母平均の検定　問題1　解答

$\boxed{1}$ 母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ である母集団に対し, 以下の母平均の仮説検定 (Z 検定) をせよ.

(1) 標本平均 $\overline{x} = 39$, 母分散 $\sigma^2 = 2^2$, 標本サイズ $n = 16$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 40$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 40$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{39 - 40}{\frac{2}{\sqrt{16}}} = -2.0.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(2) 標本平均 $\overline{x} = 49$, 母分散 $\sigma^2 = 3^2$, 標本サイズ $n = 9$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 50$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 50$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{49 - 50}{\frac{3}{\sqrt{9}}} = -1.0.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(3) 標本平均 $\overline{x} = 101.8$, 母分散 $\sigma^2 = 3^2$, 標本サイズ $n = 25$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 100$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 100$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{101.8 - 100}{\frac{3}{\sqrt{25}}} = 3.0.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(4) 標本平均 $\overline{x} = 1000$, 母分散 $\sigma^2 = 40^2$, 標本サイズ $n = 40$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 1020$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu < 1020$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から左片側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 10% 点 $z_{0.1} = 1.64$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1.64\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1000 - 1020}{\frac{40}{\sqrt{40}}} = -3.16.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(5) 標本平均 $\overline{x} = 490$, 母分散 $\sigma^2 = 20^2$, 標本サイズ $n = 16$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 500$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu < 500$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から左片側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 2% 点 $z_{0.02} = 2.33$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2.33\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{490 - 500}{\frac{20}{\sqrt{16}}} = -2.0.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(6) 標本平均 $\overline{x} = 51.5$, 母分散 $\sigma^2 = 5^2$, 標本サイズ $n = 25$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 50$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu > 50$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 対立仮説 H_1 から右片側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 10% 点 $z_{0.1} = 1.64$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1.64\}$$

と設定する．与えられた数値から，この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{51.5 - 50}{\frac{5}{\sqrt{25}}} = 1.5.$$

したがって $z \notin R$ より，帰無仮説 H_0 は棄却されない．

(7) 標本平均 $\overline{x} = 176.3$, 母分散 $\sigma^2 = 8^2$, 標本サイズ $n = 36$ のとき，

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 174$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu > 174$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ．

[解]: 検定統計量を $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．対立仮説 H_1 から右片側検定を行う．このとき棄却域 R は，標準正規分布の両側 10% 点 $z_{0.1} = 1.64$ を使い，

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1.64\}$$

と設定する．与えられた数値から，この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{176.3 - 174}{\frac{8}{\sqrt{36}}} = 1.73.$$

したがって $z \in R$ より，帰無仮説 H_0 は棄却され，対立仮説 H_1 が採択される．

$\boxed{2}$ 母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ である母集団に対し, 以下の母平均の仮説検定 (t 検定) をせよ.

(1) 標本平均 $\overline{x} = 10.2$, 標本標準偏差 $s = 0.9$, 標本サイズ $n = 10$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 9.5$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 9.5$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 5% 点 $t_9(0.05) = 2.26$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.26\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{9}(10.2 - 9.5)}{0.9} = 2.33.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(2) 標本平均 $\overline{x} = 82$, 標本標準偏差 $s = 2.8$, 標本サイズ $n = 9$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 80$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 80$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 5% 点 $t_8(0.05) = 2.31$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.31\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{8}(82 - 80)}{2.8} = 2.02.$$

したがって $t \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(3) 標本平均 $\overline{x} = 41$, 標本標準偏差 $s = 0.5$, 標本サイズ $n = 7$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 40$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu \neq 40$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 1% 点 $t_6(0.01) = 3.71$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3.71\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{6}(41 - 40)}{0.5} = 4.9.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(4) 標本平均 $\overline{x} = 9.5$, 標本標準偏差 $s = 0.9$, 標本サイズ $n = 10$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 10$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu < 10$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から左片側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 2% 点 $t_9(0.02) = 2.82$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2.82\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{9}(9.5 - 10)}{0.9} = -1.67.$$

したがって $t \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(5) 標本平均 $\overline{x} = 42.5$, 標本標準偏差 $s = 2.5$, 標本サイズ $n = 12$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 45$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu < 45$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から左片側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 10% 点 $t_{11}(0.1) = 1.8$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1.80\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{11}(42.5 - 45)}{2.5} = -3.32.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(6) 標本平均 $\overline{x} = 51.5$, 標本標準偏差 $s = 2.1$, 標本サイズ $n = 14$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 50$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu > 50$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から右片側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 2% 点 $t_{13}(0.02) = 2.65$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2.65\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{13}(51.5 - 50)}{2.1} = 2.58.$$

したがって $t \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(7) 標本平均 $\overline{x} = 82$, 標本標準偏差 $s = 2.5$, 標本サイズ $n = 9$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu = 80$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu > 80$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $T = \dfrac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - \mu)}{S}$ とおくと, T は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う. 対立仮説 H_1 から右片側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 10% 点 $t_8(0.1) = 1.86$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1.86\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 t は

$$t = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{x} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{8}(82 - 80)}{2.5} = 2.26.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.