}{u}} = \frac{\partial x}{\partial \textcolor{red}{u}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \textcolor{red}{u}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

(3) $f(x, y); x = x(u, \textcolor{red}{v}), y = y(u, \textcolor{red}{v})$ に対し,

$$\frac{\partial f}{\partial \textcolor{red}{v}} = \frac{\partial f(x(u, \textcolor{red}{v}), y(u, \textcolor{red}{v}))}{\partial \textcolor{red}{v}} = \frac{\partial x}{\partial \textcolor{red}{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \textcolor{red}{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

上記の公式 (2), (3) を行列表示すると

公式 9.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

証明. 証明は (1) から (2), (3) が従う. 実際, (1) を応用すれば,

$$\frac{dx}{du} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{dx}{dv} = \frac{\partial x}{\partial v}$$

と解釈すれば理解しやすい.

注意 31. 合成関数 $f(x(u, v), y(u, v))$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ に関する上記の公式に於いて, 偏導関数 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ が連続関数であることが必要である.

公式 1-(1) の証明 :

$\delta_1 = x(t + h) - x(t)$, $\delta_2 = y(t + h) - y(t)$ とおくと,
 $x(t + h) = x(t) + \delta_1, y(t + h) = y(t) + \delta_2.$ と表すことができる.

$$\begin{aligned} &\therefore f(x(t + h), y(t + h)) - f(x(t), y(t)) \\ &= f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\therefore f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t)) \\ &= \left\{ f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t) + \delta_2) \right\} \\ &\quad + \left\{ f(x(t), y(t) + \delta_2) - (f(x(t), y(t))) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\therefore \frac{f(x(t + h), y(t + h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \left\{ \frac{f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t) + \delta_2)}{h} \right\} \cdots \text{(i)} \\ &\quad + \left\{ \frac{f(x(t), y(t) + \delta_2) - (f(x(t), y(t)))}{h} \right\} \cdots \text{(ii)} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t + h) - x(t)}{h} = \frac{dx}{dt}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

に注意すると, $h \rightarrow 0$ ならば $\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$ なので,

$$\begin{aligned} \text{(i)} : &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t) + \delta_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t) + \delta_2)}{\delta_1} \cdot \frac{\delta_1}{h} \right\} \\ &= \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} \frac{f(x(t) + \delta_1, y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t) + \delta_2)}{\delta_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{h} \\ &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \frac{\textcolor{red}{\partial f(x(t), y(t) + \delta_2)}}{\textcolor{red}{\partial x}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_1}{h} \quad (\because h \rightarrow 0 \iff \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ \text{(ii)} : &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t) + \delta_2) - f(x(t), y(t))}{\delta_2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_2}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

こうして,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d f(x(t), y(t))}{dt} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t + h), y(t + h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \\ &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

公式 (1) を得る. ここで, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ の連続性は用いている. 実際, $h \rightarrow 0$ ならば, $\delta_1 \rightarrow 0, \delta_2 \rightarrow 0$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \frac{\textcolor{red}{\partial f(x(t), y(t) + \delta_2)}}{\textcolor{red}{\partial x}} &= \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \\ \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \frac{\textcolor{red}{\partial f(x(t) + \delta_1, y(t))}}{\textcolor{red}{\partial y}} &= \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \end{aligned}$$

17.7 高階偏導関数

復習 (二項定理).

$$(a + b)^n = a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n$$

$$\text{但し, } {}_n C_k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.34
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

定義 16 (高階偏微分作用素). 高階の微分作用素を

$$\begin{aligned} \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n-k}} \\ &= a^n\frac{\partial^n}{\partial x^n} + {}_nC_1a^{n-1}b\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y} + {}_nC_2a^{n-2}b^2\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \cdots \\ &\cdots + {}_nC_ka^{n-k}b^k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k} + \cdots + b^n\frac{\partial^n}{\partial y^n} \end{aligned}$$

で定義する. 但し, $\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}$ は x に関して $n-k$ 回偏微分して y に関して k 回偏微分する操作である. 特に,

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n-k}\frac{\partial^nf(x,y)}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$$

例題 44. $f(x,y) = xy$ に対し,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x,y) = \frac{\partial^2f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2f}{\partial y^2} = 2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = (x+y)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2f \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

注意 32.

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}$$

実際, 以下のようにして示せる.

$$\begin{aligned} \bullet \ a\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n &= a\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n-k}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^n {}_nC_ka^{k+1}b^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^{k+1}\partial y^{n-k}} \stackrel{\ell=k+1}{=} \sum_{\ell=1}^{n+1} {}_nC_{\ell-1}a^\ell b^{n+1-\ell}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^\ell\partial y^{n+1-\ell}} \\ \bullet \ b\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n &= b\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n+1-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n+1-k}} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n &= a\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n + b\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} {}_nC_{\ell-1}a^\ell b^{n+1-\ell}\frac{\partial^n}{\partial x^\ell\partial y^{n+1-\ell}} + \sum_{k=0}^n {}_nC_ka^kb^{n+1-k}\frac{\partial^n}{\partial x^k\partial y^{n+1-k}} \\ &\stackrel{\ell=k}{=} a^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n \{ {}_nC_{k-1} + {}_nC_k \} a^kb^{n+1-k}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^k\partial y^{n+1-k}} + b^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} \\ &= a^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} + \sum_{k=1}^n {}_{n+1}C_ka^kb^{n+1-k}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^k\partial y^{n+1-k}} + b^{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_ka^kb^{n+1-k}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^k\partial y^{n+1-k}} \\ &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

ここで, 組み合わせ ${}_nC_k$ に関して次の公式を思い出そう.

課題 (高校の復習). ${}_nC_{k-1} + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k$ が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} {}_nC_{k-1} + {}_nC_k &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n+1}{k(n+1-k)} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k(k-1)! \cdot (n+1-k)(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = {}_{n+1}C_k \end{aligned}$$

□

$$\text{次に} \begin{cases} \varphi(t) = f(x(t), y(t)) \\ x(t) = a + (x-a)t \\ y(t) = b + (y-b)t \end{cases} \quad \text{とおくと, } \frac{dx}{dt} = (x-a), \quad \frac{dy}{dt} = (y-b).$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt} \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \\ &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= (x-a) \frac{\partial f}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

そこで, 微分作用素として

$$\mathcal{D} := (x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}$$

を考える. このとき,

$$\mathcal{D}(f) = \frac{df(x(t), y(t))}{dt}$$

であることに注意せよ. 次に,

$$\mathcal{D}^2 = \textcolor{red}{\mathcal{D}}(\mathcal{D}) = \left((x-a)\textcolor{red}{\frac{\partial}{\partial x}} + (y-b)\textcolor{red}{\frac{\partial}{\partial y}} \right) \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(f) &= \left((x-a)\textcolor{red}{\frac{\partial}{\partial x}} + (y-b)\textcolor{red}{\frac{\partial}{\partial y}} \right) \left((x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= (x-a)^2\frac{\partial^2f}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

注意 3 2 から, 微分作用素として

$$\mathcal{D}^n = \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^n$$

が分かる.

$$\begin{aligned} \therefore \mathcal{D}^nf &= \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^nf(x(t), y(t)) \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k(x-a)^k(y-b)^{n-k}\frac{\partial^nf(x(t), y(t))}{\partial x^k\partial y^{n-k}} \end{aligned}$$

特に,

$$\mathcal{D}^nf = \frac{d^nf(x(t), y(t))}{dt^n} \left(:= \frac{d^nf}{dt^n} \right) = \varphi^{(n)}(t)$$

であることに注意する.

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.35
さて、 $\varphi(t) = f(a + (x - a)t, (y - b)t)$ に対し $t = 0$ の周りでテーラーの定理を適用すると、 $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + R_3$ $R_3(t) = \frac{1}{3!}\left\{(x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^3 f(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)) \cdot t^3$ 今、 $\begin{cases} \varphi(1) = f(x, y) \\ \varphi(0) = f(a, b) \\ \varphi'(0) = \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a, b) \\ \varphi''(0) = \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) \end{cases}$ であることから、 定理 12 (2 変数テーラーの定理). $\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a, b) \\ &= \frac{1}{2!}\left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) + R_3 \end{aligned}$ ここに、 $R_3 = \frac{1}{3!}\left\{(x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y}\right\}^3 f(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))$ 注意 33. 実際は、 $\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \\ f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{aligned}$ のみが意味のある高階偏微分である. 注意 34. $\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \neq \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n$ である. 右辺と左辺とは全くの別物である. 実際、左辺がn階偏導関数なのに 対し、右辺は$(af_x + bf_y)^n$ (<u>1階偏導関数を n 乗した関数</u>である.) 注意 35. 一般に、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (f_{xy} \neq f_{yx})$ である. 実際、2 変数関数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ を考える. $f_x = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ より $f_y(x, 0) = x, \quad f_x(0, y) = -y, \quad \therefore \quad f_{xy}(0, 0) = 1, \quad f_{yx}(0, 0) = -!$ 故に、 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$			一方、$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$ とおくと $(x, y) \rightarrow 0 \iff r \rightarrow 0$. $\begin{aligned} \therefore f_x(0, 0) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^4 t \sin t + 4 \cos^2 t \sin^3 t - \sin^5 t) = 0 \\ \therefore f_y(0, 0) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^5 t - 4 \cos^3 t \sin^2 t - \cos t \sin^4 t) = 0 \end{aligned}$ 注意 36. しかし、大抵の場合は $f_{xy} = f_{yx}$ であるし、本講義ではその様な関数しか扱わないので気にする必要はないが参考までに次の定理を上げておく. 定理 13 (参考まで). f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} が(a, b)の付近で (近傍という) 存在してすべて連続ならば $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が成り立つ. 証明. h, k を十分に小さく (限りなく 0 に近く) とる. $\Delta := f(a + h, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b + k) - f(a, b)$ とおく. さらに、$\varphi(x) := f(x, b + k) - f(x, b)$ とおく. その時、 $\varphi(a) = f(a + h) - f(a, b), \quad \varphi(a + h) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b)$ $\therefore \Delta = \varphi(a + h) - \varphi(a) = h\varphi'(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1)$ なる $0 < \theta < 1$ が少なくとも一つ存在することが平均値の定理から分かる. 今、 $\varphi'(a + \theta h) = f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a + \theta h, b).$ こうして、 $\Delta = h(f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a + \theta h, b)), \quad \psi(y) = f_x(a + \theta h, y)$ とおくと、平均値の定理から $f_x(a + \theta h, b + k) - f_x(a + \theta h, b) = \psi(b + k) - \psi(b) = k\psi'(b + \theta' k)$ なる $\theta'(0 < \theta' < 1)$ の存在が分かる. ここで、 $\psi'(b + k\theta') = f_y(f_x(a + \theta h, b + k\theta')) = f_{xy}(a + \theta h, b + k\theta').$ より、 $\Delta = khf_{xy}(a + \theta h, b + \theta' b)$ 関数 f_{xy} の (a, b) での連続性より $\therefore \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta}{hk} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} f_{xy}(a + h\theta, b + k\theta') = f_{xy}(a, b)$ 一方、(x, h) と (y, k) で置き換えれば、同様に $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta}{hk} = f_{yx}(a, b)$ を得る. こうして、 $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ が示せた. □		

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.36
例題 45.			コラム.		
(1) $f = f(x, y) = x^2e^{y^3}$ とする. このとき,			(1) $R_3 := R_3(x, y, a, b; \theta)$ は 3 次の剰余項と呼ばれるもので、 実際は,		
$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{y^3}$ $\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2e^{y^3}$ $\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{y^3}$ $\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2e^{y^3}$ $\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6x^2y + 9x^2y^4)e^{y^3}$			$R_3 = \frac{1}{3!} \left\{ (x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^3 f(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))$		
である. $(x - a)^2 + (y - b)^2$ が十分に 0 に近いとき、 $ R_3 $ もまた十分に 0 に近い. このとき,			である. $(x - a)^2 + (y - b)^2$ が十分に 0 に近いとき、 $ R_3 $ もまた十分に 0 に近い. このとき,		
(2) $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ について,			(2) $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ とおく.		
$\bullet f_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$ $\bullet f_{xx} = \frac{2(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ $\bullet f_{xy} = -\frac{4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ $\bullet f_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$ $\bullet f_{yy} = \frac{2(1 - y^2 + x^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$			$(x, y) \neq (a, b)$ かつ (x, y) が (a, b) に十分近いとき、すなわち、十分小さな $\epsilon > 0$ を選べば、		
0 < $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \epsilon$ を満たす (x, y) に対し、			0 < $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \epsilon$ を満たす (x, y) に対し、		
$\bullet A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 > 0$$\implies A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 \pm R_3 > 0$			$\bullet A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 > 0$$\implies A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 \pm R_3 > 0$		
一方,			一方,		
$\bullet A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 < 0$$\implies A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 \pm R_3 < 0$			$\bullet A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 < 0$$\implies A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 \pm R_3 < 0$		
を得る.			を得る.		
コラム. 高校数学 I (絶対不等式) で学んだように,			コラム. 高校数学 I (絶対不等式) で学んだように,		
$A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 > 0 \stackrel{\text{必要十分}}{\iff} A > 0 \ \& \ B^2 - AC < 0$			$A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 > 0 \stackrel{\text{必要十分}}{\iff} A > 0 \ \& \ B^2 - AC < 0$		
$A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 < 0 \stackrel{\text{必要十分}}{\iff} A < 0 \ \& \ B^2 - AC < 0$			$A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 < 0 \stackrel{\text{必要十分}}{\iff} A < 0 \ \& \ B^2 - AC < 0$		
を得る. このことを、踏まえて、関数 $f(x, y)$ の極大値および極小値について述べよう.			を得る. このことを、踏まえて、関数 $f(x, y)$ の極大値および極小値について述べよう.		
17.8 極値問題			17.9 極値条件		
定理 1 より関数 $f(x, y)$ のテーラーの展開を 2 次の項まで与えると,			定義 17. ► 2 変数の関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で極大値を取る ($f(a, b)$ が極大値である) とは十分小さい $h > 0$ に対し、		
$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2 \right\} + R_3(x, y, a, b; \theta)$			$f(a, b) \geq f(a \pm h, b \pm k)$		
$= f(a, b) + \left\{ (x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right\} f(a, b) + \frac{1}{2!} \left\{ (x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 f(a, b) + R_3(x, y, a, b; \theta)$			が成り立つとき.		
記号を簡素化して,			► 2 変数の関数 $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で極小値を取る ($f(a, b)$ が極小値である) とは十分小さい $h > 0$ に対し、		
$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left\{ f_{xx}(a, b) \cdot (x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b) \cdot (x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b) \cdot (y - b)^2 \right\} + R_3(x, y, a, b; \theta)$			$f(a, b) \leq f(a \pm h, b \pm k)$		
であった. 但し,			が成り立つとき.		
$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{R_3(x, y, a, b; \theta)}{(x - a)^2 + (y - b)^2} = 0$			$\bullet f(a, b) \text{ が極大値ならば, } f(a \pm h, b) - f(a, b) \leq 0 \text{ より}$$0 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b)$$0 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h, b) - f(a, b)}{h} = - \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(a - h, b) - f(a, b)}{-h}$$\stackrel{t = -h}{=} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = -f_x(a, b)$$0 \geq \pm f_x(a, b) \quad \therefore f_x(a, b) = 0$		
			$\bullet f(a, b) \text{ が極小値ならば, } f(a, b \pm k) - f(a, b) \geq 0 \text{ より, 同様に}$$0 \leq \pm f_x(a, b) \quad \therefore f_x(a, b) = 0$		
			を得る.		

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.37
定理 14. $f(x,y)$ が (a,b) で極値（極大値・極小値）をとれば			例. $f(x,y) = x^2+xy-y^2$ について $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ である. $D(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2 = 2(-2) - 1 = -5 \therefore D(0,0) < 0$. こうして, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値をとらない.		
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$			実際, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, $0 < x^2 + y^2 < \epsilon^2$ を満たす点として		
である.			$(x,y) = \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right), \quad \left(\frac{-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$		
例. $f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ であるが, $x = 0$ で極値は取らない. 同様に, $f(x,y) = x^3 + y^3$ も $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ であるが, $f(0,0)$ は極値でない.			を選ぶと,		
注意 37. $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ は $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値を取るための必要条件である.			$f\left(\frac{\epsilon}{2}, \pm \frac{\epsilon}{2}\right) = \pm \frac{\epsilon^2}{4}$		
定義 18. 2階連続微分可能 (C^2 級) 関数 $f(x,y)$ に対し,			となる. もし, $f(0,0) = 0$ が極小値なら,		
$D(x,y) := f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$			$(x,y) = \left(\frac{\epsilon}{2}, \pm \frac{\epsilon}{2}\right)$		
極値判定式 (discriminant) という.			に対して $f(x,y) \geq 0$ であるが, $f\left(\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{\epsilon^2}{4} < 0$ となり $f(0,0) = 0$ は極小値になり得ない. 同じ理由から $f(0,0) = 0$ は極大値にもなり得ない. □		
定理 15. 2階連続微分可能 (C^2 -級) 関数 $f(x,y)$ が			次に, $D(a,b) = AC - B^2 = 0$ とする. $A \neq 0$ ならば,		
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$			$f(x,y) - f(a,b) = \frac{1}{A} \{A(x-a) + B(y-b)\}^2 + R^3$		
を満たすとき,			直線 $A(x-a) + B(y-b) = 0$ の $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ 内にある任意の点を (x_0,y_0) とすれば,		
(1) $D(a,b) > 0$ ならば $f(a,b)$ は極値であり, 内訳は			$f(x_0,y_0) - f(a,b) = R_3(x_0,y_0;a,b)$		
▶ $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば $f(a,b)$ は極大値である.			であり, $R_3(x_0,y_0) > 0$ となる時もあれば, $R_3(x_0,y_0) < 0$ となることもあり, 極値の判定はできない.		
▶ $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば $f(a,b)$ は極小値である.			例. ▶ $f(x,y) = x^3 + y^3$ について,		
(2) $D(a,b) < 0$ ならば $f(a,b)$ は極値でない.			$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = D(0,0) = 0$		
(3) $D(a,b) = 0$ ならば $f(a,b)$ は極値かどうか判定できない.			特に $x + y > 0$ かつ $0 < x^2 + y^2 < \epsilon^2$ をみたす $(x,y) \neq (0,0)$ に対し, $f(x,y) = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) > 0$.		
証明. $A = f_{xx}(a,b)$, $C = f_{yy}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ とおく. そのとき,			また $x + y < 0$ かつ $0 < x^2 + y^2 < \epsilon^2$ をみたす $(x,y) \neq (0,0)$ に対し, $f(x,y) = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) < 0$.		
$D(a,b) = AC - B^2$			故に $f(0,0) = 0$ は極値でない.		
$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ よりテーラーの定理を適用して			▶ $f(x,y) = x^4 + y^4$ について, $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = D(0,0) = 0$. $f(x,y) = x^4 + y^4 \geq f(0,0) = 0$ より $f(0,0) = 0$ は極小値. 即ち, $D = 0$ だが極小値をもつ. □		
$f(x,y) - f(a,b) = A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + R_3$			コラム. $f(x,y)$ の極値を求める手順 :		
▶ $A > 0$, & $D(a,b) < 0$ ならば, $\epsilon > 0$ を十分小さく取れば, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ を満たす (x,y) に対し,			(1) 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ の解を求める.		
$f(x,y) - f(a,b) = A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + R_3 > 0$			例えば, $(a_1,b_1), \dots, (a_i,b_i), \dots$ を解とする.		
こうして, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ を満たす (x,y) に対し, $f(x,y) \geq f(a,b)$. 即ち, $f(a,b)$ は極小値である.			(2) $f_{xx}(a_i,b_i), \quad f_{xy}(a_i,b_i), \quad f_{yy}(a_i,b_i)$		
▶ 同様に, $A < 0$, & $D(a,b) < 0$ ならば, $\epsilon > 0$ を十分小さく取れば, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ を満たす (x,y) に対し,			$D(a_i,b_i) = f_{xx}(a_i,b_i)f_{yy}(a_i,b_i) - \{f_{xy}(a_i,b_i)\}^2$ を計算する.		
$A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + R_3 < 0.$			(3) ▶ $D(a_i,b_i) > 0$ ならば極値を持つ.		
即ち, $f(x,y) \leq f(a,b)$. よって, $f(a,b)$ は極大値.			▶ $D(a_i,b_i) < 0$ ならば極値は持たない.		
一方, $D(a,b) < 0$ ならば, $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ を満たす (x,y) に対し, $A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$ (2次形式) の符号が (a,b) の近くの (x,y) に対して確定しないので,			▶ $D(a_i,b_i) = 0$ ならば極値の判定はできない.		
$f(x,y) - f(a,b) = A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + R_3$			(4) $D(a_i,b_i) > 0$ の場合について		
の符号 (正負) が不確定. よって, $f(a,b)$ は極値であり得ない.			▶ $A(a_i,b_i) > 0$ ならば $f(a_i,b_i)$ は極小値.		
			▶ $A(a_i,b_i) < 0$ ならば $f(a_i,b_i)$ は極大値.		

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.38
例題 46. $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4$ の極値について考察せよ.. 解. (1) $f_x = f_y = 0 \therefore 4x - 4y = 4y^3 - 4x = 0 \therefore y = x = y^3,$ $\therefore x = x^3 \therefore x = 0, \pm 1.$ 故に, $f_x = f_y = 0$ の解は $(x,y) = (0,0), (1,1), (-1,-1).$ (2) $f_{xx} = 4, f_{xy} = -4, f_{yy} = 12y^2.$ $f_{xx} = 4, f_{xy} = -4, f_{yy} = (0,0) = 0$ $f_{yy}(\pm 1, \pm 1) = 12$ $\therefore D(0,0) = 16 > 0, \quad D(\pm 1, \pm 1) = 16 - 48 = -36 < 0.$ (3) (i) $f_{xx} - 2 > 0. \quad D(0,0) > 0$ より $f(0,0) = 0$ は極小値. (ii) $D(\pm 1, \pm 1) = -36 < 0$ より $(\pm 1, \pm 1)$ で極値を取らない. 例題 47. $f(x,y) = x^2 - y^3$ の極値について考察せよ. 解. (1) $f_x = 2x, f_y = -3y^2$ より $f(0,0) = f_x = f_y = 0$ の解は $(x,y) = (0,0).$ (2) $f_{xx} = 2, f_{yy} = -6y, f_{xy} = 0 \therefore D(x,y) = 12y.$ (3) $f_{xx}(0,0) = 2, f_{xy}(0,0) = 0, f_{yy}(0,0) = D(0,0) = 0.$ よって, $f(0,0) = 0$ が極値であるかどうかの判定はできない. (4) $f(0,0) = 0$ が極値でない事を別の方法で示す. 十分小さな $1 > \epsilon > 0$ に対し, $0 < x^2 + y^2 < \epsilon^2$ を満たす<u>任意の</u> (x,y) に対し, $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$ も $f(x,y) \leq f(0,0) = 0$ も成り立たない. 実際, $(x,y) = (\frac{\epsilon}{2}, 0)$ を取れば, $f(\frac{\epsilon}{2}, 0) = \frac{\epsilon^2}{4} > 0.$ 一方, $(x,y) = (0, \frac{\epsilon}{2})$ を取れば, $f(0, \frac{\epsilon}{2}) = -\frac{\epsilon^3}{8} < 0$ なので, $f(0,0) = 0$ は極値ではない. よって, 極値をもたない. □			例題 48. (1) $C : f(x,y) = x^2 - y^3 = 0$ について, $f_x = 2x, f_y = -3y^2$ より, $\{f(x,y) = f_x = f_y = 0\} = \{(0,0)\}$ (原点のみ) である. よって, 原点 $(0,0)$ は C の唯一の特異点である. ここで, 点 $(1,1)$ は $f(1,1) = 1 - 1 = 0$ より, C 上の点であるが, $f_x(1,1) = 2 \neq 0$ より, $(1,1)$ は C の通常点 (滑らかな点) である. (2) $C : f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ について, $f_x = f_y = 0$ を満たす点は $(x,y) = (0,0)$ であるが, $f(0,0) = -1 \neq 0$ ゆえ, $(0,0)$ は C 上の点ではない. よって, C 上の全ての点 (a,b) に対し, $f_x(a,b) \neq 0$ または $f_y(a,b) \neq 0$ である. 即ち, $(f_x(a,b), f_y(a,b)) \neq (0,0)$ ゆえ, C 上の全ての点は通常点である. このような曲線上の各点が通常点である曲線を滑らかな曲線という. コラム. 陰関数定理とは, 曲線 C 上の滑らかな点の近くでは, C は関数 $\varphi(x)$ のグラフ $y = \varphi(x)$ または関数 $\psi(y)$ のグラフ $x = \psi(y)$ に<u>一致する</u>事を主張している. 大雑把に言えば, 曲線は部分的にはある関数のグラフと一致するということ. 定理 16 (証明は省略). ▶ 曲線 $C : f(x,y) = 0$ 上の滑らかな点 (a,b) が $f_y(a,b) \neq 0$ ならば, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, $a - \epsilon < x < a + \epsilon$ 上の微分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在し, $b = \varphi(a)$ かつ $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ を満たす. ▶ $f_x(a,b) \neq 0$ ならば, 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, $a - \epsilon < y < a + \epsilon$ 上の微分可能な関数 $\psi(x)$ が存在し, $a = \psi(b)$ かつ $f(\psi(x), y) \equiv 0$ を満たす. 課題. 意欲ある学生は陰関数定理の証明を各自試みよ (参考文献:「高木貞治, 解析概論, 岩波書店」).		
18 陰関数定理 一般に $C : f(x,y) = 0$ は一般に xy-平面内の曲線を表わす. 例. (1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ を満たす集合 (図形) は $x^2 + y^2 + 1 > 0$ ゆえ空集合である (xy-平面上に図形として存在しない). (1) $f(x,y) = x^2 + y^2 = 0$ が表す集合 (図形) は原点 $\{(0,0)\}$ である. (2) $f(x,y) = x^3 + y^3 = 0$ が表す集合 (図形) は直線 $x + y = 0$ である. 実際, $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ であり, $x^2 - xy + y^2 \neq 0$ なので, $x + y = 0.$ 定義 19. (1) $f(x,y) = 0$ が xy-平面内の曲線を表すとする. そのとき, $f(x,y) = f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点を特異点と呼ぶ. (2) C 上の点 (a,b) が $(f_x(a,b), f_y(a,b)) \neq (0,0)$ を満足するとき, 点 (a,b) を曲線 C の通常点 (滑らかな点) という.			18.1 陰関数定理の応用 曲線 $C : f(x,y) = 0$ の点 (a,b) (即ち, $f(a,b) = 0$ を満たす点) に対し, $f_y(a,b) \neq 0$ (即ち, (a,b) は C の滑らかな点) とする. このとき, 陰関数定理から (♠) 十分小さな $\epsilon > 0$ に対し, $a - \epsilon < x < a + \epsilon$ 上で微分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在し, $b = \varphi(a)$ かつ $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ を満たす. ▶ まず, $f_y(a,b) \neq 0$ ゆえ $f_y(x,y)$ の連続性から長方形領域 $I = \{ x - a < \epsilon, y - b < \epsilon\}$ 内の (x,y) に対し $f_y(x,y) \neq 0$ として良い. ▶ そこで, 領域 I に於いて $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ の両辺を x で微分して $f_x + f_y \varphi'(x) = 0 \quad \therefore \varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} \quad (\because f_y(x,y) \neq 0)$ とって, $(a,b) = (a, \varphi(a))$ での曲線 C の接線の方程式 ℓ は C が $y = \varphi(x)$ で表されることから, (a,b) における C の接線の方程式は $y = \varphi(x)$ の $x = a$ での接線の方程式に一致する. よって, $\ell : \quad y = \varphi'(a)(x - a) + b \cdots \cdots (2.1.1)$ と表わされる, $\varphi'(a) = -\frac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$ を (2.1.1) に代入することにより, $f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b) = 0 \quad \cdots \cdots (2.1.2)$ を得る. この (2.1.2) が C の (a,b) での接線の方程式である.		
学籍番号			氏名		評点

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.39
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

18.2 極大点・極小点（陰関数の極値）

$f(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) \neq 0$ とする. (a, b) の付近での陰関数を $y = \varphi(x)$, $b = \varphi(a)$ とする ($f_x(a, b) \neq 0$ のときは, $x = \psi(y)$, $a = \psi(b)$).

定義 20. 曲線 $C : \{f(x, y) = 0\}$ 上の点 (a, b) が C の極大点とは $b = \varphi(a)$ が $y = \varphi(x)$ の極大値であるとき, 即ち,

$$\varphi'(a) = 0 \ \& \ \varphi''(a) < 0$$

のときをいう. 曲線 $C : \{f(x, y) = 0\}$ 上の点 (a, b) が C の極小点とは $b = \varphi(a)$ が $y = \varphi(x)$ の極大値であるとき, 即ち,

$$\varphi'(a) = 0 \ \& \ \varphi''(a) > 0$$

のときをいう.

注意 38. $f_x(a, b) \neq 0$ のときは, 陰関数 $x = \psi(y)$, $a = \psi(b)$ に対し,

$$\psi'(b) = 0 \ \& \ \psi''(b) > 0 \text{ 又は } \psi'(b) < 0$$

と置き換えることで同様の主張ができる.

以下で, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を計算する.

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} \qquad \cdots \qquad (2.2.A)$$

$$(f_x)_x = (f_x(x, \varphi(x)))_x = f_{xx} + f_{xy}\varphi'(x)$$

$$(f_y)_x = (f_y(x, \varphi(x)))_x = f_{yx} + f_{yy}\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \varphi''(x) &= -\frac{(f_x)_x f_y - f_x (f_y)_x}{f_y^2} \\ &= -\frac{(f_{xx} + f_{xy}\varphi'(x)) f_y - f_x (f_{yx} + f_{yy}\varphi'(x))}{f_y^2} \\ &\stackrel{(2.2.A)}{=} -\frac{(f_{xx}f_y - f_{xy}f_x)f_y - f_x(f_{xy}f_y - f_{yy}f_x)}{f_y^3} \\ &= -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} \qquad \cdots \qquad (2.2.B) \end{aligned}$$

今, $\varphi'(a) = 0$ から $f_x(a, b) = 0$, ($\because f_y(a, b) \neq 0$)

$$\therefore \varphi''(a) = -\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)}$$

定理 17.

$$\varphi'(a) = 0 \ \& \ \varphi''(a) < 0 \iff f_x(a, b) = 0 \ \& \ \frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} > 0$$

$$\varphi'(a) = 0 \ \& \ \varphi''(a) > 0 \iff f_x(a, b) = 0 \ \& \ \frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} < 0$$

例題 49. $C : f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (原点中心, 半径 1 の円周) について, $f(x, y) = f_x = 0$ の解は $(0, \pm 1)$. $f_{xx} = 2$, $f_y = 2y$. $\frac{f_{xx}}{f_y} = \frac{1}{y}$. $\frac{f_{xx}}{f_y}(0, 1) > 0$ ゆえ $(0, 1)$ は C の極大点. $\frac{f_{xx}}{f_y}(0, -1) < 0$ ゆえ $(0, -1)$ は極小点.

復習. 2 階微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフが

$$\blacktriangleright x = a \text{ で上に凸 (凸状)} \stackrel{\text{定義}}{\iff} f''(a) < 0.$$

$$\blacktriangleright x = a \text{ で下に凸 (凹状)} \stackrel{\text{定義}}{\iff} f''(a) > 0.$$

注意 39. $\Lambda := \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$ とおくと,

$$\blacktriangleright \Lambda > 0 \text{ ならば } C \text{ は上に凸.}$$

$$\blacktriangleright \Lambda < 0 \text{ ならば } C \text{ は下に凸}$$

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (原点中心, 半径 1 の円周) に対して Λ を調べる.

$$f_x = 2x, \ f_y = 2y, \ f_{xx} = f_{yy} = 2, \ f_{xy} = 0.$$

$$\therefore \Lambda = \frac{4x^2 + 4y^2}{8y^3} = \frac{x^2 + y^2}{2y^3}$$

よって, $y > 0$ (上半分) では $\Lambda > 0$ より上に凸. $y < 0$ (下半分) では下に凸. これは図示してみれば明らかである.

18.3 ラグランジュの未定乗数法

概要

制約条件 $g(x, y) = 0$ の下で, 関数 $f(x, y)$ の極値を求める方法にラグランジュの未定乗数法というものがある. この事を学ぶ. まず, $g(a, b) = 0$ かつ $g_y(a, b) \neq 0$ を満たす点 (a, b) で $f(x, y)$ が極値をとると仮定する. $g(x, y) = 0$ に対する (a, b) での陰関数を $\varphi(x)$ とすれば, $\varphi(x)$ は $x = a$ の近くで定義され,

$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0, \ b = \varphi(a)$$

をみtas.

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)} \cdots \cdots \text{(I)}$$

$$\varphi''(a) = -\frac{g_{xx}(a, b)g_y^2(a, b) - 2g_{xy}(a, b)g_x(a, b)g_y(a, b) + g_{yy}(a, b)g_x^2(a, b)}{g_y^3(a, b)}$$

であつた. 一方, $F(x) := f(x, \varphi(x))$ に対し,

$$F'(x) = f_x + f_y\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= f_{xx} + 2f_{xy}\varphi'(x) + f_{yy}\varphi'(x)^2 + f_y\varphi''(x) \\ &= \frac{f_{xx}g_y^2 - 2f_{xy}g_xg_y + f_{yy}g_x^2 + f_yg_y^2\varphi''}{g_y^2} \end{aligned} \qquad (2.3.A)$$

$F(x)$ が $x = a$ で極値を持つとすれば,

$$F'(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)\varphi'(a) = 0 \cdots \cdots \text{(II)}$$

$$\therefore \varphi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

一方, $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$. こうして,

$$\varphi'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)} \cdots \cdots \text{(III)}$$

$$\therefore \frac{f_x(a, b)}{g_x(a, b)} = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)} =: \lambda \cdots \cdots \text{(IV)}$$

$$\therefore \begin{cases} f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見てください)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.40
<u>コラム</u>. 今, $g_x(a,b) = 0$ ならば, $g_y(a,b) \neq 0$ であったので, (I) より $\varphi'(a) = 0$. ゆえに (II) より $f_x(a,b) = 0$. 従って, $\frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)} = \frac{0}{0}$ で不確定値であるが, このときは, (IV) の右辺の分母 $g_y(a,b) \neq 0$ より, $\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)} = \lambda$ は有限確定値である. この値をもって λ を定める. こうして, $\lambda \neq \infty$ であることが分かる. 以上より, 命題 5. 関数 $g(x,y)$ に対し, $g(a,b) = 0$ かつ $g_y(a,b) \neq 0$ とする. そのとき, $f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるための必要条件はある λ があって, $\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0 \end{cases}$ 満たすことである. を 逆に, 連立方程式 $(2.3.2) \quad \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \end{cases}$ の解を (a,b,λ) とすれば, $\begin{aligned} F'(a) &= f_x(a,b) + f_y(a,b)\varphi'(a) \\ &= \lambda\{g_x(a,b) + g_y(a,b)\varphi'(a)\} \\ &= \left\{g_x(a,b) + g_y(a,b)\left(-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$ よって, $x = a$ は $F(x) = f(x,\varphi(x))$ の極値の候補である. 実際, 極値であるかどうかは $F''(a)$ の符号を調べる必要がある. $F''(a) = f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(a) + f_{yy}(a,b)\varphi'(a)^2 + f_y(a,b)\varphi''(a)$ ここで, $\begin{aligned} \varphi'(a) &= -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} \\ \varphi''(a) &= -\frac{g_{xx}(a,b)g_y^2(a,b) - 2g_{xy}(a,b)g_x(a,b)g_y(a,b) + g_{yy}(a,b)g_x^2(a,b)}{g_y^3(a,b)} \end{aligned}$ であらかじめ計算しておく必要はある. 注意 40. $g(x,y) = 0$ の陰関数が $x = k(y)$ のとき, 即ち, $g_x(x,y) \neq 0$, $g(k(y),y) \equiv 0$ のとき, $\psi(y) = f(k(y),y)$ とおく. $\begin{aligned} k'(y) &= -\frac{g_y(x,y)}{g_x(x,y)} \\ k''(y) &= -\frac{g_{xx}(g_y)^2 - 2g_{xy}(g_x)(g_y) + g_{yy}(g_x)^2}{(g_x)^3} \\ \psi'(x) &= f_x k'(y) + f_y \\ \psi''(x) &= (f_{xx}k'(y) + f_{xy})k'(y) + f_{xy}k'(y) + f_{yy} \\ &= \frac{f_{xx}(g_y)^2 - 2f_{xy}(g_x)(g_y) + f_{yy}(g_x)^2}{(g_x)^2} + f_y k''(y) \end{aligned}$ 例題 50. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で関数 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ の極値を求めよ. ここで, $g(x,y) = 0$ の陰関数を $\varphi(x)$ とし, $F(x) = f(x,\varphi(x))$ とおく.			(解) $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1-\lambda)x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$ $x^2 + y^2 = 1 \text{ より } (x,y) \neq (0,0). \quad \therefore (1-\lambda)^2 = 1 \quad \therefore \lambda = 0, 2$ ▶ $\lambda = 0$ のとき, $x + y = 0 \quad \therefore (x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$. ▶ $\lambda = 2$ のとき, $x = y \quad \therefore (x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. 一方, $\varphi'(x) = \frac{g_x}{g_y} = -\frac{x}{y}$, $\varphi''(x) = -\frac{1}{y^3}$ $\begin{aligned} F''(x) &= 2 + 4\varphi' + 2(\varphi')^2 + f_y\varphi'' \\ &= \frac{2 - 4xy}{y^2} - \frac{2}{y^3}(x+y) \end{aligned}$ である. ▶ $\lambda = 0 \implies F''(x) = \frac{2 + 4x^2}{x^2} > 0$ よって, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ で極小値 0 をとる. ▶ $\lambda = 2 \implies F''(x) = -\frac{2 + 4x^2}{x^2} < 0$. よって, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ で極大値 2 をとる. (高校数学による別解) $x^2 + y^2 = 1 \text{ は } x = \cos t, y = \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ とパラメーター表示できる.}$ $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2\sin t \cos t = 1 + \sin 2t$ 今, $-1 \leq \sin 2t \leq 1$ ゆえ, $0 \leq f(x,y) = 1 + \sin 2t \leq 2$. よって, 最大値 2, 最小値 0 を得る. <u>コラム</u>. 閉曲線 (始点と終点が同じ) 上で定義された連続関数は最大値・最小値を閉曲線上の点でとる. 円周 $C: x^2 + y^2 = 1$ は閉曲線なので, 上記の $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ は C 上で最大値及び最小値を取る. 例題 51. $x^2 + y^2 = 1$ の下で, $x + y$ の最大値・最小値を求めよ. (高校数学による解答) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \geq (ax + by)^2$ (コーシー・シュワルツの不等式) において, $a = b = 1$ とおく. その時, $(x+y)^2 \leq (1+1)(x^2+y^2) = 2(x^2+y^2) = 2$ $\therefore x+y \leq \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$ よって, $x+y$ の最大値 $\sqrt{2}$ であり, 最小値 $-\sqrt{2}$. <u>別解</u>. $x+y = k$ とおき, $x^2 + y^2 = 1$ に代入して $x^2 + (k-x)^2 = 1 \implies 2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$ 判別式 $D = k^2 - 2(k^2 - 1) = -k^2 + 2$ $D < 0$ ならば実数解を持たない. これは x が実数であることに矛盾. $\therefore D \geq 0 \iff k^2 \leq 2 \quad \therefore -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$ よって, $k = x+y$ の最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は $-\sqrt{2}$. <u>コラム</u>. 一般にこのような初等的テクニックで最大値や最小値が求まるとは限らないので理論が必要なのである. しかし, 考え方のエッセンスはすでに高等学校で学んでいる.		
学籍番号			氏名	評点	
No.					

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.41
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

19 2変数微分演習問題

19.1 関数の極限・連続性

練習問題 2. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ ($xy \neq 0$) を考える. $a > 0$ とする.

$$(x_n, y_n) = \left(a + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad (x'_n, y'_n) = \left(a + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$$

とする.

(1) $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n)$ は $f(x,y)$ の定義域内の点列であることを示せ.
 $x_n y_n = (a + \frac{1}{n}) \frac{1}{n} \neq 0, \quad x'_n y'_n = -(a + \frac{1}{n}) \frac{1}{n} \neq 0$ より定義域に含まれる.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n, y'_n) = (a, 0) \in D(f)$ を示せ.
但し, $D(f)$ は $f(x,y)$ の定義域を表す.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{n}, \pm \frac{1}{n}\right) = (a, 0)$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n)$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + \frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n^2}}{(a + \frac{1}{n}) \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((na + 1) + \frac{1}{na + 1}\right) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-(na + 1) - \frac{1}{na + 1}\right) = -\infty \end{aligned}$$

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y)$ は存在するかどうか調べよ.
(3) より $(x,y) \rightarrow (a,0)$ は近づき方によって, $\pm\infty$ に発散するので収束しない.

練習問題 3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ は $(0,0)$ で連続であることを示せ.

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと, $(x,y) \rightarrow (0,0) \iff r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos \theta \sin \theta) \\ &= 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

よって, 連続性の定義から $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である.

19.2 偏微分・極値問題

練習問題 4. 次の関数を x および y について偏微分せよ.

(i) $f = x^3 + y^3 - 3xy$ (ii) $f = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (iii) $f = e^{x^2+y^2}$

(i) $f_x = 3x^2 - 3y, \quad f_y = 3y^2 - 3x$
(ii) $f_x = \frac{(xy)_x(x^2+y^2) - xy(x^2+y^2)_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$
 $= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y \text{ の対称性を用いた})$
(iii) $f_x = e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)_x = 2xe^{x^2+y^2}$
 $f_y = 2ye^{x^2+y^2} \quad (x,y \text{ の対称性を用いた})$

練習問題 5. $u = u(x,y) = f(y+ax) + g(y-ax)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

を満たすことを示せ.

$$\begin{aligned} u_x &= f_x(y+ax)_x(t+ax)' + g_x(y-ax)(y-ax)' \\ &= af_x(y+ax) - ag_x(t-ax) \\ u_y &= f_y(y+ax) + g_y(y-ax) \\ u_{xx} &= af_{xx} \cdot a - ag_{xx}(-a) = a^2(f_{xx} + g_{xx}) \\ u_{yy} &= f_{yy} + g_{yy} \\ \therefore u_{xx} &= a^2 u_{yy} \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

練習問題 6. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{5x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ は $(0,0)$ で 2 階微分可能であるが, 2 階導関数は原点で連続でないことを示せ.

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - \frac{10xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = 2y - \frac{10x^4y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy} = -\frac{40x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} \\ f_{xx} &= 2 - \frac{10y^4(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy} = 2 - \frac{10x^4(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} が原点で連続ならば $(x,y) \rightarrow (0,0)$ の近づき方に依らず有限確定値を定める.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xx}(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f_{xx}(x,0) = 2 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} f_{xx}(0,y) = 2 - 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4(y^2)}{(y^2)^3} = 2 - 10 = -8 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x,0) = 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x,x) = -\frac{40}{8} = -5 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{yy}(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f_{yy}(x,0) = 2 - 10 = -8 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} f_{yy}(0,y) = 2 \end{aligned}$$

以上のように, 近づき方で 2 階偏導関数の極限が異なるため, 原点で連続であるように拡張できない.

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

熊本大学 理工医薬系学部		年度 講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見たい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.42
練習問題 7. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置くとき,					
$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$					
を示せ. Δ をラプラス作用素 (ラプラシアン) という.					
$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \\ \therefore \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (-r \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \frac{\partial}{\partial y} + (r \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + (-r \sin \theta) \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + (r \cos \theta) \left(-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ \therefore \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &\quad - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{aligned}$					
こうして,					
$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= -\frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \therefore \Delta &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$					
練習問題 8. $f = f(x, y) = e^x \cos y$ に対し, u のラプラシアン Δu を計算せよ.					
$\begin{aligned} f_x &= e^x \cos y, & f_y &= -e^x \sin y, \\ f_{xx} &= e^x \cos y, & f_{xy} &= -e^x \sin y, & f_{yy} &= -e^x \cos y \end{aligned}$					
$\therefore \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$					
練習問題 9. $f(x, y) = x^2 + y^2$ につぎの変数変換 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ を行ったときの偏微分 $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ を求めよ.					
(i) $x = u + v, y = u - v$ (ii) $x = u \cos v, y = u \sin v$					
(iii) $x = uv, y = u^2 + v^2$					
.....					
			$\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} = x_u f_x + y_u f_y \\ f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y} = x_v f_x + y_v f_y \\ f_x &= 2x \\ f_y &= 2y \end{aligned}$		
			(i) :		
			$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) = (1, 1), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) = (1, -1)$		
			$\begin{aligned} f_u &= f_x + f_y = 2(x + y) = 4u \\ f_v &= f_x - f_y = 2x - 2y = 4v \end{aligned}$		
			(ii) :		
			$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) = (\cos v, \sin v), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) = (-u \sin v, u \cos v)$		
			$\begin{aligned} f_u &= (\cos v) f_x + (\sin v) f_y = (\cos v)(2x) + (\sin v)(2y) \\ &= (\cos v)(2u \cos v) + (\sin v)(2u \sin v) = 2u(\cos^2 v + \sin^2 v) \\ &= 2u \\ f_v &= (-u \sin v) f_x + (u \cos v) f_y = -u \sin v(2u \cos v) + (u \cos v)(2u \sin v) \\ &= -2u^2 \cos v \sin v + 2u^2 \cos v \sin v \\ &= 0 \end{aligned}$		
			(iii) :		
			$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) = (v, 2u), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) = (u, 2v)$		
			$\begin{aligned} f_u &= (v) f_x + (2u) f_y = v(2uv) + 2u(2(u^2 + v^2)) \\ &= 2u^2 v + 4u^3 + 4uv^2 = 4u^3 + 6uv^2 \\ &= 2u(2u^2 + 3v^2) \\ f_v &= (u) f_x + (2v) f_y = u(2uv) + 2v(2(u^2 + v^2)) \\ &= 2u^2 v + 4u^2 v + 4v^3 = 4v^3 + 6u^2 v \\ &= 2v(2v^2 + 3u^2) \end{aligned}$		
練習問題 10. 関数 $f(x, y) = (xy + 1)e^{x+y}$ の $(0, 0)$ での 3 次の項までのテーラー展開せよ (剰余項を R_4 とせよ.)					
			$\begin{aligned} f_x &= (xy + y + 1)e^{x+y}, & f_y &= (xy + x + 1)e^{x+y} \\ f_{xx} &= (xy + 2y + 1)e^{x+y}, & f_{xy} &= (xy + x + y + 2)e^{x+y} \\ f_{yy} &= (xy + 2x + 1)e^{x+y} \\ f_{xxx} &= (xy + 3y + 1)e^{x+y} \\ f_{xxy} &= f_{xyx} = f_{yxx} = (xy + x + 2y + 3)e^{x+y} \\ f_{xyy} &= f_{yxy} = f_{yyx} = f_{yyx} = (xy + 2x + y + 3)e^{x+y} \\ f_{yyy} &= (xy + 3x + 1)e^{x+y} \\ f(0, 0) &= 1, & f_x(0, 0) &= 1, & f_y(0, 0) &= 1, & f_{xx}(0, 0) &= 1, & f_{xy}(0, 0) &= 2 \\ f_{yy}(0, 0) &= 1, & f_{xxx}(0, 0) &= 1, & f_{xxy}(0, 0) &= 3 \\ f_{xyy}(0, 0) &= 3, & f_{yyy}(0, 0) &= 1 \end{aligned}$		

学籍 番号		氏 名		評 点
	No.			

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.43
$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0)$ $+ \frac{1}{2}(x^2f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2f_{yy}(0,0))$ $+ \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx}(0,0) + 3x^2yf_{xxy}(0,0) + 3xy^2f_{xyy}(0,0) + y^3f_{yyy}(0,0))$ $f(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 9x^2y + 9xy^2 + y^3) + R_4$ 練習問題 11. (1) $f(x,y) = 2x^3 + 3xy + 3y^2$ の極値を求めよ. $f_x = f_y = 0 \implies y + 2x^2 = x + 2y = 0 \quad \therefore (x,y) = (0,0), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ 一方, $f_{xx} = 12x, f_{xy} = 3, f_{yy} = 6, D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 9(8x - 1).$ $D(0,0) = -9 < 0$ ゆえ $(0,0)$ は極値を与えない. $f_{xx}(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}) = 3 > 0 \quad D(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}) = 9 > 0$ より $f(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}) = -\frac{1}{64}$ は極小値. (2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 3y$ の極値を求めよ. $f_x = f_y = 0 \implies x(x-4) = (y-1)(y+1) = 0$ $\therefore (x,y) = (0, \pm 1), (4, \pm 1).$ $f_{xx} = 6(x-2), f_{yy} = 6y, f_{xy} = 0.$ $D = 36y(x-2) > 0$ となるのは $x > 2 \& y > 0$ または $x < 2 \& y < 0$ より, 極値の候補は $(x,y) = (4, 1), (0, -1).$ $f_{xx}(0, -1) = -12 < 0$ より $f(0, -1) = 2$ は極大値. また, $f(4, 1) = 12 > 0$ より $f(4, 1) = -34$ は極大値. (4) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x-1)(y-1)}$ 極値を求めよ. $\frac{x^2y^2}{(x-1)(y-1)} = \frac{y^2}{y-1} \cdot \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{y^2}{y-1}$ と分離できると, および, $f(x,y) = f(y,x)$ (対称性) に注意せよ. そのとき, $f_x = \frac{y^2}{y-1} \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, f_y = \frac{x^2}{x-1} \frac{y(y-2)}{(y-1)^2}$ $f_{xx} = \frac{y^2}{y-1} \frac{2}{(x-1)^3}, f_{yy} = \frac{x^2}{x-1} \frac{2}{(y-1)^3}$ $f_{xy} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \frac{y(y-2)}{(y-1)^2}$ $D = -\frac{x^2y^2\{(x-2)(y-2)+2\}\{(x-2)(y-2)-2\}}{(x-1)^4(y-1)^4}$ 今, $f_x = f_y = 0$ の解は $(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)$ $D(0,0) = D(0,2) = D(2,0) = 0$ よりこれ他の点で極値をとるかどうかは判定できない. 一方, $D(2,2) = 64 > 0, f_{xx}(2,2) = 8 > 0$ より, $f(2,2) = 16$ は極小値. 練習問題 12. (1) 曲線 $C : x^2 + y^2 - 4x + 5y - 3 = 0$ の上の点 $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ. $f = x^2 + y^2 - 4x + 5y - 3$ とおく. $f_x = 2x - 4 \therefore f_x(1,1) = -2; \quad f_y = 2y + 5 \therefore f_y(1,1) = 7$ $(1,1)$ での接線の方程式は $f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = 0$ より, $y-1 = \frac{2}{7}(x-1) \quad \therefore y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$ この問題は高校数学1のレベルで解ける. 実際, C は円で中心は $A(2, -\frac{5}{2}).$ C 上の点 $P(1,1)$ と A を通る直線の傾きは $\frac{1 - (-\frac{5}{2})}{1 - 2} = -\frac{7}{2}.$ 接線は直線 AP に垂直だから接線の傾き m とすれば, $m \cdot (-\frac{7}{2}) = -1 \therefore m = \frac{2}{7}.$ よって, C の $(1,1)$ での接線の方程式は $y-1 = \frac{2}{7}(x-1).$			(2) 曲線 $C : e^{-x-y}(x^2 + y^2 + 1) - 1 = 0$ 上の点 $(0,0)$ に於ける接線の方程式を求めよ. $f = e^{-x-y}(x^2 + y^2 + 1) - 1$ とおく. $f_x - e^{-(x+y)}(x^2 - 2x + 1 + y^2) \therefore f_x(0,0) = -1$ 同様に $f_y(0,0) = 0.$ よって $(0,0)$ での接線の方程式は $xf_x(0,0) + yf_y(0,0) = 0 \quad \therefore x + y = 0.$ 練習問題 13. つぎの関係で定められる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を与える点と極値を求めよ. (i) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 80$ (ii) $2x^4 - 8xy^3 + y^4 = -5$ (i): $f = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 80$ とおく. $\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{10x - 6y}{10y - 6x} = -\frac{5x - 3y}{5y - 3x}$ $\varphi'(x) = 0$ より $f_x = 5x - 3y = 0 \quad \therefore y = \frac{5}{3}x.$ これを (i) に代入して, $x = \pm 3, \therefore y = \pm 5.$ $f_{xx} = 10, f_{yy} = 10, f_{xy} = -6. f_x(\pm 3, \pm 5) = 0$ なので, $\varphi'' = -\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$ に $(x,y) = (\pm 3, \pm 5)$ を代入して $\varphi''(\pm 3) = -\frac{f_{xx}(\pm 3, \pm 5)}{f_y(\pm 3, \pm 5)} - \frac{10}{f_y(\pm 3, \pm 5)}$ $f_y = 10y - 6x$ なので, $f_y(\pm 3, \pm 5) = \pm 32.$ よって, $\varphi''(\pm 3) = \mp \frac{5}{16}.$ よって, 陰関数は $x = 3$ のとき, $\varphi''(3) < 0$ となり極大値を与え, $x = -3$ のとき, $\varphi''(-3) > 0$ となり極小値を与える. (ii) $f = 2x^4 - 8xy^3 + y^4 + 5.$ と置く. $f_x = 8(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \quad \therefore x = y (\because x^2 + xy + y^2 > 0).$ (ii) に代入して $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ が極値の候補である. $f_{xx} = 24x^2, f_y = 4y^2(y - 6x)$ より, $\varphi''(x) = -\frac{f_{xx}}{f_y} = -\frac{6x^2}{y^2(y - 6x)}.$ $\varphi''(\pm 1) = \pm \frac{6}{5}.$ よって, $x = 1$ のとき $\varphi''(1) = \frac{6}{5} > 0$ より $\varphi(x)$ は $x = 1$ で極小値, $x = -1$ で極大値をとる. 練習問題 14. (1) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ の下で, $f(x,y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ. $g_x = 3(x^2 - y), g_y = 3(y^2 - x), g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3$ $f_x = 2x, f_y = 2y, f_{xx} = f_{yy} = 2, f_{xy} = 0$ $\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2x + 3\lambda(x^2 - y) \\ 2y + \lambda(y^2 - x) \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0 \end{cases}$ $\therefore x(y^2 - x) = y(x^2 - y) \longrightarrow (x-y)(xy + x + y) = 0$ よって, $x = y$ 又は $xy + x + y = 0.$ ● <u>$x = y$ のとき</u> : $g = 0$ に代入して, $x^2(2x - 3) = 0 \therefore (x,y) = (0,0), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ しかし, $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$ ゆえ陰関数定理は適用できない. この場合は別の議論が必要. 一方, $g_y(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} \neq 0$ ゆえ, $g(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 付近で存在する. $x = y$ を考慮すれば, $\varphi' = -\frac{g_x}{g_y} = \frac{x^2 - y}{x - y^2} = \frac{x^2 - x}{x - x^2} = -\frac{x - 1}{x - 1} = -1.$		

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある <u>注意書き</u> の欄も見て欲しい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.44
り異なる $g(1,1)=-2\neq 0$ ゆえ、 $x\neq 1$. よって $(x-1)$ で分母子は割			$\therefore F''(\frac{2}{\sqrt{3}})=-10\sqrt{3}<0, \quad F''(-\frac{2}{\sqrt{3}})=10\sqrt{3}>0$		
$\begin{aligned}\varphi''(x) &= -\frac{g_{xx}g_y^2-2g_{xy}g_xg_y+g_{yy}g_x^2}{g_y^3} \\ &= -2\cdot \frac{xy(x^3+y^3-3xy+1)}{(y^2-x)^3} \\ &= 2\cdot \frac{xy(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)}{(x-y^2)^3} \\ &= -\frac{2(2x+1)}{x(x-1)}\end{aligned}$			よって、 $F(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極大値. $F(-\frac{2}{\sqrt{3}})=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ は極小値.		
$\begin{aligned}F''(x) &= f_{xx}+2f_{xy}\varphi'+f_{yy}(\varphi')^2+f_y\varphi'' \\ &= 2+2(-1)^2+2y\varphi''=-4\frac{2x+1}{x-1}\end{aligned}$			(3) $g(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$ の下で関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の極値を求めよ.		
$F''(\frac{3}{2})=-32<0$. よって、 $f(x,y)$ は $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ で極大値 $\frac{9}{2}$ をとる.			$g_x=\frac{2x}{9}, \ g_y=\frac{y}{2}, \ g_{xx}=\frac{2}{9}, \ g_{xy}=0, \ g_{yy}=\frac{1}{2}$ $f_x=2x, \ f_y=-2y, \ f_{xx}=2, \ f_{xy}=0, \ f_{yy}=-2$		
$xy+x+y=0$ の場合は起きない: $(x,y)\neq (0,0)$ であった. まず $xy\neq 0$ である. 実際、$x=0$ なら $y=0$ ($y=0$ ならば $x=0$) となり、$(x,y)\neq (0,0)$ に反する. $\therefore xy+x+y=0$ であるが、$x^3+y^3-3xy=(x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=0$ と変形される. そこで、$x+y=-(xy)$ を上式に代入して $-(xy)^3+3(xy)^2-3(xy)=-(xy)((xy)^2-3(xy)+4)=0$ を得るが、今 $xy\neq 0$ であり $(xy)^2-3(xy)+3=((xy)-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ より $(xy)((xy)^2-3(xy)+4)\neq 0$. 矛盾. よって $xy+x+y=0$ と $x^3+y^3-3xy=0$ は $(0,0)$ 以外に共通点を持たない. $\square$			$\begin{cases} f_x+\lambda g_x=0 \\ f_y+\lambda g_y=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} (\lambda+9)x=0 \\ (\lambda-4)y=0 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$		
(2) $g(x,y)=x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$ の下で関数 $f(x,y)=x^3+y$ の極値を求めよ.			ここで、 $(x,y)\neq (0,0)$ を考慮すれば		
$g_x=2x, \ g_y=-\frac{y}{2}, \ g_{xx}=2, \ g_{xy}=0, \ g_{yy}=-\frac{1}{2}$ $f_x=3x^2, \ f_y=1, \ f_{xx}=6x, \ f_{xy}=f_{yy}=0$			$(x,y;\lambda)=(0,\pm 2;4), (\pm 3,0;-9)$		
$\begin{cases} f_x+\lambda g_x=0 \\ f_y+\lambda g_y=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x(3x+2\lambda)=0 \\ \lambda y=2 \\ x^2-\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$			$y\neq 0$ ならば、 $g_y\neq 0$. このとき、 $x=0, y=\pm 2$ である. $g(x,y)=0$ が定める陰関数が存在しそれを $y=\varphi(x)$ とおくと、 $\varphi'(x)=-\frac{4x}{9y}$, $\varphi''(y)=-\frac{8}{y^3}$. $F(x)=f(x,\varphi(x))$ とおくと、		
$F'(x)=f_x+f_y\varphi'=\frac{26x}{9} \quad \therefore \quad F'(0)=0$ $F''=2+\frac{16}{y^2}-\frac{32x^2}{81y^2} \quad \therefore \quad F''(0)=2+\frac{16}{4}=6>0$			$F'(x)=f_x+f_y\varphi'=\frac{26x}{9} \quad \therefore \quad F'(0)=0$ $F''=2+\frac{16}{y^2}-\frac{32x^2}{81y^2} \quad \therefore \quad F''(0)=2+\frac{16}{4}=6>0$		
こうして、 $f(0,\pm 2)=-4$ は極小値.			こうして、 $f(0,\pm 2)=-4$ は極小値.		
$x\neq 0$ ならば、 $g_x\neq 0$. このとき、 $x=\pm 3, y=0$. $g(x,y)=0$ が定義する陰関数を $x=\psi(y)$ とし、 $G(y)=f(\psi(y),y)$ とおく. 同様の議論で、 $\psi'=-\frac{9y}{4x}$, $\psi''=-\frac{9}{4x^3}$			$x\neq 0$ ならば、 $g_x\neq 0$. このとき、 $x=\pm 3, y=0$. $g(x,y)=0$ が定義する陰関数を $x=\psi(y)$ とし、 $G(y)=f(\psi(y),y)$ とおく. 同様の議論で、 $\psi'=-\frac{9y}{4x}$, $\psi''=-\frac{9}{4x^3}$		
$G'=-\frac{9y}{4x}, \quad G''=\frac{81x^y}{8x^2}-2-\frac{9}{2x^2}, \quad G''(0)=-\frac{5}{2}<0$			$G'=-\frac{9y}{4x}, \quad G''=\frac{81x^y}{8x^2}-2-\frac{9}{2x^2}, \quad G''(0)=-\frac{5}{2}<0$		
よって、 $f(\pm 3,0)=9$ は極大値.			よって、 $f(\pm 3,0)=9$ は極大値.		
(4) 点 $(1,0)$ から曲線 $y^2-x^3=0$ への最短距離を求めよ.			(4) 点 $(1,0)$ から曲線 $y^2-x^3=0$ への最短距離を求めよ.		
コラム. 因みに、この問題は、高校数学の範囲で解ける. 要は、 $y^2=x^3$ を満たす、 (x,y) に対し、 $(1,0)$ との距離 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ を最小にするような (x,y) を求め、距離の最小値を求めよという問題である. まず、 $x\cdot x^2=y^2\geq 0$ より、 $x\geq 0$ に注意せよ. そこで $(1,0)$ と (x,y) の距離の2乗を $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ とおくと、 $y^2=x^3$ ゆえ、 $f(x,y)$ に代入しすれば $F(x)=x^3+(x-1)^2$ を得る. $F'(x)=0$ の解は $x\geq 0$ に注意すると $x=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ であり、増減表から $x=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ で最小値を取ることが分かる. このとき、 $y=\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)^3}$ であり、最短距離は			コラム. 因みに、この問題は、高校数学の範囲で解ける. 要は、 $y^2=x^3$ を満たす、 (x,y) に対し、 $(1,0)$ との距離 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ を最小にするような (x,y) を求め、距離の最小値を求めよという問題である. まず、 $x\cdot x^2=y^2\geq 0$ より、 $x\geq 0$ に注意せよ. そこで $(1,0)$ と (x,y) の距離の2乗を $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ とおくと、 $y^2=x^3$ ゆえ、 $f(x,y)$ に代入しすれば $F(x)=x^3+(x-1)^2$ を得る. $F'(x)=0$ の解は $x\geq 0$ に注意すると $x=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ であり、増減表から $x=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$ で最小値を取ることが分かる. このとき、 $y=\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)^3}$ であり、最短距離は		
$\min_{x\geq 0}\sqrt{(x-1)^2+x^3}=\sqrt{\frac{47-14\sqrt{7}}{27}}=0.607346\dots$			$\min_{x\geq 0}\sqrt{(x-1)^2+x^3}=\sqrt{\frac{47-14\sqrt{7}}{27}}=0.607346\dots$		
ラグランジュの未定乗数法を用いると面倒臭くなり、現実問題には適さない場合もあるが、一般的な条件下での極値問題に対しては強力な武器である. 次にラグランジュの未定乗数法を用いた解答を以下に示そう.			ラグランジュの未定乗数法を用いると面倒臭くなり、現実問題には適さない場合もあるが、一般的な条件下での極値問題に対しては強力な武器である. 次にラグランジュの未定乗数法を用いた解答を以下に示そう.		

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見たい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.45
未定乗数法を用いた解答 $g = -x^3 + y^2 = 0, \quad f = (x - 1)^2 + y^2 \text{ とおく.}$ $\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ y^2 = x^3 \end{cases} \begin{cases} 2(x - 1) - 3\lambda x^2 \\ 2y(1 + \lambda) = 0 \\ y^2 = x^3 \end{cases} \quad \text{今, } y = 0 \text{ なら } x = 0 \text{ とな}$ り, この場合は $(1, 0)$ との距離は 1 なので, $(x, y) \neq (0, 0)$ として, f の最小値を求め, それが 1 より大きいかわかりかを調べれば良い. こうして, 以後は, $y \neq 0$ とする. このとき, $g_y \neq 0$ なので, $g(x, y) = 0$ で定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する (実は, $y = x\sqrt{x}$ 又は $y = -x\sqrt{x}$ が陰関数である). $F(x) = f(x, \varphi(x))$ とおく. $\varphi' = \frac{3x^2}{2y}$ $\varphi'' = \frac{3x}{4y}$ $F'(x) = 3x^2 + 2x - 2 \quad \therefore F'(\alpha) = 0, \quad \text{where, } \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}$ $F''(x) = 2 + \frac{9}{4}(2x - y) + 1 \quad \therefore F''(\alpha) = 2 + \frac{9\alpha}{4}(2 \mp \sqrt{\alpha}) > 0$ こうして, $f = (x - 1)^2 + y^2$ は $(\alpha, \pm\alpha\sqrt{\alpha})$ で最小値 $f(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ をとる. 以下省略する. 練習問題 15. $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) という条件の下で $x^4 + y^4$ の最大値を $f(a)$ とする. 又, $x^4 + y^4 = b^4$ ($b > 0$) という条件の下で $x^2 + y^2$ の最大値を $g(b)$ とする. このとき, 曲線 $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (t > 0)$ はどのような図形か. <u>実際は, 放物線 $y^2 = 2x$ の第 1 象限の部分である.</u> まず, $f(a)$ を求める. $4x^3 + 2\lambda x = 0$ $4y^3 + 2\lambda y = 0$ $x^2 + y^2 = a^2$ $\therefore (x, y) = (0, \pm a), (\pm a, 0), (\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{a}{\sqrt{2}}), (\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \mp \frac{a}{\sqrt{2}})$ よって, $f(a) = \max_{x^2+y^2=a^2} (x^4 + y^4) = a^4$ 次に $g(b)$ を求める. $2x + 4\lambda x^3 = 0$ $2y + 4\lambda y^3 = 0$ $x^4 + y^4 = b^4$ $\therefore (x, y) = (0, \pm b), (\pm b, 0), (\pm \frac{b}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt[4]{2}}), (\pm \frac{b}{\sqrt[4]{2}}, \mp \frac{b}{\sqrt[4]{2}})$ よって, $g(b) = \max_{x^4+y^4=b^4} (x^2 + y^2) = \sqrt{2}b^2$ $\begin{cases} x = t^4 \\ y = \sqrt{2}t^2 \end{cases} \quad \therefore y^2 = 2x$ 練習問題 16. 媒介変数表示される曲線 $C: \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \cdots (i) \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \cdots (ii) \end{cases} \quad (a > 0)$			において t を消去して x, y の方程式 $g(x, y) = 0$ の形で表せ. 又, この $g(x, y) = 0$ の下で, $f(x, y) = x^2 + y^2$ の極値を求めよ. まず, $y = tx$, $\therefore t = \frac{y}{x}$. これを (i) に代入して, $(1 + t^3)x = 3at \implies x \left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right) = 3a \frac{y}{x} \implies x^3 + y^3 = 3axy$ $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \quad (a > 0)$ (以下は練習問題 1 3 を見よ) $g_x = 3x^2 - 3ay, \quad g_y = 3y^2 - 3ax, \quad g_{xx} = 6x, \quad g_{yy} = 6y, \quad g_{xy} = -3a$ $f_x = 2x + 1, \quad f_y = 2y + 1, \quad f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$ $\begin{cases} 2x + 3\lambda(x^2 - ay) = 0 \\ 2y + 3\lambda(y^2 - ax) = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 2x(y^2 - ax) - 2y(x^2 - ay) = 0 \\ x^3 + y^3 = 3axy \end{cases}$ $(x - y) \{xy + a(x + y)\} \quad \therefore x = y \text{ or } xy + a(x + y) = 0$ 次に, $x^3 + y^3 = 3axy$ を満たす (x, y) に対し, $(x, y) \neq (0, 0)$ ならば $xy + a(x + y) \neq 0$であることを示す. 実際, $xy + a(x + y) = 0, \quad xy = -a(x + y)$ $\therefore x^3 + y^3 - 3axy = (x + y)3 - 3xy(x + y + a)$ $= (x + y)^3 + 3a(x + y)(x + y + a)$ $= (x + y) \{ (x + y)^2 + 3a(x + y) + 3a^2 \} = 0$ $(x, y) \neq (0, 0)$ より, $u = x + y$ とおくと, $u^2 + 3au + 3a^2 = 0 \text{ 判別式 } D = -3a^2 < 0$ これは, u が実数であることに反する. よって, $x + y = 0$. 以上より $x = y$ または $x + y = 0$. $x + y = 0$ なら, $x^3 + y^3 = 3axy$ に代入すると, $x = 0$ または $y = 0$. よって, $(x, y) = (0, 0)$. $x = y$ なら, $x = y = \frac{3a}{2}$ または $(0, 0)$. $0 \leq x^2 + y^2 \leq \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{2}$ よって, $\max_{g(x,y)=0} (x^2 + y^2) = \frac{9a^2}{2}, \quad \min_{g(x,y)=0} (x^2 + y^2) = 0$		
和上大雪の独り言 数学の学習に問題を自力で解くことは最重要です. いくら, 理論が分かった積りでも問題が解けなければ真に解ったとはいえません. 教科書の演習問題は答えが出るものしか扱っておりません. 従って, 必ず, 答に辿り着けます. しかし, 数学の研究はそういうものではありません. 問題を発見し, 既存の数学理論を駆使して解決の糸口を探り最終的には解決することを目的としています.					
学籍番号			氏名		評点
No.			名		点

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.46
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

20 2変数の積分学（重積分の計算法）

20.1 2重積分の大雑把な定義

$I = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ を矩形（区間の2次元版）という.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

をそれぞれ区間 $[a, b]$ および $[c, d]$ の分割とし,

$$\Delta_{ij} := \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

とおく.

Δ_{ij} は $(x_{i-1}, y_{j-1}), (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_j), (x_{i-1}, y_j)$ を頂点とする長方形の内部および周囲からなる部分である（これも矩形である）.

$$\Delta := \{\Delta_{ij} \mid 0 \leq i \leq m, \ 0 \leq j \leq n\}$$
$$|\Delta_{ij}| := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$|\Delta| := \max_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} |\Delta_{ij}|$$

とおく. Δ を矩形 I の分割といい, $|\Delta|$ を分割の大きさという. 容易に

$$I = [a, b] \times [c, d] = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} \Delta_{ij}$$

が分かる. 今, $f(x, y)$ を矩形 I で連続な関数とする. I の小分割 Δ_{ij} の内部から適当に点 $(\xi_i, \eta_j) \in \Delta_{ij}$ をとり,

$$S_\Delta = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} f(\xi_i, \eta_j) |\Delta_{ij}|$$

とおく. $\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \Delta \text{ 全ての分割}}} S_\Delta$ が矩形 I の全ての分割 Δ に対して収束する（有限確定値）とき, その極限値を

$$\iint_I f(x, y) \, dx dy$$

とかき, $f(x, y)$ の矩形 I での2重積分又は重積分という. 即ち,

$$\lim_{\substack{|\Delta| \rightarrow 0 \\ \Delta \text{ 全ての分割}}} S_\Delta = \iint_I f(x, y) \, dx dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) \, dx dy$$

20.2 区間上の定積分を2回繰り返した2重積分

矩形 $I = [a, b] \times [c, d] = \{a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ に対し, 矩形 I の2重積分の計算については, 説明は省くが以下に従うこととする.

定理 18 (累次積分).

$$\begin{aligned} \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) \, dx dy &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \end{aligned}$$

(積分の順序交換可能)

コラム. このように1変数関数の積分を2回繰り返すので2重積分という. 領域の形も区間から矩形に変わる. 特別な形の領域のときに2重積分は計算可能であり, 一般の領域では2重積分の計算は容易でない（計算方法も見つかっていないケースもある）. とは言え, 2重積分が容易に計算できる場合は限られていることに注意せよ.

定義 21.

- $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

を縦線領域という.

- $E = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \ c \leq y \leq d\}$

を横線領域という.

例. 縦線領域 D において $g_1(x) = c, \ g_2(x) = d$ とおけば, $D = [a, b] \times [c, d]$ である.

一般に, 縦線領域 D および横線領域 E に対する2重積分は次の累次積分で計算を実行する.

定理 19.

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$
$$\iint_E f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

20.3 縦線領域および横線領域と2重積分の計算例

例題 52. (1)

$$\begin{aligned} \iint_{[0, 1] \times [0, 1]} xy \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2) $D = \{0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq x\}$ のとき,

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_{x^2}^x y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\int_{x^2}^x y \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - x^6) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{35} \end{aligned}$$

(3) $D = \{1 \leq x \leq 2, \ x \leq y \leq x^2\}$ のとき,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y}{x}} \, dx dy &= \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} e^{\frac{y}{x}} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_x^{x^2} \right) dx \\ &= \int_1^2 x (e^x - e) \, dx = \left[(x-1)e^x - \frac{ex^2}{2} \right]_1^2 \\ &= e^2 - \frac{3}{2}e \end{aligned}$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.47
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 53. (1) $E = \{y^3 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ のとき

$$\begin{aligned}\iint_E x^2 y^3 \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^3}^y x^2 y^3 \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(y^3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{y^3}^y \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^6}{3} - \frac{y^{12}}{3} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{2}{91}\end{aligned}$$

(2) $E = \{y \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$ のとき,

$$\begin{aligned}\iint_E x e^{x^2-y} \, dx dy &= \iint_E x e^{x^2} \cdot e^{-y} \, dx dy \\ &= \int_0^1 e^{-y} \left(\int_y^{\sqrt{y}} x e^{x^2} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 e^{-y} \left(\left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_y^{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-y} \left(e^y - e^{y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - e^y) \, dy \\ &= \frac{2-e}{2}\end{aligned}$$

例題 54.

$$D = \{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\} = \left\{ -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

に対し,

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2 \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 \, dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \, dx \\ &\stackrel{t=\sqrt{1-x^2}}{=} \frac{2}{3} \int_0^1 t^4 \, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

例題 55.

$$D = \{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$$

に対し,

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x) \, dx + \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 \, dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

20.4 変数変換とヤコビアン (ヤコビ行列式)

復習 (置換積分). $a \leq x \leq b$ とする. $x = \varphi(t)$ と変数変換 (置換) したとき, t の範囲が $\alpha \leq t \leq \beta$ とする. このとき, 区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \underline{\varphi'(t)} \, dt$$

であった. この公式の 2 変数版について考察する.

例.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$f(x, y)$ を (x, y) -平面の領域 D で定義された連続関数とする. D が縦線領域または横線領域の場合は, 前に見たように 2 重積分 $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ は逐次積分で計算できた.

D が縦線領域でも横線領域でもない場合, もし, 適当な座標変換

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

で, 変数 (u, v) が縦線領域または横線領域 (Ω とおく) 内を動くなら,
 Ω 上の積分は逐次積分で計算できる事になる.

定理 20.

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx dy &= \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v)) \, dx dy \\ &= \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v))) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv\end{aligned}$$

ここに,

$$dx dy = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$\text{但し, } \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

定義 22.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

を座標変換 (変数変換) のヤコビ行列 (ヤコビアン) という.

注意 41. 特に, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\}$ の時は, 極座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R)$$

により,

$$dx dy = r \, dr \, d\theta.$$

実際,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \therefore \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$\therefore \iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \right) d\theta$$

例題 56.

$$\begin{aligned}\iint_{\{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}} xy \, dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (r \cos \theta) \cdot (r \sin \theta) r \, dr \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{2} \, d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.48
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 57. $I = \iint_{\{0 \leq x-y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1\}} xy \, dx dy$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \quad \text{とおくと,}$$
$$u = x + y, \, v = x - y \quad (0 \leq u \leq 1, \, 0 \leq v \leq 1)$$
$$\begin{aligned} \therefore I &= \iint_{\{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}} \left(\frac{u^2 - v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \, dudv = \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\int_0^1 (u^2 - v^2) \, dv\right) du \\ &= \int_0^1 \left[u^2 v - \frac{1}{3} v^3\right]_0^1 du = \frac{1}{8} \int_0^1 \left(u^2 - \frac{1}{3}\right) du \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

例題 58. $I = \iint_{\{x^2+y^2 \leq R\}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy.$

極座標変換

$$x = r \cos t, \, y = r \sin t \quad \text{とおくと,} \quad 0 \leq r \leq R, \, 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$\begin{aligned} I(R) &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, dt\right) dr = \int_0^R r e^{-r^2} \left(\int_0^{2\pi} dt\right) dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \iint_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} I(R) \\ &= \pi \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \iint_{\{|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R, |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R\}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dy\right) dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-y^2} \, dy\right) dx \\ &= \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-y^2} \, dy\right) \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \, dx \\ &= \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \, dx\right)^2 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} I_2(R) &= \iint_{\{|x| \leq R, |y| \leq R\}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx\right)^2 \end{aligned}$$

ここで,

$$\left\{|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R, |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} R\right\} \subset \{x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \{|x| \leq R, |y| \leq R\}$$

かつ被積分関数 $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ より, つぎの不等式:

$$I_1(R) \leq I(R) \leq I_2(R)$$

が成立する.

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \, dx\right)^2 &\leq \iint_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx\right)^2 \\ I(R) &= \pi(1 - e^{-R^2}) \quad \text{より,} \\ \left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2} R}^{\frac{\sqrt{2}}{2} R} e^{-x^2} \, dx\right)^2 &\leq \pi(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx\right)^2 \end{aligned}$$

そこで, $R \rightarrow \infty$ とすれば, $\pi(1 - e^{-R^2}) \rightarrow \pi$ なので,

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx\right)^2 &\leq 2\pi \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx\right)^2 \\ \therefore \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx\right)^2 &= \pi \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 1 \end{aligned}$$

注意 42.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 1$$

において, $x = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ と変数変換すれば, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ より,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \, dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}} \, dt \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \, dx &= 1 \end{aligned}$$

コラム. 関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ は平均 μ 標準偏差 σ (または分散 σ^2) の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数である.

例題 59. $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ に対し,

$$x = r \cos \theta, \, y = r \sin \theta \quad \left(0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,

$$dx dy = r dr d\theta$$

より

$$\begin{aligned} \iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} d\theta\right) r \, dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{-1}(\tan \theta) d\theta\right) r \, dr \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta\right) \cdot \int_0^1 r \, dr \\ &= \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$

例題 60. $D = \{0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ に対し,

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx dy$$

を計算しよう. $x = r \cos \theta, \, y = r \sin \theta$ と変換すれば

$$dx dy = r dr d\theta, \quad \{(r, \theta) : -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 1 \leq r \leq 2\}$$

$$\therefore I = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr\right) d\theta = \left(\int_1^2 \frac{dr}{r}\right) \left(\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\right) = \pi \log 2$$

学籍 番号		氏		評 点	
	No.	名			

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.49
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

21 線積分の話

21.1 線積分と置換積分

2 変数連続関数 $f(x, y)$ の積分はは 4 章で扱ったような縦線領域や横線領域のような領域 D での 2 重積分

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

のほかに、曲線 C 上での積分

$$\int_C f(x, y) \, dx \quad \text{および} \quad \int_C f(x, y) \, dy$$

が定義される．このような $f(x, y)$ の曲線上の積分を線積分という．

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

を（区分的に滑らかな）曲線とする（即ち、区間 $[a, b]$ 内の有限個の点を除き、

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \right) \neq (0, 0)$$

とする．1 変数の置換積分の応用として

定義 23.

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) \, dx &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} \, dt = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\varphi(t)}{dt} \, dt \\ \int_C f(x, y) \, dy &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \, dt = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\psi(t)}{dt} \, dt \end{aligned}$$

例題 61. $C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$ に対し、

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 \, dx &= \int_0^1 t \cdot (t^2)^2 \cdot 1 \, dt = \int_0^1 t^5 \, dt = \frac{1}{6} \\ \int_C xy^2 \, dy &= \int_0^1 t \cdot (t^2)^2 \cdot (2t) \, dt = 2 \int_0^1 t^6 \, dt = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

例題 62. $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq \pi)$ に対し、

$$\begin{aligned} \int_C (y^2 \, dx + x^2 \, dy) &= \int_0^\pi \sin^2 t \cdot \frac{dx}{dt} \, dt + \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt} \, dt \\ &= \int_0^\pi (-\sin^3 t) \, dt + \int_0^\pi (\cos^3 t) \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\pi \sin^3 t \, dt = - \int_0^\pi \sin^2 t \cdot \sin t \, dt = \int_0^\pi (1 - \cos^2 t)(\cos t)' \, dt \\ &\stackrel{u=\cos t}{=} \int_1^{-1} (1 - u^2) \, du = - \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du = -2 \int_0^1 (1 - u^2) \, du \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \cos^3 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^3 t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt \stackrel{u=\pi-t}{+} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3(\pi - u) \, (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 u \, (-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u \, du = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_C (y^2 \, dx + x^2 \, dy) = I + J = -\frac{4}{3} + 0 = -\frac{4}{3}$$

21.2 線積分と面積分の関係

xy -平面上の連続な曲線

$$C : \begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

（但し、 $\varphi(t), \psi(t)$ は $[a, b]$ で連続な関数）に対し、

注意 43. 写像の言葉で述べると、

$$\Phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{を} \quad \Phi(t) = ((\varphi(t), \psi(t)), \, t \in [a, b])$$

で定義する．このとき、 $C = \Phi([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$ である．曲線を写像と見るか、写像による像と見るかは本稿では特に区別しないで、適当に使い分ける．

定義 24. ▶ $A = (\varphi(a), \psi(a))$ を曲線 C の始点といい、

$B = (\varphi(b), \psi(b))$ を C の終点という．始点および終点のことを端点という．

▶ C が単純曲線とは C が自分自身と交わらないとき．

即ち、 $a < t_1, t_2 < b$ ($t = a, b$ は除く) に対し

$$(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2)) \implies t_1 = t_2$$

これは、写像 $\Phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が一対一であることを意味する．が成立するとき．

▶ C が閉曲線とは C の始点と終点が一一致する、即ち、

$$A = B \iff (\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b)) \iff \Phi(a) = \Phi(b)$$

が成立するとき．

▶ 単純閉曲線とは閉曲線（始点＝終点）であり、それ以外は自分自身と交わらない曲線（例えば、円周や正方形の周囲など）

▶ 単純閉曲線の向きは「反時計回り」を正の向きという．「時計回り」を負の向きという．

▶ $+C$ は C に正の向きをつけた曲線を指し、 $-C$ は C に負の向きがついた曲線（± は C の向きを示す記号である）

定義 25 (曲線の連結)．二つの曲線 C_1, C_2 の連結とは

$$C_1 : \begin{cases} x = x(t) = \varphi_1(t) \\ y = y(t) = \psi_1(t) \\ (a \leq t \leq b) \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x = x(t) = \varphi_2(t) \\ y = y(t) = \psi_2(t) \\ (c \leq t \leq d) \end{cases}$$

に対し、

$$(\varphi_1(b), \psi_1(b)) = (\varphi_2(c), \psi_2(c))$$

なる曲線で $C_1 + C_2$ で表す．特に、連結曲線 $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ においては C_i の終点 = C_{i+1} の始点 ($1 \leq i \leq n-1$) である．

例. x -軸上の原点と $(1, 0)$ を結ぶ線分 C :

$$C : \begin{cases} x = t \quad (0 \leq t \leq 1) \\ y = 0 \end{cases} \implies -C : \begin{cases} x = 1 - t \quad (0 \leq t \leq 1) \\ y = 0 \end{cases}$$

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.50
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

例題 63. 座標平面の4点を次の順番でつないで得られる曲線（折れ線） $(a, c) \xrightarrow{C_1} (b, c) \xrightarrow{C_2} (b, d) \xrightarrow{C_3} (a, d) \xrightarrow{C_4} (a, c)$ は正の向きで表すと

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = c \\ (a \leq t \leq b) \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t \\ (c \leq t \leq d) \end{cases} \quad C_3 : \begin{cases} x = a + b - t \\ y = d \\ (a \leq t \leq b) \end{cases}$$
$$C_4 : \begin{cases} x = a \\ y = c + d - t \\ (c \leq t \leq d) \end{cases} \quad -C_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t \\ (c \leq t \leq d) \end{cases} \quad -C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = d \\ (a \leq t \leq b) \end{cases}$$

今、これら直線の連結 $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ は単純閉曲線であり、 C が囲む有界な部分（内側） R は矩形（長方形）である． C は内部 Q を「左に見るように向きづけられている」．

定義 26. このように領域の境界として表される曲線は領域を左に見る向きを正の向きと定義する．

例題 64. 円周 $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ $\therefore -C : \begin{cases} x = \cos(2\pi - t) = \cos t \\ y = \sin(2\pi - t) = -\sin t \\ (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$

例題 65. $y = x$ と $y = x^2$ で囲まれる部分 $D = \{0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1\}$ の境界を記号 ∂D で表そう．そうすれば

$$\partial D = C_1 + C_2$$

但し、 $C_1 : \begin{cases} x = t \ (0 \leq t \leq 1) \\ y = t^2 \end{cases}$ $C_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \ (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$

コラム．一般に領域 D の境界 $C = \partial D$ としたとき、 C は正の向きが指定されている．特に負の向きを考えたいなら、領域 D の境界は $-\partial D$ 又は $-C$ と表す．例題 2 8 に於いて、 $\partial D = C_1 + C_2$ と表記したときは必然的に C_1, C_2 は正の向き（領域を左に見る向き又は反時計回り）とみなす．

コラム．大雑把に云えば 1 変数の積分学の基本定理

$$\int_a^b f'(x) dx = \left[f(x) \right]_a^b = f(b) - f(a)$$

の 2 重積分版がグリーン・ストークス（Green-Stokes）の定理である．つまり、区間 $[a, b]$ 上の積分は $[a, b]$ の境界点 $\{a, b\}$ での関数値で表され、一方、領域 D での 2 重積分は領域の境界 ∂D 上の境界積分（線積分）で表される．

さて、 $f(x, y)$ は 2 階連続微分可能（ C^2 -クラス）とする．定義域はその都度指定するので、しばらく考えないでよい．

補題 1. $R = [a, b] \times [c, d]$ に対して

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial x} \textcolor{blue}{dx} \textcolor{blue}{dy} = \int_{\partial R} f(x, y) \textcolor{blue}{dy} \quad \cdots \quad (5.2.1)$$

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} \textcolor{blue}{dx} \textcolor{red}{dy} = - \int_{\partial R} f(x, y) \textcolor{blue}{dx} \quad \cdots \quad (5.2.2)$$

∂I は矩形 I の周で向きは矩形 I の内部を右にみる向き（正の向き）という．

このとき、 $\partial R = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ （例題 2 6）

証明（略証）．

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial f}{\partial x} \textcolor{red}{dx} \textcolor{red}{dy} &= \iint_{[a, b] \times [c, d]} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\left[f(x, y) \right]_a^b \right) dy = \int_c^d \textcolor{red}{(f(b, y) - f(a, y)) dy} \end{aligned}$$

今、

$$\begin{aligned} \int_c^d f(b, y) dy &= \int_{\{x=b, \ c \leq y \leq d\}} f(x, y) dy = \int_{C_2} f(x, y) dy \\ \int_c^d f(a, y) dy &= \int_{\{x=a, \ c \leq y \leq d\}} f(x, y) dy = \int_{-C_4} f(x, y) dy \end{aligned}$$

一方、 $-C_4 : x = a, y = c + d - t \ (c \leq t \leq d)$ である（例題 2 6）．こうして

$$\begin{aligned} \int_{-C_4} f(x, y) dy &= \int_c^d f(a, c + d - t)(-dt) = - \int_c^d f(a, c + d - t) dt \\ &\stackrel{s=c+d-t}{=} - \int_d^c f(a, s)(-ds) = - \int_c^d f(a, s) ds \\ &= - \int_c^d f(a, x) dx = - \int_{C_4} f(x, y) dx \\ \therefore \int_{-C_4} f(x, y) dy &= - \int_{C_4} f(x, y) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_c^d \textcolor{red}{(f(b, y) - f(a, y)) dy} &= \int_c^d f(b, y) dy - \int_c^d f(a, y) dy \\ &= \int_{C_2} f(x, y) dy - \int_{-C_4} f(x, y) dy \\ &= \int_{C_2} \textcolor{red}{f(x, y) dy} + \int_{C_4} \textcolor{red}{f(x, y) dy} \end{aligned}$$

一方、 $C_1 : \{x = t \ (a \leq t \leq b), y = b\}$ より、 $dy = 0 \cdot dy$

$$\therefore \int_{C_1} f(x, y) dy = \int_c^d f(t, b) \cdot 0 \cdot dy = \int_c^d 0 dy = 0$$

同様に、

$$\int_{C_3} f(x, y) dy = 0$$

以上より

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \textcolor{red}{f(x, y) dy} &= \int_{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} f(x, y) dy \\ &= \int_{C_1} f(x, y) dy + \int_{C_2} f(x, y) dy + \int_{C_3} f(x, y) dy + \int_{C_4} f(x, y) dy \\ &= \int_{C_2} \textcolor{red}{f(x, y) dy} + \int_{C_4} \textcolor{red}{f(x, y) dy} \\ &= \int_c^d \textcolor{red}{(f(b, y) - f(a, y)) dy} \\ &= \iint_R \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \textcolor{red}{dx} \textcolor{red}{dy} \end{aligned}$$

こうして (5.2.1) は示された．(5.2.2) も同様にして示される． □

定理 21 (Green-Stokes の定理)． $f(x, y), g(x, y)$ は区分的に滑らかな単純閉曲線で囲まれる領域 D および境界 ∂D （正の向き）上で全微分可能とする．そのとき、

$$\iint_D \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} f(x, y) dy + g(x, y) dx$$

注意 44. 定理 1 0 において、 $f(x, y) = x, g(x, y) = -y$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= 2. \\ \therefore \iint_D dx dy &= \frac{1}{2} \left(\int_{\partial D} x dy - y dx \right) \end{aligned}$$

学籍 番号		氏		評 点	
	No.	名			

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.51
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

さて、2重積分の定義から $\mu(D) = \iint_D dx \, dy$ の値は D の面積であることが分かる。 <u>コラム</u>. $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ (円版) に対し, $\partial D = \{x^2 + y^2 = a^2\}$ (反時計回りの正の向き) ゆえ $C = \partial D : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = \sin t \\ (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$ とパラメータ表示できる. 故に, D の面積は $\begin{aligned} \mu(D) &= \iint_D dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x \, dy - y \, dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \, dt \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$ 例題 66. $D = \{0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1\}$ に対し 2 重積分 $\iint_D x^2 y \, dx dy$ をグリーン・ストークスの定理を使って計算する. 実際, 領域 D を xy-平面に図示すれば分かるが, D の境界 (正の向き) は $\partial D = C_1 + C_2, \quad C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ (0 \leq t \leq 1) \end{cases}, \quad C_2 = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$ グリーン・ストークスの定理より, $\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 y}{3} \right) \, dx dy = \int_{\partial D} \frac{x^3 y}{3} \, dy \\ &= \int_{C_1 + C_2} \frac{x^3 y}{3} \, dy = \int_{C_1} \frac{x^3 y}{3} \, dy + \int_{C_2} \frac{x^3 y}{3} \, dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \cdot t^2 \cdot (2t) \, dt + \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - t)^3 \cdot (1 - t)(-dt) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 t^6 \, dt - \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - t)^4 \, dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{5} (1 - t)^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{21} - \frac{1}{15} = \frac{1}{35} \end{aligned}$ 勿論, グリーン・ストークスの定理を用いなくて直接 2 重積分した方が遥かに簡単! $\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x^2 y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (x^4 - x^6) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{35} !! \end{aligned}$ <u>コラム</u>. グリーン・ストークスの定理は理論的には強力な武器ではあるが, 具体的な 2 重積分や線積分の計算に対して有用であるとは限らない. どちらかといえば, 効率が悪いと言った方が良いかも知れない.	22 2 変数関数の広義積分 (概説) 復習. 大雑把に云えば (以下の右辺の積分が収束するときのみ意味がある) ▶ $\int_0^\infty f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) \, dx \quad (R > 0)$ ▶ $\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) \, dx \quad (R > 0)$ ▶ $\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx \quad (\epsilon > 0)$ ▶ $\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{a+\epsilon}^R f(x) \, dx \quad (\epsilon > 0, R > 0)$ 大抵は上記の方法で計算できる (正確な理論はここでは省く) 例. ▶ $\int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x^2} \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-R^2}}{2} = \frac{1}{2}$ ▶ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2$ この 2 重積分版について概説する. $\mathbb{R}^2 = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$ を xy-平面全体を表す. 今, $D(R) = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とおくと, $\lim_{R \rightarrow \infty} D(R) = \bigcup_{R > 0} D(R) = \mathbb{R}^2$. そこで $0 < R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots$ なる $\{R_n\}$ に対して, $D(R_i) = \{x^2 + y^2 \leq R_i^2\}$ とおくと, $D(R_1) \subset D(R_2) \subset \dots \subset D(R_n) \subset \dots \rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty D(R_n) = \mathbb{R}^2$ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D(R)} f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D(R_n)} f(x, y) \, dx dy$ 単調に増大する領域の族 $\{D_n\}$ が領域 D に収束するとき, 即ち, $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ のとき, $\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx dy &= \iint_{(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n)} f(x, y) \, dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy \end{aligned}$ 例題 67. $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ かつ $\lim_{n \rightarrow 0} \epsilon_n = 0$ ($0 < \epsilon_n < 1$). $D_n = \{\epsilon_n \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく. $x = r_n \cos \theta, y = r_n \sin \theta, (\epsilon_n \leq r_n \leq 1)$ と極座標変換して $\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \, dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_n \, dr_n}{r_n^\alpha} \right) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2\pi}{2 - \alpha} (1 - \epsilon_n^{2-\alpha}) \right\} \\ &= \frac{2\pi}{2 - \alpha} \quad \text{if } 2 - \alpha > 0 \end{aligned}$ よって, $0 < \alpha < 2$ のとき, $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \, dx dy = \frac{2\pi}{2 - \alpha}$
---	---

学籍 番号		氏		評 点	
	No.	名			

熊本大学 理工医薬系学部		年度講義資料 (* 各節にある注意書きの欄も見たい)			
科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.52
練習問題 17. $R = [0, 1] \times [0, 1] = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$ および $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ に対し, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ を示せ.			$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 2n)^{\alpha - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 + n)^{\alpha - 2}} = 0 \quad (\because \alpha > 2)$ $\therefore I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} = \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}$		
解. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 dx$ $= - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = - \left[\tan^{-1} x \right]_0^1$ $= \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 1 = -\frac{\pi}{4}$ $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right]_0^1 dy$ $= \int_0^1 \frac{1}{y^2 + 1} dy = \left[\tan^{-1} y \right]_0^1$ $= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$			練習問題 19. $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ のとき, $I = \iint_D y \sin(x^2 + y^2) dxdy$ を求めよ.		
以上より $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy$			解. $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ である. $I = \iint_D xy \sin(x^2 + y^2) dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1 - x^2}} xy \sin(x^2 + y^2) dy \right) dx$ $= \int_0^1 \left(\left[-\frac{x}{2} \cos(x^2 + y^2) \right]_0^{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$ $= \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} (\cos 1 - \cos x^2) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x \cos x^2 - x \cos 1) dx$ $= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \cos 1 \right]_0^1$ $= \frac{1}{4} (\sin 1 - \cos 1)$		
コラム. $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ は $(x, y) = (0, 0)$ で不連続である. つまり, $f(x, y)$ は閉矩形 R で不連続である. このことが, 2重積分の順序交換ができない理由である. 2重積分が累次積分で求めることができるためには被積分関数について何らかの制			練習問題 20. $D = \{ x + y \leq 1\}$ に対し $I = \iint_D (x^2 + y) dxdy$ を求めよ.		
練習問題 18. $D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ において, $I = \iint_D \frac{dxdy}{(1 + x + y)^\alpha} = \iint_D (1 + x + y)^{-\alpha} dxdy \quad (\alpha > 2)$ を求めよ.			解. $D = \begin{cases} \{x + y \leq 1\} & \text{if } x \geq 0, y \geq 0 \\ \{-x + y \leq 1\} & \text{if } x < 0, y \geq 0 \\ \{-x - y \leq 1\} = \{x + y \geq -1\} & \text{if } x < 0, y < 0 \\ \{x - y \leq 1\} & \text{if } x \geq 0, y < 0 \end{cases}$ D は $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ を頂点とする正方形の内部 (境界含む) である. D は左半分 D_1 と右半分 D_2 に分割できる, 即ち, $D = D_1 \cup D_2$. (各自, 図示してみよ) $D_1 = \{-1 \leq x \leq 0, -(x + 1) \leq y \leq x + 1\}$ $D_2 = \{0 \leq x \leq 1, -(1 - x) \leq y \leq 1 - x\}$		
解. $D_n = \{0 \leq x \leq n, \quad 0 \leq y \leq n\}$ とおくと, $\dots \subset D_n \subset D_{n+1} \subset \dots$ $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \bigcup_{n=1}^\infty D_n = D$ $I_n := \iint_{D_n} \iint_D \frac{dxdy}{(1 + x + y)^\alpha} = \int_0^n \left(\int_0^n \frac{1}{(1 + x + y)^\alpha} dy \right) dx$ $= \int_0^n \left(\left[\frac{(1 + x + y)^{1 - \alpha}}{1 - \alpha} \right]_0^n \right) dx$ $= \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^n \{ (1 + n + x)^{1 - \alpha} - (1 + x)^{1 - \alpha} \} dx$ $= \frac{1}{1 - \alpha} \left[\frac{(1 + n + x)^{2 - \alpha}}{2 - \alpha} - \frac{(1 + x)^{2 - \alpha}}{2 - \alpha} \right]_0^n$ $= \frac{1}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \{ (1 + 2n)^{2 - \alpha} - (1 + n)^{1 - \alpha} - (1 + n)^{1 - \alpha} + 1 \}$ $= \frac{1}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \{ (1 + 2n)^{2 - \alpha} - 2(1 + n)^{2 - \alpha} + 1 \}$ $= \frac{1}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \left\{ \frac{1}{(1 + 2n)^{\alpha - 2}} - \frac{2}{(1 + n)^{\alpha - 2}} + 1 \right\} \quad (\alpha > 2)$			$I = \iint_{D_1} (x^2 + y) dxdy + \iint_{D_2} (x^2 + y) dxdy$ $= \int_{-1}^0 \left(\int_{-(x + 1)}^{x + 1} (x^2 + y) dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{-(1 - x)}^{1 - x} (x^2 + y) dy \right) dx$ $= \int_{-1}^0 \left(\left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{-(x + 1)}^{x + 1} \right) dx + \int_0^1 \left(\left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{-(1 - x)}^{1 - x} \right) dx$ $= \int_{-1}^0 2x^2(x + 1) dx + \int_0^1 2x^2(1 - x) dx \quad (\text{第1項で } x = -t \text{ とおく})$ $= \int_0^1 2t^2(1 - t) dt + \int_0^1 2x^2(1 - x) dx$ $= 4 \int_0^1 x^2(1 - x) dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$ $= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}$		
学籍 番号		氏 名		評 点	
No.					

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.53
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

練習問題 21. $D = \{0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b \ (-1 < a < b)\}$ のとき,

$$I = \iint_D x^y \, dx dy \quad \text{を求めよ.}$$

コラム. まず, $x^y \stackrel{\text{def}}{=} e^{y \log x}$ であることに注意する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(x^y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{y \log x}) = e^{y \log x} (y \log x)_y = e^{y \log x} (\log x) = \underline{(\log x) x^y} \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{y \log x}) = e^{y \log x} (y \log x)_x = \frac{y}{x} e^{y \log x} \\ &= \frac{y}{x} x^y = y x^{-1} x^y = \underline{x^{y-1}} \end{aligned}$$

解.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^y \, dx dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy = \left[\log(y+1) \right]_a^b = \log(b+1) - \log(a+1) = \log \frac{b+1}{a+1} \end{aligned}$$

練習問題 22. $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ のとき,

$$I = \iint_D \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx dy \quad \text{を求めよ.}$$

復習.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\tan^{-1} \frac{1}{r^2} \right) r \, dr &= \int_0^1 \left(\frac{r^2}{2} \right)' \left(\tan^{-1} \frac{1}{r^2} \right) dr \\ &= \left[\frac{r^2}{2} \left(\tan^{-1} \frac{1}{r^2} \right) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 r^2 \left(\tan^{-1} \frac{1}{r^2} \right)' dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 r^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r^2} \right)^2} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right)' dr \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 r^2 \left(\frac{r^4}{1 + r^4} \right) \left(\frac{-2}{r^3} \right) dr \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2r^3}{r^4 + 1} \, dr = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4r^3}{r^4 + 1} \, dr \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \left[\log(r^4 + 1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\log 2}{4} \end{aligned}$$

解. 極座標変換 $x = r \cos \theta, \ y = r \sin \theta \ (0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に
より,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \tan^{-1} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \tan^{-1} \frac{1}{r^2} r \, dr \right) d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r \tan^{-1} \frac{1}{r^2} \, dr \right) = 2\pi \left(\int_0^1 r \tan^{-1} \frac{1}{r^2} \, dr \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\log 2}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (\pi + 2 \log 2) \end{aligned}$$

練習問題 23. $D = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ のとき,

$$I = \iint_D x e^{y^3} \, dx dy \quad \text{を求めよ.}$$

D は $(0,0), (1,1), (0,1)$ を頂点とする上正三角形の内部および周か
らなる. D は縦線領域と見れば $D = \{0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ であり,
 D を横線領域とみれば $D = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ と表せる. この問
題では D を横線領域と見て累次積分する.

解.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x e^{y^3} \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^y x e^{y^3} \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2}{2} e^{y^3} \right]_0^y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{y^3} \, dy = \frac{1}{6} \left[e^{y^3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} (e - 1). \end{aligned}$$

コラム.

$$\int_0^a \left(\int_{\sqrt{x}}^a f(x,y) \, dy \right) dx = \int_0^a \left(\int_0^{y^2} f(x,y) \, dx \right) dy$$

$$D = \{0 \leq x \leq a^2, \sqrt{x} \leq y \leq a\} = \{0 \leq y \leq a, 0 \leq x \leq y^2\}$$

前者は D を縦線領域と見て, 後者は D を横線領域と見て, 積分の順
序交換した.

練習問題 24. $D = \{0 \leq x - y \leq 2, 0 \leq x + y \leq 2\}$ に対し

$$I = \iint_D (x - y)^2 (x + y)^3 \, dx dy \quad \text{を求めよ.}$$

D は $(0,0), (1,-1), (2,0), (1,1)$ を頂点とする正方形の内部および周か
らなる領域である.

解. $u = x - y, \ v = x + y$ とおくと, $0 \leq u \leq 2, \ 0 \leq v \leq 2\}$.
一方, $x = \frac{u+v}{2}, \ y = \frac{-u+v}{2}$ より $\therefore \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$ ゆえ,
 $dx dy = \frac{1}{2} du dv$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x - y)^2 (x + y)^3 \, dx dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 2 \\ 0 \leq v \leq 2}} u^2 v^3 \left(\frac{1}{2} du dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^2 u^2 v^3 \, dv \right) du = \frac{1}{2} \left(\int_0^2 v^3 \, dv \right) \left(\int_0^2 u^2 \, du \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

練習問題 25.

$$I = \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2} (px^2 + qy^2) \, dx dy \ (a > 0) \quad \text{を求めよ.}$$

解. 極座標変換 $x = r \cos \theta, \ y = r \sin \theta \ (0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ により
 $dx dy = r dr d\theta$ をこうりよすれば

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^2 (p \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta) r \, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (p \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta) d\theta \cdot \int_0^a r^3 \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \{ (p - q) \cos^2 \theta + q \} d\theta \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \left(p \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{p+q}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi(p+q)a^3}{4} \end{aligned}$$

練習問題 26.

$$I = \int_{x^2+y^2=1} e^x (x \cos y - y \cos y) dy + \int_{x^2+y^2=1} e^x (y \cos y + x \sin y) dx = 0$$

$$C = \{x^2 + y^2 = 1\}. \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$P = e^x (x \cos y - y \cos y), \quad Q = e^x (y \cos y + x \sin y)$$

とおく. このとき,

$$I = \int_C (P dy + Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = e^x (\cos y + x \cos y - y \sin y)$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.54
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

23 2変数微分補足問題

練習問題 27. 2変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

が $(x,y)=(0,0)$ で連続になるような α の満たすべき条件を述べよ.

解. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ となるように α の条件を求める問題である.

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とく. $(x,y)\rightarrow(0,0)\iff r\rightarrow0$ より

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{r\rightarrow0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^{2\alpha}} = \lim_{r\rightarrow0} r^{2-2\alpha}(\cos\theta\sin\theta)$$

よって,

$$\lim_{r\rightarrow0} r^{2-2\alpha}(\cos\theta\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } 2-\alpha>0 (\because \alpha<1) \\ \text{不確定} & \text{if } 2-\alpha=0 (\because \alpha=2) \\ \infty & \text{if } 2-\alpha<0 (\because \alpha>1) \end{cases}$$

こうして, $\alpha<1$ のとき $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続になる.

練習問題 28. $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$ を求めよ.

解.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin x + \sin y}{x + y} &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{x+y} \\ &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \cdot \cos\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$t=\frac{x+y}{2}$ とおくと, $(x,y)\rightarrow0$ のとき $t\rightarrow0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} &= \lim_{t\rightarrow0} \frac{\sin t}{t} = 1 \\ \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \cos\frac{x-y}{2} &= 1 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin x + \sin y}{x + y} &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \left(\frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \right) \cdot \left(\cos\frac{x-y}{2} \right) \\ &= \left(\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \right) \left(\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \cos\frac{x-y}{2} \right) \\ &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

練習問題 29.

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

は原点 $(x,y)=(0,0)$ で1階連続微分可能, 即ち, $f(x,y)$ は連続かつ f_x, f_y が存在し f_x, f_y は原点で連続であることを示せ.

(1) $f(x,y)$ は原点で連続である, 即ち, $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ を示せばよい.

実際, $x=r\cos t, y=r\sin t$ とおくと, $(x,y)\rightarrow(0,0)\iff r\rightarrow0$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\rightarrow0} e^{-\frac{1}{r^2}} \stackrel{R=\frac{1}{r}}{=} \lim_{R\rightarrow\infty} e^{-R^2} \\ &= \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{1}{e^{R^2}} = 0 \\ &= f(0,0) \end{aligned}$$

(2) $f_x(0,0)$ が存在し $f_x(x,y), f_y(x,y)$ は原点で連続である.

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\rightarrow0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\rightarrow0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \\ &\stackrel{R=\frac{1}{h}}{=} \lim_{R\rightarrow\infty} R e^{-R^2} = \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R}{e^{R^2}} \stackrel{\text{ロピタル}}{=} \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{1}{2R e^{R^2}} = 0 \end{aligned}$$

よって, 偏微分係数 $f_x(0,0)$ は存在し $f_x(0,0)=0$ である. 同様に, $f_x(0,0)$ は存在し $f_y(0,0)=0$. $f(x,y)$ は $(x,y)\neq(0,0)$ では高階偏微分可能であるので原点についてのみ議論すれば良い.

$$f_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

次に $f_x(x,y)$ の原点での連続性について, $f_x(0,0)=0$ であったので, $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f_x(x,y)=0=f_x(0,0)$ を示せばよい. 実際,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f_x(x,y) &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\rightarrow0} \frac{2r\cos t}{r^4} e^{-\frac{1}{r^2}} = 2\cos t \lim_{r\rightarrow0} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^3} \\ &\stackrel{R=\frac{1}{r}}{=} 2\cos t \lim_{R\rightarrow\infty} R^3 e^{-R^2} = 2\cos t \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R^3}{e^{R^2}} \\ &= 2\cos t \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R^3}{e^{R^2}} \stackrel{\spadesuit}{=} 3\cos t \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R}{e^{R^2}} = 0 \end{aligned}$$

同様に $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f_y(x,y)=0=f_y(0,0)$ こうして, $f_x(x,y), f_y(x,y)$ は原点で連続. つまり, $f(x,y)$ は原点で1階連続偏微分可能である.

コラム. () $\lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R^n}{e^{R^2}}=0$ であることはロピタルの定理から示せる. また,

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\rightarrow0} \frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\rightarrow0} \frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} = \lim_{R\rightarrow\infty} \frac{R^4}{e^{R^2}} \stackrel{\spadesuit}{=} 0$$

同様に $f_{yy}(0,0)=0$. $f_{xy}(0,0)=0$ も分かる.

練習問題 30.

$$f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

について f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ.

解. 演習問題18より

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = f \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \\ f_y &= \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = f \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

であった.

学籍 番号		氏 名		評 点	
	No.				

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.55					
解. $\begin{aligned} f_{xx} &= f_x \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + f \cdot \left(\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right)_x \\ &= f \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f \cdot \left\{ \frac{2(x^2+y^2)^2 - 2x \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \right\} \\ &= f \cdot \frac{4x^2}{(x^2+y^2)^4} + f \cdot \frac{-6x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^4} \\ &= 2f \cdot \frac{2y^4 - (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} \\ \therefore f_{yy} &= 2f \cdot \frac{2x^4 - (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} \text{ (対称性)} \\ f_{xy} &= (f_x)_y = \left\{ f \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right\}_y \\ &= f_y \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + f \cdot \left\{ \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \right\}_y \\ &= f \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + f \cdot \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{4xy}{(x^2+y^2)^4} \cdot f - \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3} \cdot f \\ &= f \cdot \frac{4xy}{(x^2+y^2)^4} \{1 - 2(x^2+y^2)\} \end{aligned}$ (注意) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \text{ が示せ, 結果, } f(x,y) \text{ は 2 階連続微分可}$ 能であることが分かる. 練習問題 31. 次の関数 $f(x,y)$ の偏微分を求めよ. (1) $f = f(x,y) = \tan^{-1} \frac{1}{x^2+y^2} \quad (-\frac{\pi}{2} < f < \frac{\pi}{2})$ 解. $\tan f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ゆえ, 両辺を x で偏微分して $(\cot^2 f(x,y)) f_x = (1 + \tan^2 f) \cdot f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$\therefore \left\{ 1 + \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \right\} f_x = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$f_x = \frac{-2x}{1 + (x^2+y^2)^2} \quad \therefore f_y = f_x = \frac{-2y}{1 + (x^2+y^2)^2} \text{ (対称性)}$ (2) $f = f(x,y) = \cos^{-1} \frac{1}{x^2+y^2} \quad (0 < f < \pi). \text{ (このとき, } \sin f > 0 \text{ に注意!)}$ 解. $\cos f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ゆえ, 両辺を x で偏微分して $(-\sin f) \cdot f_x = -\sqrt{1 - \cos^2 f} \cdot f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$-\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2+y^2)^2}} \cdot f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$f_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)}}$$f_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)}}$ (3) $f = f(x,y) = \sin^{-1} \frac{1}{x^2+y^2} \quad (-\frac{\pi}{2} < f < \frac{\pi}{2}). \text{ このとき, } \cos f > 0 \text{ に注意!)}$ 解. $\sin f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ ゆえ, 両辺を x で偏微分して $(\cos f) \cdot f_x = \sqrt{1 - \sin^2 f} \cdot f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$= \sqrt{1 - \frac{1}{(x^2+y^2)^2}} \cdot f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$\therefore f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)}}$$\therefore f_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)}}$ (4) $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (-\frac{\pi}{2} < f < \frac{\pi}{2}).$ 解. $\tan f = \frac{x}{y}$ の両辺を x で偏微分して $(1 + \tan^2 f) \cdot f_x = \frac{1}{y} \implies \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) f_x = \frac{1}{y}$$\therefore f_x = \frac{y}{x^2+y^2}$$(1 + \tan^2 f) \cdot f_y = -\frac{x}{y^2} \implies \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) f_y = \frac{-x}{y^2}$$\therefore f_y = \frac{-x}{x^2+y^2}$ (5) $f(x,y) = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (-\frac{\pi}{2} < f < \frac{\pi}{2}). \text{ このとき, } \cos f > 0.$ 解. $\sin f = \frac{x}{y}$ の両辺を x で偏微分して $(\cos f) \cdot f_x = \frac{1}{y} \implies \sqrt{1 - \sin^2 f} \cdot f_x = \frac{1}{y}$$\therefore \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} f_x = \frac{1}{y} \quad \therefore f_x = \frac{ y }{y\sqrt{y^2-x^2}}$$\therefore f_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y > 0 \text{)}, \quad f_x = \frac{-1}{\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y < 0 \text{)}$ 一方, $f_y = \frac{ y x}{y^2\sqrt{y^2-x^2}}$$\therefore f_y = \frac{-1}{y\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y > 0 \text{)}, \quad f_y = \frac{1}{y\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y < 0 \text{)}$ (6) $f(x,y) = \cos^{-1} \frac{x}{y} \quad (0 < f < \pi). \text{ このとき, } \sin f > 0.$ 解. $\cos f = \frac{x}{y}$ の両辺を x で偏微分して $(-\sin f) \cdot f_x = \frac{1}{y} \implies -\sqrt{1 - \cos^2 f} \cdot f_x = \frac{1}{y}$$\therefore -\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} f_x = \frac{1}{y} \quad \therefore f_x = -\frac{ y }{y\sqrt{y^2-x^2}}$$\therefore f_x = -\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y > 0 \text{)}, \quad f_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y < 0 \text{)}$$f_y = \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y > 0 \text{)}, \quad f_y = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} \text{ (} y < 0 \text{)}$						学籍 番号		氏 名		評 点
	No.									

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.56
練習問題 32. 以下の関数 $f(x, y)$ に対し変数変換			練習問題 33. 次の関数 $f(x, y)$ の指定された点でのテーラー展開の2次の項までを求めよ.		
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{或いは} \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$			(1) $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{1+x+y}$: 原点 $(0, 0)$.		
をしたとき $f'(t)$, f_u , f_v をそれぞれ求めよ.			<u>解.</u>		
$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{に注意!}$			$f_x = e^{xy} \left\{ \frac{y}{1+x+y} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right\}$ $f_y = e^{xy} \left\{ \frac{x}{1+x+y} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right\}$ $f_{xx} = e^{xy} \left\{ \frac{y^2}{1+x+y} - \frac{2y}{(1+x+y)^2} + \frac{2}{(1+x+y)^3} \right\}$ $f_{xy} = e^{xy} \left\{ \frac{xy}{1+x+y} + \frac{1}{(1+x+y)^2} + \frac{2}{(1+x+y)^3} \right\}$ $f_{yy} = e^{xy} \left\{ \frac{x^2}{1+x+y} - \frac{2x}{(1+x+y)^2} + \frac{2}{(1+x+y)^3} \right\}$ $f(0, 0) = 1, \quad f_x(0, 0) = -1, \quad f_y(0, 0) = -1$ $f_{xx}(0, 0) = 2, \quad f_{xy}(0, 0) = 3, \quad f_{yy}(0, 0) = 2$ $f(x, y) = f(0, 0) + x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0)$ $+ \frac{1}{2} \{ x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0) \} + o(2)$ $\therefore f(x, y) = 1 - x - y + x^2 + 3xy + y^2 + o(2)$		
(1) $f(x, y) = e^x \sin y \quad (x = u + v, y = uv).$			(2) $f(x, y) = \frac{1}{\cos xy} : \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$		
$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & u \end{pmatrix}$			<u>解.</u>		
$f_x = e^x \sin y, \quad f_y = e^x \cos y \text{ より,}$ $f_u = f_x + v f_y = e^{u+v} \sin(uv) + v e^{u+v} \cos(uv)$ $= e^{u+v} (\sin(uv) + v \cos(uv))$ $f_v = f_x + u f_y = e^{u+v} \sin(uv) + u e^{u+v} \cos(uv)$ $= e^{u+v} (\sin(uv) + u \cos(uv))$			$f_x = \frac{y \sin xy}{\cos^2 xy}, \quad f_y = \frac{x \sin xy}{\cos^2 xy}$ $f_{xx} = \frac{y^2(1 + \sin^2 xy)}{\cos^3 xy}, \quad f_{yy} = \frac{x^2(1 + \sin^2 xy)}{\cos^3 xy}$ $f_{xy} = \frac{\sin xy \cos xy + xy(1 + \sin^2 xy)}{\cos^3 xy}$ $f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad f_x\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $f_y\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad f_{xx}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$ $f_{yy}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}, \quad f_{xy}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{4+3\pi}{8}$ $f(x, y) = \sqrt{2} + \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \left(y - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $+ \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \left(y - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \left(\frac{4+3\pi}{8}\right)$ $+ \frac{1}{2} \left(y - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + o(2; \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$		
(2) $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad (x = \cos t, y = \sin t).$			尚, $f(x, y)$ の (a, b) での2次の項までのテーラー展開は以下で与えられる.		
$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ $f_x = 3x^2, \quad f_y = 3y^2 \text{ より,}$ $\frac{df}{dt} = f'(t) = (-\sin t)3x^2 + (\cos t)3y^2 = -3\sin t \cos^2 t + 3\cos t \sin^2 t$ $f'(t) = -3\sin t \cos t (\cos t - \sin t) = -\frac{3}{2} \sin 2t (\cos t - \sin t)$			$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$ $+ \frac{f_{xx}(a, b)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f_{yy}(a, b)}{2!} (y-b)^2$ $+ f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + o(2)$		
(3) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta).$			例. 以下のように高階偏微分係数を求めずしてテーラー展開をあい得られる (テーラー展開の一意性).		
$f_r = \frac{\partial f}{\partial r} = (\cos \theta) f_x + (\sin \theta) f_y, \quad f_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} = (-r \sin \theta) f_x + (r \cos \theta) f_y$ $f_x = \frac{-x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$ $f_r = \frac{-r \cos^2 \theta}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}} + \frac{-r \sin^2 \theta}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}} = -\frac{r}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}}$ $f_\theta = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta}{(1+r^2)\sqrt{1+r^2}} = 0$			$\frac{1}{1-(x+y)} = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3 + \cdots$ $= 1 + (x+y) + (x+y)^2 + o(2)$		
<u>コラム</u> . 実際, $f(x, y)$ に $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を代入すれば $f = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ で θ を変数に含まないので $f_\theta = 0$.					

科 目	総括理工医薬系微積分	授 業 時 間	曜 時 限	担 当 者	石田・大嶋・古島 No.57
-----	------------	---------	-------	-------	----------------

24 重積分補足問題

(1) $D = \left\{ \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1 \quad (a > 0, b > 0) \right\}$ のとき,

$$I = \iint_D \sqrt{y} \, dx dy$$

を求めよ (2重積分の順序交換で計算が楽に求められる).

解.

$$D = \left\{ 0 \leq x \leq a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2, \, 0 \leq y \leq b \right\}$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{y} \, dx dy = \int_0^b \left(\int_0^{a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2} \sqrt{y} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^b \sqrt{y} \left[x \right]_0^{a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2} dy = a \int_0^b \sqrt{y} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 dy \\ &= a \int_0^b \left(\sqrt{y} - \frac{2y}{\sqrt{b}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{b} \right) dy = a \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{b}} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{b} \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^b \\ &= \frac{ab^{\frac{3}{2}}}{15} \end{aligned}$$

(2) $D = \left\{ 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{3}}, \, 0 \leq y \leq 3 \right\}$ (横線領域) のとき,

$$I = \iint_D \log(x^3 - 3x + 3) \, dx dy$$

を求めよ (2重積分の順序交換).

解.

$$D = \{ 0 \leq x \leq 1, \, 3x^2 \leq y \leq 3 \} \quad (\text{縦線領域: 図示すれば分かる})$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \log(x^3 - 3x + 3) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{3x^2}^3 \log(x^3 - 3x + 3) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y \log(x^3 - 3x + 3) \right]_{3x^2}^3 dx \\ &= \int_0^1 (3 - 3x^2) \log(x^3 - 3x + 3) \, dx \\ &\stackrel{t=x^3=3x+3}{=} \int_3^1 \log t \, (-dt) = \int_1^3 \log t \, dt \quad (\because dt = (3x^3 - 3)dx) \\ &= \left[t \log t - t \right]_1^3 = 3 \log 3 - 2 \end{aligned}$$

(3) $D = \{ |x| + |y| \leq 1 \}$ のとき,

$$\int_D (|x| + |y|) \, dx dy$$

を求めよ (領域を正確に図示し縦型もしくは横型領域として表す).

解. D は I, II, III, IV に分割できる, 但し,

$$\begin{cases} I: & x + y \leq 1 & \text{if } x \geq 0, y \geq 0 \\ II: & -x + y \leq 1 & \text{if } x \leq 0, y \geq 0 \\ III: & x + y \geq -1 & \text{if } x \leq 0, y \leq 0 \\ IV: & x - y \leq 1 & \text{if } x \geq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_D (|x| + |y|) \, dx dy = \int_I (|x| + |y|) \, dx dy + \int_{II} (|x| + |y|) \, dx dy \\ &\quad + \int_{III} (|x| + |y|) \, dx dy + \int_{IV} (|x| + |y|) \, dx dy \\ \int_I (|x| + |y|) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y) \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \\ \int_{II} (|x| + |y|) \, dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{1+x} (-x + y) \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \\ \int_{III} (|x| + |y|) \, dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^0 (-x - y) \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \\ \int_{IV} (|x| + |y|) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-1+x}^0 (x - y) \, dy \right) dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

実際は, $f(x, y) = |x| + |y| \geq 0$ および領域の各合同性 (対称性) を考慮すれば

$$\int_D (|x| + |y|) \, dx dy = 4 \iint_I (|x| + |y|) \, dx dy = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

が分かる.

(3)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx dy$$

を求めよ (広義積分).

解. $D_R = \{ x^2 + y^2 \leq R^2 \}$ ($R \geq 0$) とおく.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx dy \\ x &= r \cos \theta, \, y = r \sin \theta \quad (0 \leq r \leq R, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

と極座標変換する. そのとき,

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} I_R &= \iint_{D_R} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{r \, dr}{(1 + r^2)^2} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^R \frac{r \, dr}{(1 + r^2)^2} \right) = 2\pi \left(\frac{-1}{2} \right) \left[\frac{1}{r^2 + 1} \right]_0^R \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{R^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{R^2 + 1} \right) = \pi$$

$$\therefore \quad I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx dy = \pi$$

学籍 番号		氏		評	
	No.	名		点	