熊本学園大学　　令和年度 講義ノート　＊

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.0

目次

学籍番号	No.	氏名		評点	

1　実数および連続関数

1.1　自然数、整数、有理数について

- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集まり (集合) :$\{1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集まり（集合）:$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \pm n, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集まり（集合）$\left\{\dfrac{n}{m} : m, n \text{ は整数で } m \neq 0\right\}$

1.2　小数

- 小数 : 0 と 1 の間にある数で $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ と表記する．但し，各 a_n は $0 \leqq a_n \leqq 9$ を満たす整数
- $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ の $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ を小数部分という．また a_n を小数第 n 位の数という．

例題 1 (小数の型)**.**

(1) 0.141421356, 0.23620679, 0.33（有限小数 : 小数点以下の数が有限個）

(2) $0.333333\cdots$, $0.12121212\cdots$（循環小数 : 小数点以下一定の長さの数が循環して現れる）

(3) $0.14159765\cdots$, $0.123254809\cdots$（非循環小数）

注意 1.　(1) 有限小数は有理数である．また，循環小数も有理数である．

証明 1. 有限小数は $0.a_1a_2\cdots a_n$ $(a_n \neq 0)$(小数 n 位）と表わされるので，

$$
\begin{aligned}
0.a_1a_2\cdots a_n &= 0.a_1 + 0.0a_2 + 0.00a_3 + \cdots + 0.\overbrace{000\cdots0}^{n-1}a_n \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \\
&= \frac{a_1\ 10^{n-1} + a_2\ 10^{n-2} + \cdots + a_n}{10^{n-1}}
\end{aligned}
$$

は有理数である（分母は整数であり分子も整数の和として整数である）．

次に，循環小数が有理数であることを示そう．循環小数を

$$0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n = 0.\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\overbrace{a_1a_2\cdots a_n}\cdots$$

とかく．但し，最後の $a_n \neq 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
0.a_1a_2\cdots\dot{a}_n &= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}} + \cdots \\
&= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{3n}} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} \\
&= \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n - 1} \cdots (*)
\end{aligned}
$$

となり，有理数であることが分かる．但し，最後の式において，無限等比級数の和に関する次の事実を用いた．

定理 1. $|r| < 1$ ならば

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \quad (\because \lim_{n\to\infty} r^n = 0)$$

特に，$r = \dfrac{1}{10^n}$ と置けば最後の式 $(*)$ が得られる．

(2) 有理数 r は整数部分と小数部分に分けたとき，その小数部分は循環小数として表されるもの，即ち，$r = N+$（循環小数），但し，$N \neq 0$ は整数．

(3) 無理数 z は整数部分と小数部分に分けたとき，小数部分が循環しない小数として表されるもの，即ち，$z = N+$（循環しない小数）．

(4) 実数は有理数と無理数からなるり，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は数直線上の点と 1 対 1 に対応する．実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す

以上，４つの数の集合には次の包含関係がある．

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.3　実数数列

実数からなる数列（実数列）$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots, = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

► $\{x_n\}$ が有界とは、全ての番号 n に対し、$|x_n| \leqq M$ となる実数 R が存在するときをいう．

例題 2.

- 実数列 $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．実際、$\dfrac{n}{3^n} < 1$.

証明 2. 不等式 $n < 3^n$ を、数学的帰納法で示す．まず、(I) $n = 1$ のとき、左辺 $= 1$, 右辺 $= 3$ で不等式は成立．(II) $n = k > 1$ のとき、不等式が成立していると仮定する, 即ち、$k < 3^k$ と仮定する．$n = k + 1$ のとき、帰納法の仮定から $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k > k + 1$. このことは、不等式が $n = k + 1$ のとき成立している事を示している．故に、全ての自然数 n に対して、$n < 3^n$, 即ち、$\dfrac{n}{3^n} < 1$ が成立する．　□

定義 1.

- 実数列 $\{x_n\}$ が単調増加であるとは、$x_n \leqq x_{n+1}$ がすべての自然数 n に対して成立するときをいう．逆に，$x_n \geqq x_{n+1}$ が全ての n に対して成立するとき，数列 $\{x_n\}$ は単調減少であるという．

レポート問題 1. 次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{2}{7}$ を循環小数で表せ．

(2) 循環小数 $0.17\dot{4} = 0,174174174\cdots$ を有理数表記せよ．

(3) 数列 $\left\{\dfrac{n^2}{3^n}\right\}$ は有界である．

(4) 数列 $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$ は単調減少である．

1.4　変数と関数

- 変数とはある範囲内にある任意の数を記号で表したもので，x, y 等の記号（文字）を用いる．
- 関数とは，変数 x に対して唯一つの値 y を対応させる規則のことをいう．この対応の規則を x の関数といい $y = f(x)$ とかく．この y を従属変数と呼ぶこともある．
- 関数 $y = f(x)$ が定義できる（有限な値として一意的に確定する）ときの，x が満たすべき条件（範囲）を定義域という．このとき，関数値 $y = f(x)$ が取り得る範囲を値域という

注意 2. (1) 変数 x が $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす，または，$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす変数 x とは 0 以上 1 以下の全ての値をとり得る数を記号で表したもので，x は特定された値を指すものでない．

(2) 変数 x に対して x^2 を対応させる規則を $f(x) = x^2$ とかく．

(3) 関数 $f(x) = x^2$ の定義域は $-\infty < x < \infty = (-\infty, \infty)$（数直線全体 $\mathbb{R}$）である．また，$y = f(x) = x^2 \geqq 0$ より，地域は $\{y \geqq 0\} = [0, \infty)$（半開区間）

(4) $y = f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $\{x : x \geqq 0\}$ である．そのとき，$\sqrt{x} \geqq 0$ より値域は $\{y : y \geqq 0\} = [0, \infty)$

例.

(1) $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$（１次関数）

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$（２次関数）

(3) $f(x) = \sin x,\ \cos x\ \ \tan x$（三角関数）

(4) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$（指数関数）

(5) $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ x > 0)$（対数関数）

1.5 連続関数

定義 2. $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとは，$a \leqq c \leqq b$ に対し，$f(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} f(x) \iff \lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} (f(x) - f(c)) = 0$ のとき

コラム. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a),\ \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ のとき，
$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a)$.
逆は一般には成り立たない．実際，

$$1 = \lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0 \times \infty$$

.

例題 3. $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$ は開区間 $(0, 1)$ で連続である．しかし．$x = 0, 1$ では連続でない．

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

実は $f(x)$ は $x = 0, 1$ では定義できない．大学初年次で扱う関数の多くは連続関数である．

例題 4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{if} \quad x \neq 0 \\ A & \text{if} \quad x = 0 \end{cases}$ が $x = 0$ で連続になるように A の値を求めよ．

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = A$ となるように A の値を求める．

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$f(x)$ が $x = 0$ で連続であるためには $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = A$ より $A = 1$ を得る．

例題 5. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x < 1 \\ x + A & \text{if} \quad x \geqq 1 \end{cases}$ が $x = 1$ で連続となるように A の値を求めよ．

実際，

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1\ ,\ \lim_{x \to 1} (x + A) = 1 + A$$
$$f(1) = 1 = 1 + A \quad \therefore \quad A = 1$$

2 微分可能な関数

2.1 微分可能性

定義 3. 関数 $x = a$ を含む開区間で定義された関数 $f(x)$ について，次の極限値

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**という．$f'(a)$ を $f(x)$ の $x = a$ での微分係数という．関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は (a, b) で微分可能という．

定理 2. $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x = a$ で連続．逆は一般には正しくない．

証明 3. $\lim_{x \to a} (x - a) = 0,\ \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ より，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \cdot f'(a) = 0. \end{aligned}$$

よって，$0 = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) \quad \therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

故に，$f(x)$ は $x = a$ で連続． □

例題 6. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ $(0 \leq x \leq 1)$ について，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{0}}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = +\infty \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能ではない．

2.2 導関数

定義 4. 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b)（の各点）で微分可能な関数 $f(x)$ について，関数

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の**導関数**という．

コラム. 導関数 $f'(x)$ の $x = a$ での値 $f'(a)$ が $f(x)$ の $x = a$ での微分係数である．

公式 1 (覚えておこう). (1) $(af(x) \pm bg(x)) = af'(x) \pm bg'(x)$（微分操作の線形性）．

(2) $\left\{ f(x) \cdot g(x) \right\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$（積の微分法）．

(3) $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$（分数関数の微分法）．

(4) $\left\{ f\left(g(x)\right) \right\}' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$（合成関数の微分法）．

(5) $\left\{ \log |f(x)| \right\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 　（対数微分法）．

学籍番号	No.	氏名		評点	

科目	文系向け微積分	授業時間	月曜 4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島 No.3

3 初等関数の導関数

3.1 高校数学に登場する関数の導関数（復習）

公式 2 (覚えておこう)**.** (1) $f(x)=x^k$, $f'(x)=kx^{k-1}$．更に，

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

(2)

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$，但し，$x^\alpha = e^{\alpha\log x}$.

(3)

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x\\ (\cos x)' &= \left(\sin(x+\frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x+\frac{\pi}{2})\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\\ &= \cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = -\sin x\end{aligned}$$

(4) $(\tan x)' = \sec^2 x = 1+\tan^2 x$.

(5) $(e^x)'=e^x$, $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

(6) $\left(\log(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3.2 高階導関数

関数 $f(x)$ が n-回微分して得られる関数を n-階導関数といい，

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = f^{(n)}(x)$$

とかく．特に，$f(x)=f^{(0)}(x)$．帰納的に

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

と定義される．

例題 7.

$$\begin{aligned}
f(x)=\sin x &\to f'(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})\\
&\to f''(x)=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})\to\cdots\\
&\to f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})\\
f(x)=\cos x &\to f'(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2})\\
&\to f''(x)=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})\to\cdots\\
&\to f^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})\\
f(x)=\tan x &\to f'(x)=1+\tan^2 x\\
&\to f''(x)=2(\tan x+\tan^3 x)\\
&\to f^3(x)=2(1+4\tan^2 x+3\tan^4 x)
\end{aligned}$$

公式 3 (ライプニッツの公式)**.** *:*

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$$

例題 8. 次が成り立つ：

- $f(x)=x^m e^x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x\cdot\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, k!\, {}_mC_k\, x^{m-k}$
- $f(x)=e^x\sin x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x\cdot\sum_{k=0}^{n}\sin(x+\dfrac{k\pi}{2})$

演習問題 1. $f(x)=\sin x\cos x$ の n-階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．
（ヒント：$\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$）

4 微分学の基本定理

定理 3. (1) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能な関数を $f(x)$ とする．そのとき，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ となる $a<c<b$ が少なくとも一つ存在する．

(2) 閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能な非定数関数を $f(x)$ とする．そのとき，$f(a)=f(b)$ ならば，$f'(c)=0$ をみたす $a<c<b$ が少なくとも一つ存在する（ロールの定理）

Proof. $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ とおけば，$g(a)=g(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$．ロールの定理より，$g'(c)=0$ を満たす $a<c<b$ が少なくとも一つ存在する．$g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より，平均値の定理の証明を得る．

ロールの定理は最大値・最小値定理から従う．実際，$g(x)$ は閉区間で連続なので，最大値 $M=g(x_1)$・最小値 $m=g(x_0)$ $(a\leq x_0,x_1\leq b)$ をとる．

- $x_0=x_1$ ならば $g(x)=M=m$． よって，$g(x)$ は定数関数．この場合は除外する．こうして，以後は，$x_0\neq x_1$ とする．
- $x_0=a$ ならば $x_1\neq x_0$ より $a<x_1<b$.

  ここで $g(x_1)=m$ は最小値なので $a<x<b$ を満たす任意の x に対して $g(x)\geqq g(x_1)=m$．こうして，十分小さな $h>0$ に対し $g(x_1\pm h)\geqq g(x_1)$ が成立する．故に，

  $$\begin{aligned}0 &\geqq \frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h} \xrightarrow{h\to 0} g'(x_1)\\ 0 &\leqq \frac{g(x_1-h)-g(x_1)}{-h} \xrightarrow{h\to 0} g'(x_1)\end{aligned}$$

  よって，

  $$0\leqq g'(x_1)\leqq g'(x_1)\leqq 0 \quad \therefore \quad g'(x_1)=0.$$

  この時は $c=x_1$ と置けばよい．

- $x_1=a$ ならば $x_0\neq x_1$ より $a<x_0<b$.

  $$\begin{aligned}0 &\geqq \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow{h\to 0} g'(x_0)\\ 0 &\leqq \frac{g(x_0-h)-g(x_0)}{-h} \xrightarrow{h\to 0} g'(x_0)\end{aligned}$$

  よって，

  $$0\leqq g'(x_0)\leqq g'(x_0)\leqq 0 \quad \therefore \quad g'(x_0)=0.$$

  この時は $c=x_0$ と置けばよい．

- $x_0=b$ および $x_1=b$ の場合も同様の議論で定理は証明される．

□

学籍番号	No.	氏名		評点	

例題 9. $f(x)=x^3$ について $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ となる c を求めよ．但し，$0<a<b$ とする．

実際，

$$f'(c)=3c^2=\frac{b^3-a^3}{b-a}=b^2+ab+a^2 \Longrightarrow c=\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

特に，$a<c<b$ は明らか.

例. $f(x)=x^3-3x\ (1\leq x\leq 2)$ について $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ となる $c\ (1<c<2)$ を求めよ.

実際，$f'(c)=3c^2-3=2$ より，$c=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

5 テーラーの定理

5.1 平均値の定理の一般化

定理 4. 関数 $f(x)$ を $(a-r,a+r)\ (r>0)$ で C^{n+1}-級とする, そのとき，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ を満たす $c=a+(x-a)\theta\ \ (0<\theta<1)$ が存在する.

Proof.

$$F(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-A(b-x)^{n+1}$$

とおく（これはテクニックでもある）. 但し，$F(a)=F(b)$ となるように A を決める.

$$\begin{aligned}F(a)&=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k-A(b-a)^{n+1}\\&=F(b)=f(b)-f(b)=0\end{aligned}$$

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+A(b-a)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}F'(x)&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}\\&\quad+(n+1)A(b-x)^n\\&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\\&\quad+(n+1)A(b-x)^n\\&=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n+(n+1)A(b-x)^n\end{aligned}$$

よって，ロールの定理より，$F'(c)=0$ となる $c\ (a<c<b)$ が少なくとも一つ存在する．このとき，$A=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. よって、

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1}}{(n+1)!}(c)(x-a)^{n+1}$$

と表される. □

例題 10.

- $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$

  $\therefore\ e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}<\infty$

- $\sin x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x\ (0<\theta<1)$

  $\therefore \sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}<\infty$

- $\therefore\ \cos x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x\ (0<\theta<1)$

  $\therefore \cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}<\infty$

- $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}\ \ (0<\theta<1)$

  $\therefore \log(x+1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}<\infty$

5.2 関数の近似（マクローリン展開の応用

- $f(x)=f(0)+f'(0)\,x+o(|x|)$（一次近似）

  $\displaystyle\lim_{x\to0}o(|x|)=0=\lim_{x\to0}\frac{o(|x|)}{x}$. ここで，$o(1)=o(|x|)$ と書くこともある.

- $f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\dfrac{1}{2}\,x^2+o(|x|^2)$（２次近似）

  $\displaystyle\lim_{x\to0}o(|x|^2)=0=\lim_{x\to0}\frac{o(|x|^2)}{x^2}$. ここで，$o(2)=o(|x|^2)$ と書くこともある.

例. $\sin x=x+o(|x|^2)$. $\quad\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(|x|^3)$.

6 応用微分学

6.1 極値問題

高等学校で学んだように，極大値・極小値については以下の事が知られている：

(1) $\underline{f'(a)=0\ \&\ f''(a)>0}\Longrightarrow f(a)$ は極小値である.

(2) $\underline{f'(a)=0\ \&\ f''(a)<0}\Longrightarrow f(a)$ は極大値である.

コラム. $f(x)$ が $x=a$ で極値をもつ $\Longrightarrow f'(a)=0$.
一方，３次関数 $f(x)=x^3$ については $f'(x)=3x^2$ より $f'(0)=0$ であるが $f(0)=0$ は極大値でも極大値でもない． $f'(a)=0$ は $x=a$ で極値をもつための必要条件であって十分条件でない.
それでは，$x=a$ で極値を取るための必要十分条件は何であろうか.

► $f(a)$ を極大値とすると，$h>0$（十分小）に対して

$$f(a\pm h)\leqq f(a)\Longrightarrow 0\geqq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ \&\ \frac{f(a-h)-f(a)}{h}\leqq 0.$$

. $h\to0$ とすれば，$0\geqq f'(a)\ \&f'(a)\leqq0$ より $\underline{f'(a)=0}$.

► $f(a)$ が極小値とすると，$h>0$（十分小）に対して

$$f(a\pm h)\geqq f(a)\Longrightarrow 0\leqq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ \&\ \frac{f(a-h)-f(a)}{h}\geqq 0.$$

$h\to0$ とすれば，$0\leqq f'(a)\ \&f'(a)\leqq0$ より $\underline{f'(a)=0}$.

コラム (極値の求め方). (i) $f'(a)=0$ なる a を求める. 即ち，$f'(x)=0$ の解を求める（解が極値を与える候補となる）.

(ii) $f'(x)=0$ の解の一つを $x=a$ とする．$f''(a)$ の値を求める.

- $f''(a)>0\Longrightarrow f(a)$ 極小値 • $f''(a)<0\Longrightarrow f(a)$ 極大値.

6.2　ロピタルの定理

定理 5. .

(1) $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a-r, a+r)$ で微分可能かつ $(a-r, a+r)$ の $x=a$ 以外で $g'(x)\neq 0$ とし，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ とする．そのとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

(2) $f(x)$, $g(x)$ は開区間 $(a, +\infty)$ で微分可能かつ $g'(x)\neq 0$ とし，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ とする．そのとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty \Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

例題 11. (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{4^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4^x\log 4 - 3^x\log 3}{1} = \log 4 - \log 3 = \log\frac{4}{3}$.

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0$.

6.3　一次近似

関数 $f(x)$ を $x=a$ で C^2-級とする．このとき，テーラーの定理より，$h = x-a \Longleftrightarrow x = a+h$($h$ は十分小）とおくと，

$$f(a+h) = \underline{f(a) + f'(a)h} + R_2 (= \frac{f''(a+\theta h)}{2}h^2)$$

を得る．この応用としての次の No.7(6.2) 例題を考えてみよう．

例題 12. (1) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x>0)$ について，

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ より，

$$\sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}h - \frac{1}{8}(a+\theta h)^{-\frac{3}{2}}h^2.$$

故に，$a=4$, $h=0.01$ とおくと，$4 < c = 4 + 0.01\theta < 4.01$ より，

$$\sqrt{4.01} = \sqrt{4} + \frac{0.01}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.01}{4}$$

$|R_2| = \frac{1}{8c^{\frac{3}{2}}}(0.01)^2 < \frac{1}{8\times 4^{\frac{3}{2}}\times 10000} = \frac{1}{64\times 10000} < 0.000002.$

こうして 1 次近似 $\sqrt{4.01}\sim 2 + 0025 = 2.0025$, $R_1 < 0.000002$ を得る．誤差の限界は $R_1 < 0.000002$ である．

(2) $e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}a^n + R_{n+1}$

$R_{n+1} = \frac{e^{a\theta}}{(n+1)!} < \frac{e^a}{(n+1)!}$ $(\because)$ $e^{a\theta} < e^a$ (for $0<\theta<1$).

特に，$a=1$ とおけば，$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{e}{n!} + R_n$

$e < 3$ より，$R_{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

特に，$n=3$ なら，$e\sim 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$.

最大誤差は $\frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0.125$.

特に，e が有理数でないことも最大誤差を用いて示せる．

6.4　逆関数

- 関数 $y=f(x)$ の**定義域**とは $f(x)$ が関数として定義される x の範囲の事である．そのとき，$y=f(x)$ の取りうる値の範囲を**値域**という．
- 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ の合成関数 $f(g(x))$ を考えるとき，$g(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域に含まれなければならない．
- $y=f(x)$ の逆関数とは $f(g(x))\equiv x$（恒等的）なる関数 $g(x)$ の事である（関数 $f(x)$ に対し，その逆関数 $g(x)$ が常に存在するとは限らない）. 特に，$f(g(x)) = x$ で x が $g(x)$ の定義域内を動くので，$f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域に含まれる事が分かる．
- $y=f(x)$ の逆関数 $g(x)$ を $f^{-1}(x)$ にて表す．

  こうして，$f(f^{-1}(x)) = x$ を得る．両辺を x で微分して，逆関数の微分の公式

$$f(g(x)) = x \Longrightarrow (g(x))' = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\therefore\ \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6.4.1　三角関数の逆関数

(1) 関数 $y = \sin^{-1}x$ を逆正弦関数といい，定義域 $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で連続で，値域は $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$. 特に，$\sin\left(\sin^{-1}x\right) = x$ より $\left(\sin^{-1}x\right)' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$（例題１０を見よ！）

(2) 関数 $y = \cos^{-1}x$ を逆余弦関数といい，定義域 $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で連続で，値域は $0\leqq y\leqq\pi$. 特に，$\cos\left(\cos^{-1}x\right) = x$ より $\left(\cos^{-1}x\right)' = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1}x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$（例題１０を見よ！）

(3) 関数 $y = \tan^{-1}x$ を逆正接関数といい，定義域 $-\infty < x < +\infty$ の範囲で連続で，値域は $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. このとき，

$$\left(\tan^{-1}x\right)' = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

例題 13. (1) $-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\left(\sin^{-1}x\right)\geqq 0$. よって，

$$\begin{aligned}\cos\left(\sin^{-1}x\right) &= \sqrt{1-\sin^2\left(\sin^{-1}x\right)}\\ &= \sqrt{1-\left(\sin\left(\sin^{-1}x\right)\right)^2}\\ &= \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

(2) $0\leqq\cos^{-1}x\leqq\pi$ より，$\sin\left(\cos^{-1}x\right)\geqq 0$. よって，

$$\begin{aligned}\sin\left(\cos^{-1}x\right) &= \sqrt{1-\cos^2\left(\cos^{-1}x\right)}\\ &= \sqrt{1-\left(\cos\left(\cos^{-1}x\right)\right)^2} = \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

(3) $a = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$,$b = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ とおく．そのとき，$a+b = \sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ は次のようにして求める．$\sin a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $a = \frac{\pi}{4}$. 一方，$\cos b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $b = \frac{\pi}{4}$. よって，$a+b = \frac{\pi}{2}$.

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

学籍番号	No.	氏名		評点	

7　演習問題（補足）

演習問題 2.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\ (a>0)=0$ を示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を示せ.

(3) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ を認めて，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=1$ を示せ.

演習問題 3.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)=-\frac{1}{2}$ を示せ.

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x}=0$ を示せ.

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$ を示せ.

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}=1$ を示せ.

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2})=2$ を示せ.

演習問題 4. (1) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$,　(2) $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

(3) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$　(4) $\sin^{-1}1$,　(5) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) $\tan^{-1}\sqrt{3}$　(7) $\tan^{-1}(-1)$　(8) $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x$

(9) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$, (10) $\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$

……

(1) : $\frac{\pi}{4}$　(2) : $-\frac{\pi}{3}$　(3) : $\frac{\pi}{4}$　(4) : $\frac{\pi}{2}$　(5) : $\frac{\pi}{6}$　(6) : $\frac{\pi}{3}$

(7) : $-\frac{\pi}{4}$　(8) : $\frac{\pi}{2}$　(9) : $\frac{\pi}{4}$　(10) : $-\frac{\pi}{2}$

演習問題 5. (1) $\cos^2(\sin^{-1}x)=1-x^2$, (2) $\cos^2(\cos^{-1}x)=x^2$

(3) $\cos^2(\tan^{-1}x)=\frac{1}{x^2+1}$ を示せ.

演習問題 6. $y=f^{-1}(x)$ について,

$$f(f^{-1}(x))=x\Longrightarrow f'(f^{-1}(x))\left(f^{-1}(x)\right)'=1$$

より，$y'=\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x)}=\frac{1}{f'(y)}$. 次の公式を示せ.

(1)　$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　(2) $(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3)　$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

演習問題 7 (次を示せ).

1) $\sin^{-1}\frac{x}{a}\ (a>0)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2) $\cos^{-1}\frac{x}{a}=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(3) $\tan^{-1}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}$.

演習問題 8 (次の関数を微分せよ).

(1) $x\log x-x$　(2) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$　(3) 4^x-3^x　(4) $2^{\sin x}$

(5) $x^x(x>0)$　(6) $x^{\log x}$　(7) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$　(8) $\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$

演習問題 9. n 階導関数を求めよ

(1) x^2e^x　(2) $\cos x\cos 2x$　(3) $\frac{1}{x(x+1)}$　(4)$x^{n-1}\log x$

(5) $f(x)=\tan^{-1}x$ のとき，$(1+x^2)f(x)=1$ を示し，

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2nxf^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0\ (n\geqq2)$$

を示せ．また，$f^{(n)}(0)$ を求めよ.

演習問題 10. 次の関数のマクローリン展開を求めよ.

(1) 2^x　(2) $(e^x+1)^2$　(3) $2\sin x\sin 2x$　(4) $\cos^2 x$

演習問題 11 (ロピタルの定理). 次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{4^x-3^x}{x}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$　(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$

(4) $\lim_{t\to0}\frac{e^{4t}-e^t-3t}{t^2}$　(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^n}{x}$　(6) $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

演習問題 12. テーラーの公式：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_{n+1}(a;h)$$

但し，

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

この公式を利用して，次の値の一次近似と誤差を求めよ.

(1) $\sqrt[3]{8.01}$　(2) $\sqrt[5]{31}$　(3) $\log(1+\frac{1}{100})$

$$f(x)=\sqrt[m]{x},\ f'(x)=\frac{1}{m}\frac{\sqrt[m]{x}}{x},\ f''(x)=-\frac{(m-1)}{m^2}\frac{\sqrt[m]{x}}{x^2}$$

$$g(x)=\log(1+x),\ g'(x)=\frac{1}{1+x},\ g''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

(1) 2.00083,　$|R_2(8,0.01)<0.00000035$

(2) 1.9875,　$|R_2(32,-1)|<0.0027$

(3) 0.01,　$|R_1(1,0.01)|<0.00005$

演習問題 13.

$$e^a=1+a+\frac{1}{2!}a^2+\cdots+\frac{1}{n!}a^n+R_n\ ;\ R_n<\frac{3}{(n+1)!}$$

を示して e が無理数である事を示せ.

演習問題 14. 次の関数の極値を求めよ.

(1) $f(x)=x^3-3x+2$

(2) $f(x)=x\log x\ (x>0)$

(3) $f(x)=\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$

(4) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ (-1\leqq x\leqq 1)$

(5) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

科目	文系向け微積分	授業時間	月曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.7

7.1 演習問題の解答例

演習問題 3

(1) $0<a<1$ ならば $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0 \quad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$
$a \geqq 1$ のときは，$k>2a$ となる自然数 k をとる．$n>k$ となる任意の自然数 n に対して，$\frac{a}{n}<\frac{a}{k}<\frac12$ ゆえ，

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{k}}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{(n-k)}}{(k+1)\cdot\cdots\cdot n} = \frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n}$$
$$< \frac{a^k}{k!}\cdot\left(\frac12\right)^{n-k} = \left(2^k\cdot\frac{a^k}{k!}\right)\cdot\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(2) ロピタルの定理から $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. $f(x)=x^{\frac1x}=e^{\frac{\log x}{x}}$
より，$\lim_{x\to\infty}x^{\frac1x}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{\log x}{x}\right)}=e^0=1.$

(3) $n^2=m$ とおくと．$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac1m\right)^{\sqrt m}$
$= \lim_{m\to\infty} e^{\left(\frac{1}{\sqrt m}\log(1+\frac1m)^m\right)}$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt m}\log\left(1+\frac1m\right)^m = \lim_{m\to\infty}\log\frac{1}{\sqrt m}\cdot\lim_{m\to\infty}\log\left(1+\frac1m\right)^m = 0\cdot 1 = 0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac1{n^2}\right)^n = e^0=1$$

演習問題 4

(1)
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt x}-1\right)=\lim_{x\to1}\frac{(-1)}{\sqrt x\cdot(\sqrt x+1)}=-\frac12$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}=\left(\lim_{x\to0}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=0\cdot1=0$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot1=1$

(4) $\lim_{x\to\frac\pi2}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} \overset{t=\cos x}{=} \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1\ (\because\ x\to\frac\pi2 \longleftrightarrow t=\cos x\to0)$

(5) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$
$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}}$
$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac1x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac1x+\frac1{x^2}}}=1$

演習問題 5

(1) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt2}=t \iff \sin t=\frac1{\sqrt2}\quad\left(-\frac\pi2<t<\frac\pi2\right)\quad\therefore\quad t=\frac\pi4$

(2) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)=t\iff\sin t=-\frac{\sqrt3}{2}\ \left(-\frac\pi2<t<\frac\pi2\right)\ \therefore\ t=-\frac\pi3$

(3) $\alpha=\tan^{-1}\frac12,\quad\beta=\tan^{-1}\frac13\Longrightarrow\tan\alpha=\frac12$
$\tan\beta=\frac13 \longrightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{\frac56}{1-\frac16}=1.$
$\tan(\alpha+\beta)=\frac\pi4\longleftrightarrow\quad\alpha+\beta=\frac\pi4$ i.e. $\tan^{-1}\frac12+\tan^{-1}\frac13=\frac\pi4$

(4) $\sin^{-1}1=t\iff\sin t=1\quad\therefore t=\frac\pi2$

(5) $\cos^{-1}\frac{\sqrt3}{2}=t\iff\cos t=\frac{\sqrt3}2\quad(0<t<\pi)\quad\therefore t=\frac\pi6$

(6) $\tan^{-1}\sqrt3=t\iff\tan t=\sqrt3\quad\left(-\frac\pi2<t<\frac\pi2\right)\quad\therefore t=\frac\pi3$

(7) $\tan^{-1}1=t\iff\tan t=1\quad\therefore t=\frac\pi4$

(8) $t=\tan^{-1}x\iff x=\tan t.\quad x\to\infty\longleftrightarrow t\to\frac\pi2\}$
$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\lim_{t\to\frac\pi2}t=\frac\pi2$

(9) $\alpha=\tan^{-1}\frac13,\quad\beta=\tan^{-1}\frac17\Longleftrightarrow\tan\alpha=\frac13,$
$\tan\beta=\frac17\ \tan(2a+\beta)=\frac{\tan2\alpha+\tan\beta}{1-\tan2\alpha\tan\beta}$
$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac23}{1-\frac19}=\frac34.$
$\therefore\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\frac34+\frac17}{1-\frac34\frac17}=\frac{25}{25}=1$

(10) $t=\tan^{-1}x\iff x=\tan t.\quad x\to-\infty\longleftrightarrow t\to-\frac\pi2$
$\therefore\ \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=\lim_{t\to-\frac\pi2}t=-\frac\pi2$

演習問題 6

(1) $\cos^2(\sin^{-1}x)=1-\sin^2(\sin^{-1}x)=1-\{\sin(\sin^{-1}x)\}^2=1-x^2$

(2) $\cos^2(\cos^{-1}x)=\{\cos(\cos^{-1}x)\}^2=x^2$

(3)
$$\cos^2(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}=\frac{1}{1+\{\tan(\tan^{-1}x)\}^2}=\frac1{1+x^2}$$

演習問題 7

(1) $(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\because\ -\frac\pi2\leqq\sin^{-1}x\leqq\frac\pi2\quad\therefore\cos(\sin^{-1}x)\geqq0$

(2) $(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sin(\cos^{-1}x)}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}x)}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\because\ 0\leqq\cos^{-1}x\leqq\pi\quad\therefore\sin(\cos^{-1}x)\geqq0$

(3) $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}=\frac1{1+x^2}$

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.8

演習問題８

(1) $\left(\sin^{-1}(\frac{x}{a})\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\cos\left(\sin^{-1}(\frac{x}{a})\right)} = \dfrac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\sin^2\left(\sin^{-1}(\frac{x}{a})\right)}}$

$= \dfrac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(2) $\left(\cos^{-1}(\frac{x}{a})\right)' = \dfrac{-\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sin\left(\cos^{-1}(\frac{x}{a})\right)} = \dfrac{-\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\cos^2\left(\cos^{-1}(\frac{x}{a})\right)}}$

$= \dfrac{-\frac{1}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(3) $\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\tan^2(\tan^{-1}\frac{x}{a})} = \dfrac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

演習問題９

(1) $y = x\log x - x \Longrightarrow y' = \log x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \log x$

(2) $y = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \Longrightarrow y' = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y = 4^x - 3^x = e^{x\log 4} - e^{x\log 3} \Longrightarrow y'$

$= (\log 4)e^{x\log 4} - (\log 3)e^{x\log 3} = (\log 4)\cdot 4^x - (\log 3)\cdot 3^x$

(4) $y = 2^{\sin x} = e^{(\log 2)\sin x} \Longrightarrow y' = e^{(\log 2)\sin x}\{(\log 2)\sin x\}'$

$= e^{(\log 2)\sin x}(\log 2)\cos x = 2^{\sin x}(\log 2)\cos x$

(5) $y = x^x = e^{x\log x} \Longrightarrow y' = e^{x\log x}\cdot(x\log x)' = x^x\,(\log x + 1)$

(6) $y = x^{\log x} = e^{(\log x)^2} \Longrightarrow y' = e^{(\log x)^2}\,\{(\log x)^2\}'$

$= e^{(\log x)^2}(2\log x)\dfrac{1}{x} = 2x^{\log x - 1}\,\log x$

(7) $y = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow y' = \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos\left(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)}$

$= \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(8) $y = \tan^{-1}\dfrac{1+x}{1-x} \Longrightarrow y' = \dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{1+\left(\frac{1;x}{1-x}\right)^2} = \dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{(1-x)^2+(1+x)^2}{(1-x)^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}$

演習問題１０

(1) $\left\{x^2e^x\right\}^{(n)} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{2} {}_nC_k\cdot{}_2P_k x^{2-k}\right)e^x = e^x\,\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$

(2) $y = \cos x\cos 2x = \dfrac{1}{2}\,(\cos 3x + \cos x)$

$\therefore y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left\{3^n\cos(3x+\dfrac{n\pi}{2}) + \cos(x+\dfrac{n\pi}{2})\right\}$

(3)

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{x(x+1)}\right\}^{(n)} &= \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right\}^{(n)}\\ &= \left\{(-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{x^{n+1}}\right\}\\ &- \left\{(-1)(-2)\cdots(-n)\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}\\ &= (-1)^n n!\left\{\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}\end{aligned}$$

(4) $y = x^{n-1}\log x$. 今，$1 \leqq k \leqq n-1$ 対して，

$$y^{(k)} = {}_{n-1}P_k x^{n-k-1}\left(\log x + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n-j}\right)$$

であることが数学的帰納法で示せる．

$$y^{(n-1)} = {}_{n-1}P_{n-1}x^0\left(\log x + \sum_{j=1}^{n-1}\right) = (n-1)!\left(\log x + \sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{\ell}\right)$$

$$\therefore\ \ y^{(n)} = \{y^{(n-1)}\}' = \frac{(n-1)!}{x}$$

(5) $f'\,(x) = \frac{1}{x^2+1}$ より $(1+x^2)f'(x) = 1$．両辺を x で微分すると

$$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$$

更に，両辺を x で微分すると，$(1+x^2)f^{(3)}(x)+4xf^{(2)}(x)+2f(x) = 0$. 一般に

$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \geqq 2)$

が成立することが数学的帰納法で示す事ができる．$x=0$ を代入すると $f(0) = f^{(2)}(0) = \ldots = f^{(2n)}(0) = 0,\quad f^{(1)}(0) = 1,$

$f^{(3)}(0) = \dfrac{-1}{2!},\ldots,f^{(2n+1)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$

演習問題１１

(1) $f(x) = 2^x = e^{x\log 2} \quad \therefore f^{(n)}(x) = (\log 2)^n 2^x$

$\longrightarrow f^{(n)}(0) = (\log 2)^n\ \therefore\ 2^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^n}{n!}x^n$

(2) $(e^x+1)^2 = e^{2x}+2e^x+1$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^n+2)}{n!}x^n + 1 + 1$

$= 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}+1}{n!}x^n$

(3) $2\sin x\cdot\sin 2x = \cos(2x-x) - \cos(2x+x) = \cos x - \cos 3x$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3x)^{2n}$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-9^n)}{(2n)!}x^{2n}$

(4) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}x^{2n}$

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.9

演習問題１２

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log 4)4^x-(\log 3)3^x}{1}=\log\frac{4}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{4t}-e^t-3t}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{4e^{4t}-e^t-3}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{16e^{4t}-e^t}{2}=\frac{15}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^n}{x}=n\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^{n-1}}{x}$
$\displaystyle=n(n-1)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^{n-2}}{x}\ldots=n!\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^0}{x}$
$\displaystyle=n!\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\log x}=e^{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right)}=e^{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}=e^0=1$

演習問題１３

(1) $\sqrt[3]{8.01}=\sqrt[3]{8+0.01}=\sqrt[3]{8}+\dfrac{0.01}{12}+R_2=2.000833+R_2.$

$|R_2|<\dfrac{(0.01)^2}{18\times 16}<0.00000035.$

(2) $\sqrt[5]{31}=\sqrt[5]{32-1}=\sqrt[5]{32}-\dfrac{1}{80}+R_2=1.9875+R_2.$

$|R_2|<\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{25}\times\dfrac{2}{2^{10}}=\dfrac{1}{6400}<0.00017$

(3) $\log\left(1+\dfrac{1}{100}\right)=\log 1+\dfrac{1}{100}+R_2=0.01+R_2.$

$|R_2|<\dfrac{1}{20000}=0.00005$

演習問題１４

e を有理数と仮定する．そのとき，$e=\dfrac{m}{n}$，但し,m, n は互いに素な整数，と表す事ができる．このとき，$ne=m$ は整数である．両辺に $(n-1)!$ を乗じて，$n!e=(n-1)!m$ もまた整数である．e^x の n 次マクローリン展開において，$x=1$ とおくと

$$(♠)\quad e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n$$

を得る．但し，$R_n=\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1)$．一方，$e^\theta<e^1<3$ より，

$$(♣)\quad R_n<\frac{3}{(n+1)!}$$

を得る．(♠) の両辺に $n!$ を乗ずると，

$$n!\cdot e=n!\cdot\left(1+1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n!}\right)+n!\cdot R_n$$

を得る．今，$n!\cdot e$ も $n!\cdot\left(1+1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n!}\right)$ も整数ゆえ，
$n!\cdot R_n$ もまた整数である．ところが，(♣) より

$$0<n!\cdot R_n<\frac{3n!}{(n+1)!}=\frac{3}{n+1}$$

こうして，$n=1$ なければならない，即ち，$e=m$（整数）でなければならない．(♠) から $2<e<3$．これは明らかに矛盾である．ゆえに，e は有理数でない．即ち，e は無理数である．

演習問題１５

(1) $f(x)=x^3-3x+2.$

$\therefore\ f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0\iff x=\pm 1.$

$f''(x)=6x$ ゆえ，$f''(1)=6>0$, $f''(-1)=-6<0$．こうして，$f(1)=0$ は極小値であり，$f(-1)=-4$ は極大値．

(2) $f(x)=x\log x$

$\therefore\ f'(x)=\log x+1=0\iff x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$ より，$f''(e^{-1})=e>0.$

よって，$f(e^{-1})=-\dfrac{1}{e}$ は極小値．

(3) $f(x)=\sin x$

$f'(x)=\cos x=0\iff x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$

$f''(x)=-\sin x$ より，$f''(\frac{\pi}{2})=-1<0$, ,$f''(\frac{3\pi}{2})=1>0.$
故に，$f(\frac{\pi}{2})=1$ は極大値であり $f(\frac{3\pi}{2})=-1$ は極小値である．

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore\ f'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}=0\iff x=0$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{-2(1+x^2)^2-x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}\\&=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}\end{aligned}$$

$f''(0)=-2<0$ より，$f(0)=1$ は極大値．

(5) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)=0\iff x=\pm 1$

$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)$

よって，$f''(1)<0$, $f''(-1)>0$ こうして，$f(1)=e^{\frac{1}{2}}$ は極大値，$f''(-1)=-e^{\frac{1}{2}}$ は極小値．

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.10

8　1変数の積分

8.1　定積分

$f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．そのとき，$f(x)$ の $[a,b]$ での最大値を M, 最小値を m とする（最大値・最小値の定理），即ち，

$$\min_{a\leqq x\leqq b} f(x) = m \leqq f(x) \leqq M = \max_{a\leqq x\leqq b} f(x)$$

を満たす．

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$$

を閉区間 $[a,b]$ の分割とする（等分割とは限らない）．$f(x)$ の $[x_{i-1}, x_i]$ での最大値を M_i，最小値を m_i とする．$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ を満たす ξ_i に対し

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ S_{\min} &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ S_{\max} &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

但し，$|\Delta| = \max_{1\leqq i\leqq n} |x_i - x_{i-1}|$.

$S_{\min}$ を不足和といい，S_{max} を過剰和という．そのとき，

$$m(b-a) \leqq S_{\min} \leqq S_\Delta \leqq S_{\max} \leqq M(b-a)$$

を得る．$|\Delta| \to 0 \Longleftrightarrow n \to \infty$ であることに注意せよ．そこで，$n\to\infty$ としたときの極限値

$$\lim_{n\to\infty} S_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \int_a^b f(x)\,dx$$

を $f(x)$ の区間 $[a,b]$ での定積分という．この極限値は必ず存在する．特に，n-等分割をとれば，高校で習ったような定義

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad \text{となる．}$$

例えば，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{n}{n^2+i^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{2n^2}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{2}{1+4(\frac{i}{2n})^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \left[\tan^{-1} 2x\right]_0^1 \\ &= \tan^{-1} 2 \end{aligned}$$

$f(x) \geqq 0$ なら，$\int_a^b f(x)\,dx$ は $y = f(x)$ のグラフの $[a,b]$ 上の部分の面積そのものである．定積分の定義から容易に次が分かる．

- $f(x),\ g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．そのとき，

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ，但し $(a < c < b)$ も明らか．

8.2　定積分の基本的性質と第1基本定理

$f(x),\ g(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で連続な関数とする．$a \leq {}^\forall t \leq b$ に対して，$F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$ とおく．$a < t+h < b$ なる十分小さな h に対し，閉区間 $[t, t+h]$ の分割：$\Delta_n : t = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t+h$ を考える．平均値の定理より $f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(\xi_i)$ となる ξ_i が存在する．そこで，$S_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ とおく．一方，$\max_{t\leqq x\leqq t+h} f(x) = M(h),\quad \min_{t\leqq x\leqq t+h} f(x) = m(h)$ とおくと，

$$m(h)\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leqq S_{\Delta_n} \leqq M(h)\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$$

$$\therefore\ m(h)\cdot h \leqq S_{\Delta_n} \leqq M(h)\cdot h \therefore m(h) \leqq \frac{S_{\Delta_n}}{h} \leqq M(h).$$

$\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(t)$ より，

$$m(h) \leqq \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \leqq M(h) \Longrightarrow \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \xrightarrow{h\to 0} f(t)$$

を得る．

$$F'(t) \xleftarrow{0\leftarrow h} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} f(x)\,dx = \frac{\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}}{h} \xrightarrow{h\to 0} f(t)$$

$$\therefore F'(t) = f(t)$$

こうして，$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$（積分学の第1基本定理）を得る．

9　定積分の計算

9.1　定積分の第2基本的性質

次に，閉区間 $[a,b]$ の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

に対し，平均値の定理より

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

となる ξ_i $(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$ が存在する．この ξ_i を用いると，

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} (f(b) - f(a)) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という．そのとき，次を得る．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

これを積分学の第2基本定理という．積分の変数変換については以下の公式がある：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

但し，$x = \varphi(t),\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$（積分の変数変換）

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.11

実際，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．

$$\{F(\varphi(t))\}' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

より，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \{F(\varphi(t))\}'\,dt\\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

となる．更に，$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より，

$$\begin{aligned}\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b &:= f(b)g(b) - f(a)g(a)\\ &= \int_a^b \{f(x)g(x)\}'\,dx\\ &= \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx\\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

この事から，

$$\int_a^b f'(x)g(x) = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

を得る．$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする..

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \Big[F(x)\Big]_a^b\\ &= F(b) - F(a) = -\Big(F(a) - F(b)\Big)\\ &= -\Big[F(x)\Big]_b^a\\ &= -\int_b^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

例題 14.　(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\log(x+\sqrt{x^2+1})\Big]_0^1 = \log(1+\sqrt{2})$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx = \Big[x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0) = \Big[\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big]_0^{\frac{a}{2}} = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

例題 15.　(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx \overset{t=\sqrt{1-x}}{=} \int_1^0 (1-t^2)^2 t(-2t)\,dt$

$\displaystyle= 2\int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6)\,dt = \frac{16}{105}.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{-1} \frac{dx}{1+x^2}$

$\displaystyle= -\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\Big[\tan^{-1}x\Big]_{-1}^0 = -\frac{\pi}{4}$

(3) $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\ I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

(4) $\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$\displaystyle\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$

10　定積分の演習問題

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle I = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{4}}\,dx \overset{t=(1-x)^{\frac{1}{4}}}{=} \int_1^0 (1-t^4)\cdot t\cdot(-4t^3)\,dt$

$\displaystyle= 4\int_0^1 (t^4 - t^8)\,dt = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{16}{45}$

(2) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \overset{x=t^2}{=} \int_0^1 \frac{2t}{t+1}\,dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\,dt$

$\displaystyle= 2\Big[t - \log(t+1)\Big]_0^1 = 2(1-\log 2)$

(3) $\displaystyle I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^n}{x}\,dx = \Big[\log x\,(\log x)^n\Big]_1^e - nI_n \quad = 1 - n\,I_n$

$\displaystyle\therefore (n+1)\,I_n = 1 \Longrightarrow I_n = \frac{1}{n+1}$

(4) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sin^{-1}x)'\,\sin^{-1}x\,dx$

$\displaystyle= \Big[(\sin^{-1}x)^2\Big]_0^{\frac{1}{2}} - I.$

$\displaystyle\therefore\ 2I = \frac{\pi^2}{36} \qquad \therefore I = \frac{\pi^2}{72}$

(5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}\,dx$

$$= \begin{cases}\pi & \text{if} \quad m=n\\ 0 & \text{if} \quad m\neq n\end{cases} \qquad (0<m,\ n\in\mathbb{Z})$$

(6) $\displaystyle I_n = \int_1^e x^n\log x\,dx = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x\Big]_1^e - \frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\,dx$

$\displaystyle= \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$

(7) $\displaystyle I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\,dx$

$\displaystyle= \int_0^{2a} \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx \overset{x-a=a\sin t}{=} a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$

$\displaystyle= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi a^2}{2}$

(8) $\displaystyle I = 2\int_0^1 (3-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-\sin^2 t)\cos^2 t\,dt$

$\displaystyle= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = 4\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + 2\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{8}$

(9) $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^n}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle= \int_0^1 (\tan^{-1}x)'(\tan^{-1}x)^n\,dx = \Big[(\tan^{-1}x)^{n+1}\Big]_0^1 - nI_n$

$\displaystyle= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} - nI_n$

$\displaystyle\therefore\ (n+1)I_n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \quad \therefore\ I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

(10) $\displaystyle I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\,dt$

$\displaystyle= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

学籍番号	No.	氏名		評点	

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log(1+\tan t)\,dt$ とおく．そのとき，

$f(\frac{\pi}{8})=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log(1+\tan t)\,dt=0$ である．一方，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\cdot(\frac{\pi}{4}-x)'-\log(1+\tan x)\\
&=-\log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)-\log(1+\tan x)\\
&=-\log 2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x)=-(\log 2)\cdot x+C\Longrightarrow C=\frac{\pi}{8}\cdot\log 2$$

$$\left(\because\quad 0=f(\frac{\pi}{8})=-\frac{\pi}{8}\cdot\log 2+c\right)$$

よって，

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{8}-x\right)\cdot\log 2\Longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)\,dx=f(0)=\frac{\pi}{8}\log 2$$

(2) $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx\overset{t=-x}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{(-t)\sin(-t)}{1+e^{-t}}(-1)\,dt$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{t\sin t}{1+e^{-t}}\,dt\overset{x=t}{=}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$2I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\,dx=2\cdot\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{故に}\quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

11　不定積分（原始関数）

$F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とよび，$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書く．従って，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx=f(x)$ を得る．

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の不定積分とよぶ．以下の公式は両辺を微分すれば容易に分かる．

(1) $\displaystyle\int\{af(x)+bg(x)\}\,dx=a\int f(x)\,dx+b\int g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int f(x)\,dx\overset{x=g(t)}{=}\int f(g(t))g'(t)\,dt.$

(3) $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx.$

(3') $\displaystyle\int f(x)\,dx=xf(x)-\int xf'(x)\,dx.$

注意 3. $F(x)$, $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする．即ち，$F'(x)=G'(x)=f(x)$ とする．この時，

$$(F(x)-G(x))'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

よって，$F(x)-G(x)=C\quad\therefore\quad G(x)=F(x)+C.$

つまり，二つの原始関数は定数の違いしかない．そこで，

$$\int f(x)=F(x)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

と書く．

11.1　原始関数の例

$(a\neq-1,b\neq 0,d>0$ かつ C は定数.

(1) $\displaystyle\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

(3) $\displaystyle\int e^{bx}\,dx=\frac{1}{b}e^{bx}+C$

(4) $\displaystyle\int\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\cos bx+C$

(5) $\displaystyle\int\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{d^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{d}+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}+C$

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+d^2})+C$

(9) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)\ =\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$

(10) $\displaystyle I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$

$$\therefore\ I_{n+1}=\frac{(2n-1)}{2a^2n}I_n+\frac{1}{2a^2n}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}\quad(n\geq 1)$$

11.2　積分計算のテクニック１

11.2.1　分数関数の積分法（部分分数分解）

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ （$P(x),Q(x)$ は多項式）は

$\dfrac{1}{(x-a)^m}$ $(m\geqq 1)$，$\dfrac{\beta x+\gamma}{((x-b)^2+c^2)^n}$ $(n\geqq 1,\ c\neq 0)$ の形の分数関数の和に分解できる．

例題 16. (1)

$$\frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$

(2)

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

11.2.2　分数関数の積分への帰着

$R(t)$ は t の分数関数，　$R(u,v)$ は u,v の分数関数とする．

(1)

$$\int R(e^x)\,dx\overset{t=e^x}{=}\int\frac{R(t)}{t}\,dt$$

(2)

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=}\int R(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{1+t^2})\,dt$$

ここに，(1) の場合，$t=e^x(\Longleftrightarrow x=\log t)\Longrightarrow dx=\dfrac{dt}{t}$

(2) の場合，　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，

$\sin x=\dfrac{2t}{t^2+1}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ と t の関数として表わされるが，最終的には x の関数に戻す

例題 17. (1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx \overset{x=\log t}{=} \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt$

$\displaystyle = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$

$= \log t - \log(t+1) = \log e^x (= x) - \log(e^x+1) + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1+(1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = \int dt = t + C = \tan\frac{x}{2} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{t^2+1}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

12　様々な関数の積分法

12.1　積分計算のテクニック（続き）

12.1.1　無理関数の積分法

$R(u,v)$ は u, v の分数関数

(1) $ad - bc \neq 0,\ n \geqq 2$ とする．

$$\int R\left(x\ ,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \overset{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}{=}$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\ ,\ t\right) \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

$$(\because)\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}\ ,\ dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

(2) $a > 0$ とする． $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\ ,\ t - \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right) dt$$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおく

そのとき，$\displaystyle x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\ ,\quad dx = \frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt$

(3) $a < 0,\ b^2 - 4ac > 0$ とする．

$$\int R\left(x\ ,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \int R\left(x\ ,\ (x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}\right).$$

但し，$ax^2+bx+c=0$ の 2 つの実数解 $\alpha < \beta$ とする．

$\alpha < x < \beta$ に対し，

$\displaystyle\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$. そこで，

$\displaystyle t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$ とおくと，$-a\alpha + a\beta = a\sqrt{b^2-4ac} < 0$ より，(1) の $n=2$ の場合が適用できる．

例題 18.

(1) $\displaystyle\int x(1-x)^{\frac14}\,dx \overset{t=(1-x)^{1/4}}{=} = 4\int (t^8 - t^4)\,dt$

$\displaystyle = 4\left(\frac{t^9}{9} - \frac{t^5}{5}\right) + C = -\frac{4}{45}(5x+4)(1-x)^{5/4} + C$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx\ (A>0) \overset{\sqrt{x^2+A}=t-x}{=} \int \frac14 \frac{t^4+2At^2+A^2}{t^3}\,dt$

$\displaystyle = \frac14\left(\frac{t^2}{2} - \frac{A^2}{2t^2} + 2A\log|t|\right)$

$\displaystyle = \frac12\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right|\right) + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{dt}{t}$

$= \log|t| + +C = \log\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C,\quad (\sqrt{x^2+A} = t - x)$ とおく.

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$

$\displaystyle(\because)\quad \sqrt{x^2+1} = t - x \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{dt}{t}\ ,\ x = \frac{t^2-1}{2t}$

(5) $\displaystyle I = \int \frac{x}{\sqrt{-6+5x-x^2}}\,dx = 5\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} - \sqrt{-6+5x-x^2} + C$

$\displaystyle\left[\sqrt{-6+5x-x^2} = (3-x)\sqrt{\frac{x-2}{3-x}},\quad t = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}\right].$

$\displaystyle I = 6\int \frac{dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 5\int \frac{dt}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1} + C$

$\displaystyle = 5\tan^{-1} t - \frac{t}{t^2+1} + C\quad \left[(3-x)\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} = \frac{t}{t^2+1}\right]$ に注意!

13　広義積分

$f(x)$ は (a,b) で連続であるが，端点 $x = a, b$ では必ずしも連続とは限らないとする．その時，$\epsilon > 0$（十分小さい）とする．積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b^\epsilon} f(x)\,dx$$

が収束（有限確定値）するとき，$f(x)$ は (a,b) で**広義積分可能**という．

同様に，$f(x)$ が $[a,\infty)$ で連続とする．そのとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ が収束するとき，$f(x)$ は $[a,\infty)$ で広義積分可能という．

例題 19.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-a}\,dx\ (a\neq 1) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 x^{-a}\,dx \\
&= \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_\epsilon^1 \\
&= \frac{1}{1-a} - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^{1-a}}{1-a} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{1-a} & \text{if}\quad a < 1 \\ \infty & \text{if}\quad a > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

14　曲線の長さ

関数 $g(t),\ h(t)$ を閉区間 $[a,b]$ を含む開区間で微分可能で $g'(t),\ h'(t)$ は $[a,b]$ で連続とする（このような性質を持つ関数を $[a,b]$ で $\mathcal{C}^1$-級という）．そのとき，

$$C\ :\ \begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}\qquad (a \leqq t \leqq b)$$

で定義される図形 C を曲線とよび，t を曲線 C のパラメータという．

即ち，C が (x,y)-平面内の曲線とは点

$$P(t) = (g(t), h(t))\quad (a \leqq t \leqq b)$$

が描く図形（軌跡）の事である．

- $P(a) = (g(a), h(a))$ を曲線 C の始点といい，
- $P(b) = (g(b), h(b))$ を曲線 C の終点という．
- $g(t), h(t)$ が $\underline{g'(t)\neq 0, h'(t)\neq 0}$ のとき，C は滑らかな曲線という．

14.1　曲線の例

(1) 関数のグラフが表す曲線 $C:\ y=f(x)\ (a \leqq x \leqq b)$ は $x=t$ $y=f(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ とパラメータ表示できる．

(2)　曲線 $C:\ x=r\cos t\ ,\ y=r\sin t\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ は (x,y) 平面上の半径 $r>0$ の円周を表す．

(3)　曲線 $C:\ x=\sin t,\ y=\cos 2t$ は $y=\cos 2t=1-2\sin^2 t=1-2x^2\ |x| \leqq 1$ なる放物線である．この放物線は $x=t,\ y=1-2t^2\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とパラメータ表示され，曲線のパラメータ表示は一意的でない事を示している．

(4) 曲線 $C:\ x=t+\dfrac{1}{t},\ y=t-\dfrac{1}{t}$ は $|x|^2=(t+\dfrac{1}{t})^2=t^2+\dfrac{1}{t^2}+2 \geq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}+2 \geqq 4$. よって，$|x| \geqq 2$. また，容易に，$x^2-y^2=4$ を得る．よって，C は双曲線である．

14.2　曲線の長さ

関数 $g(t), h(t)$ を閉区間 $[a,b]$ で $\mathcal{C}^1$-級とし，曲線 C は $x=g(t)$, $h(t$ $)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で表される曲線とする．

$\Delta: a=t_0<t_1<t_2\ldots<t_n=b$ を $[a,b]$ の分割とし，各 t_i に対応する C 上の点を $P(t_i)=(g(t_i),h(t_i))$ とする．

$$L(C)=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(g(t_i)-g(t_{i-1})^2+(h(t_i)-h(t_{i-1}))^2}$$

が収束するとき，その極限値 $L(C)$ を曲線 C の長さという．曲線 C : $x=g(t)$, $y=h(t)$ は $[a,b]$ で $\mathcal{C}^1$-級とする．このとき，曲線 C の長さは $L(C)=\displaystyle\int_a^b\sqrt{g'(t)^2+h'(t)^2}\,dx$　で与えられる. 実際，平均値の定理より $x_{i-1}<\xi_i,\eta_i<x_i$ が存在するので，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\{g(t_i)-g(t_{i-1})^2+(h(t_i)-h(t_{i-1}))^2}\\ =\ &\sum_{i=1}^{n}\sqrt{g'(\xi_i)^2+h'(\eta_i)^2}\ (x_i-x_{i-1})\overset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow}\\ \to\ &L(C)=\int_a^b\sqrt{g'(t)^2+h'(t)^2}\,dx\end{aligned}$$

特に，微分可能な関数 $f(x)$ に対し，曲線 $C:\ y=f(x)\ (a \leqq x \leqq b)$ の長さは，$\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ に対し，平均値定理より

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_i)^2}\ (x_i-x_{i-1})\overset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow}L(C)\\ &=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

例題 20.　(1) 放物線 $C:\ y=x^2\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ のとき，

$$L(C)=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+4^{-1}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1$$

(2) 曲線 $C: x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$; $(0 \leqq t \leqq \pi)$ について，$L(C)=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\,dt=\frac{a\pi^2}{2}$

(3) $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について，$x=\cos^4 t,\ y=\sin^4 t\ (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ より，$L(C)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16\sin^2 t\cos^2 t(\sin^4 t+\cos^2 t)}\,dt.$

$$\begin{aligned}\therefore\ L(C)&=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{1+\cos^2 2t}\,dt\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{-1}\sqrt{1+u^2}(-du)=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du\\ &=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

15　Miscellaneous

15.1　極方程式で表される曲線の長さ

$f(\theta)$ を $\mathcal{C}^1$-級の関数とし，$C:\ r=f(\theta)\ (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と極表示される曲線を考える．このとき，$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ である．このとき，

$$L(C)=\int_\alpha^\beta\sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\quad\text{を得る．}$$

実際，$x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$. $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2=f(\theta)^2+f'(\theta)^2$ ゆえ結論を得る．

例題 21.

(1) 曲線（カージオイド）$r=a(1+\cos\theta)\ (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ の長さは $L=2\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\,d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8a$

(2) 曲線 $r=a\sin\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の長さは，$L=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{a^2}\,dt=a\pi$

(3) アルキメデス螺旋 $r=a\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \alpha)$ の長さは，

$$L=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2(1+\theta^2)}\,dt=\frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1}+\log(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})\right)$$

15.2　曲線で囲まれる部分の面積

区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(x) \geqq 0$ のグラフ $y=f(x)$ と x-軸および直線 $x=a$ および $x=b$ で囲まれた部分の面積は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

であった．

例題 22.　(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x-軸，y-軸で囲まれた部分の面積は，$y=(1-\sqrt{x})^2\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ なので，

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\frac{1}{6}$$

(2) $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t\ (0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$ と x-軸，y-軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{e^{\frac{\pi}{2}}}y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\frac{dx}{dt}\,dt\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}(\cos t\sin t+\cos^2 t)\,dt\\ &=\frac{e^{\pi}-1}{4}\end{aligned}$$

学籍番号	No.	氏名		評点	

科目	文系向け微積分	授業時間	月曜 4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島 No.15

15.3 極方程式で表される図形の面積

$r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ および半直線 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ で囲まれる部分の面積はこの部分が十分小さな扇形で近似される事を用いて，$\Delta : \alpha < \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta$ に対し，

$$S = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\xi_i)^2 \, (\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 \, d\theta$$

例題 23.

(1) $r = a(1+\cos\theta)$ が囲む部分の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{3}{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

(2) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ によって囲まれる部分の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta \\ &= 2a^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \end{aligned}$$

(3) 曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ で囲まれる部分の面積は $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ とおく．$0 \leqq x \leqq a$ より、$t : \frac{\pi}{2} \to 0$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a y \, dx = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 t - \sin^6 t\right) dt = 12a^2 \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{3}{8}\pi a^2 \end{aligned}$$

16 期末試験（傾向と対策）

(1) 不定形の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^x$ を求めよ．

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0 \\ \therefore \quad \lim_{x\to+0} x^x &= \lim_{x\to+0} e^{x\log x} \\ &= e^{\left(\lim_{x\to+0} x\log x\right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

(2) 関数 $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ を微分せよ．

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)' &= \frac{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x} - \sin x \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x(1+\sin^2 x) - \sin x \sin x \cos x}{(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}} \\ &= \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}} \end{aligned}$$

(3) $y = \sin^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を微分せよ．

$h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\sqrt{1-h^2(x)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{aligned} \left(\sin^{-1} h(x)\right)' &= \frac{h'(x)}{\sqrt{1-h^2(x)}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

(4) 対数微分法を用いて $y = \sqrt{\dfrac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}$ を微分せよ．

$$\begin{aligned} \log y &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log|1-x| + \log|2x^2+5|\right\} - \frac{3}{2}\log|x-2| \\ \therefore \quad \frac{y'}{y} &= \left\{\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{2x^2+5} - \frac{3}{x-2}\right\} \\ \therefore \quad y' &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{2x^2+5} - \frac{3}{x-2}\right) \end{aligned}$$

(5) $y = \tan^{-1} x$ は $(1+x^2)y' = 1$ を満たす事を示し，漸化式

(♠) $\quad (1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

が成り立つ事を示せ．

数学的帰納法で示す．まず，$(1+x^2)y' = 1$ の両辺を x で微分して，$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$. 故に $n = 1$ の時 (♠) が成立する．$n = k$ のとき，(♠) が成り立つと仮定する．そのとき，

(♣) $\quad (1+x^2)y^{(k+1)} + 2kxy^{(k)} + k(k-1)y^{(k-1)} = 0$

が成立していると仮定する．この (♣) の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} &(1+x^2)y^{(k+2)} + 2xy^{(k+1)} + 2ky^{(k)} + 2kxy^{(k+1)} + k(k-1)y^{(k)} \\ &= (1+x^2)y^{(k+2)} + 2(k+1)xy^{(k+1)} + \{2k + k(k-1)\}y^{(k)} = 0 \\ &\therefore \quad (1+x^2)y^{(k+2)} + 2(k+1)xy^{(k+1)} + k(k+1)y^{(k)} = 0 \end{aligned}$$

これは $n = k+1$ の時も (♠) が成り立つ事を示している．よって，全ての自然数 n に対して (♠) は成立する．

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.16

(6) $\log(1+\sin x)$ のマクローリン展開の x^3 の項までを求めよ．

$f(x)=\log(1+\sin x)$ とおく．$f(0)=0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x} \quad \longrightarrow f'(0)=1\\
f''(x) &= \frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cos x}{(1+\sin x)^2}\\
&= -\frac{1}{1+\sin x} \quad \longrightarrow f''(0)=-1\\
f^{(3)}(x) &= \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\\
&\longrightarrow f^{(3)}(0)=1
\end{aligned}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

より，

$$\log(1+\sin x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots$$

(7) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$ を求めよ．

$$t=\tan\frac{x}{2}\Longrightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3} &= \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3}\\
&= \int\frac{dt}{(t+1)^2+2^2}=\tan^{-1}\frac{t+1}{2}+C\\
&= \tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right\}+C
\end{aligned}$$

(8) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ を求めよ．

$t=\sqrt[6]{x}$ とおくと，$x=t^6$ $\therefore$ $dx=6t^5\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int\frac{t^3}{1+t^2}(6t^5)\,dt=6\int\frac{t^8}{1+t^2}\,dt\\
&= 6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\
&= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t\right)\\
&= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3}-\sqrt[6]{x}+\tan^{-1}\sqrt[6]{x}\right)\\
&= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\tan^{-1}\sqrt[6]{x}\right)
\end{aligned}$$

積分定数は省略.

(9) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

$t=\tan^{-1}x$ とくと，$dt=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$

$$\therefore\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt=\frac{1}{2}\Big[t^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$$

(10) 等角螺旋 $r=a^\theta$ $(-\infty<\theta\leqq 0;\ a>1)$ の長さを求めよ．

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-\infty}^0\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}\,d\theta\\
&= \int_{-\infty}^0\sqrt{(\log a)^2(a^\theta)^2+(a^\theta)^2}\,d\theta\\
&= \int_{-\infty}^0 a^\theta\cdot\sqrt{(\log a)^2+1}\,d\theta=\sqrt{1+(\log a)^2}\int_{-\infty}^0 a^\theta\,d\theta\\
&= \sqrt{1+(\log a)^2}\cdot\left[\frac{a^\theta}{\log a}\right]_{-\infty}^0=\frac{\sqrt{1+(\log a)^2}}{\log a}
\end{aligned}$$

17　演習問題（補足）

(1) $y=2^{\log x}$ のとき，$\log y=(\log 2)\cdot\log x$.

$\therefore\ \dfrac{y'}{y}=\dfrac{\log 2}{x}$

$\therefore\ y'=\dfrac{\log 2}{x}2^{\log x}$

(2) $y=\sin^{-1}(x-1)+\cos^{-1}2x$ のとき，$y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}-\dfrac{2}{1-4x^2}$.

また，$y=e^{\tan^{-1}x}$ のとき，$y'=\dfrac{1}{1+x^2}e^{\tan^{-1}x}$

(3) $y=e^{-x}\cos x\to y'=-e^{-x}(\cos x+\sin x)\to y''=2e^{-x}\sin x\to y^{(3)}=2e^{-x}(-\sin x+\cos x)\to y^{(4)}=-4e^{-x}\cos x$

(4) $f(x)=(x-a)\sqrt{b-x}$ $\quad(a<b)$ $\quad\longrightarrow f(a)=f(b)=0\longrightarrow c=\dfrac{a+2b}{3}$ とおくと、$a<c<b$ かつ $f'(c)=0$（ロルの定理）

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(x+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x\log(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(x+1)\log(x+1)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\log(x+1)+2}=-\frac{1}{2}$（ロピタルの定理）

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=1=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\sin x\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-x)\right)$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)=1$

(7) $\sqrt{e}\sim 1.649$（少数第 3 位四捨五入）$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{384}x^4e^{\frac{\theta x}{2}}$ $\therefore$ $\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+R_5=1.64843+R_5$. $0<\theta<1,\ 2<e<3$ より $\sqrt{2}<e^{\frac{\theta}{2}<\sqrt{3}}$. よって

$$\frac{\sqrt{2}}{384}=0.00036<R_5=\frac{1}{384}<e^{\frac{\theta}{2}}<0.00045<\frac{\sqrt{3}}{384}$$

$\therefore\sqrt{e}\sim 1.649$

(8) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-(R_4=\frac{5}{128}x^4(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}})$ $\quad\therefore$ $\sqrt{1.1}=1+\frac{1}{20}-\frac{1}{800}+\frac{1}{16000}-R_4=1+0.05-0.00125+0.0000625-R_4=1.0488125-R_4\sim 1.049$.

(9) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ なら，$f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\therefore f(-1)=-2$（極大値）．$f(1)=2$（極小値）．$f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ なら，$f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$\therefore\ f(-1)=-1$（極小値）$\ f(1)=1$（極大値）

学籍番号	No.	氏名		評点	

科　目	文系向け微積分	授業時間	月　曜　4・5時限	担当者	石田・大嶋・古島　No.17

(9)

$$\begin{cases} I=\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}J \\ J=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}I \end{cases}$$

$$\begin{cases} I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C \\ J=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C \end{cases}$$

(10) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\log|x-1|+C$. 実際,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$$

に注意.

(11)

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}-\frac{1}{4}\int\frac{(x-1)^2}{\left((x-1)^2+4\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}+\frac{1}{8}\int(x-1)\left\{\frac{1}{(x-1)^2+4}\right\}'dx \\ & \quad \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}+\frac{1}{8}\frac{(x-1)}{(x-1)^2+4}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{8}\frac{(x-1)}{(x-1)^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}+\tan^{-1}\frac{x-1}{2}\right)+C \end{aligned}$$

(12) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+1}=\log\sqrt{\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\right|}$

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおく.

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$I=-2\int\frac{dt}{(t-3)(t+1)}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

(13) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-5}-x}{\sqrt{5}}\right)+C$

$\because\ \ t=\sqrt{x^2-2x-5}-x$ とおく.

$$x=-\frac{t^2+5}{2(1+t)},\ dx=-\frac{t^2+2t-5}{2(1+t)^2}$$

$$\sqrt{x^2-2x-5}=t+x=\frac{t^2+2t-5}{2(1+t)}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int\frac{-2(1+t)}{t^2+5}\cdot\frac{2(1+t)}{t^2+2t-5}\cdot\frac{t^2+2t-5}{-2(1+t)^2}\,dt \\ &= 2\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(14) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2}f(t)\,dt=2xf(x^2)-2f(2x)$.

$\because\ \ F(t)=\displaystyle\int f(t)\,dt$ とおく.

$$\int_{2x}^{x^2}f(t)\,dt=F(x^2)-F(2x)$$

$$\therefore\ \{F(x^2)\}'=f(x^2)\cdot(2x)=2xf(x^2)$$

(15) $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

$\because\ \ t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置く.

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ (0\leqq t\leqq 1).\ \ 2+\cos x=2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{3+t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\frac{2}{t^2+3}dt=2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(15) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{16}$. 実際, $x=\sin t$ とおく.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 u\,du=\frac{1}{16}\int_0^{\pi}(1-\cos 2u)\,du \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

(16) $y=2^x$ と $y=x+1$ で囲まれる部分の面積 $S=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\log 2}$

$$\because\ \ S=\int_0^1(x+1-2^x)dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1.$$

(17) $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}\ (a>0)$ と半直線 $\theta=0,\ \theta=\alpha\ \ (0<\alpha<\pi)$ で囲まれる部分の面積 $S=a^2\tan\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\dfrac{1}{3}\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\alpha}\sec^4\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sec^4 t\,dt=a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\tan^2 t\right)^2\,dt \\ &= a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}(1+\tan^2 t)(\tan t)'\,dt \\ &= a^2\left[(1+\tan^2 t)\tan t\right]_0^{\frac{\alpha}{2}}-2a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\tan^2 t(1+\tan^2 t)\,dt \\ &= a^2\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}-2a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}(1+\tan^2 t)^2\,dt \\ &+ 2a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}(1+\tan^2 t)\,dt \\ &= a^2\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}-2a^2\int_0^{\frac{\alpha}{2}}(1+\tan^2 t)^4\,dt \\ &+ 2a^2\left[\tan t\right]_0^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= a^2\left(3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}-2S \end{aligned}$$

$$\therefore\ 3S=a^2\left(3+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}$$

学籍番号	No.	氏名		評点	