

## 母分散の推定 問題 1 解答

- 1 正規分布に従う母集団から 16 個の標本  $x_1, x_2, \dots, x_{16}$  を無作為抽出したところ、その和と二乗和はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 80, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 1360$$

となった。

- (1) 母平均と母分散の不偏推定値を求めよ。

[解]: 母平均を  $\mu$ , 母分散を  $\sigma^2$  とすると、母集団分布は正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う。このとき  $\mu$  の不偏推定量は標本平均  $\bar{X}$ ,  $\sigma^2$  の不偏推定量は不偏分散  $U^2$  である。したがってその推定値を計算すると、

$$\bar{x} = 5, \quad u^2 = 64.$$

よって  $\mu$  と  $\sigma^2$  の不偏推定値はそれぞれ  $\bar{x} = 5, u^2 = 64$  である。

- (2)  $t$  分布を用いて、母平均を信頼度 95% で区間推定せよ。

[解]: 母平均  $\mu$  の信頼区間は  $t$  分布を使うと、以下のように求められる:

$$\bar{x} - t_{n-1}(0.05) \frac{u}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1}(0.05) \frac{u}{\sqrt{n}}.$$

ここで  $t$  分布における両側 5% 点を数値表から求めると、 $t_{15}(0.05) = 2.131$  である。したがって、母平均の信頼区間を計算すると、

$$0.738 < \mu < 9.262.$$

- (3)  $\chi^2$  分布を用いて、母分散を信頼度 95% で区間推定せよ。

[解]: 母分散  $\sigma^2$  の信頼区間は  $\chi^2$  分布の上側パーセント点を使うと以下のように求められる:

$$\frac{(n-1)u^2}{\chi_{n-1}^2(0.025)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)u^2}{\chi_{n-1}^2(0.975)}.$$

$\chi^2$  分布の数値表を使って上側パーセント点を求めると、

$$\chi_{15}^2(0.025) = 27.488, \quad \chi_{15}^2(0.975) = 6.262.$$

したがって、母分散の信頼区間を計算すると、

$$34.924 < \sigma^2 < 153.306.$$