不偏推定量, 一致推定量, 最尤推定量　演習問題２

母数 θ の母集団からの標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．ここでは統計量，推定量，推定量の不偏性，一致性を次の意味で用いる．

定義.

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ から作られる確率変数 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を**統計量**という．とくに母数 θ を推定するために用いる統計量 T を θ の**推定量**という．
- 母数 θ の推定量 T が
$$E(T) = \theta$$
をみたすとき，T は**不偏性**をもつ，もしくは**不偏推定量**であるという．不偏推定量とは，粗っぽくいえばいろいろな値をランダムに取り得る量であるが，期待値が θ となるくらいには偏りのない値をとるということである．
- 母数 θ の推定量 T が任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} P(|T-\theta| < \varepsilon) = 1$$
をみたすとき，T は**一致性**をもつ，もしくは**一致推定量**であるという．一致推定量とは，粗っぽくいえば標本の大きさ n を大きくすれば高確率で T の値と θ の差が小さいということである．

以上を踏まえて次の問に答えよ．

問 1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母平均が μ，母分散が σ^2 である母集団からの標本とする．このとき統計量
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
を考える（$\overline{X}$ は，**標本平均**とよばれる）．以下の問に答えよ．

(i) $\overline{X}$ は母平均 μ の不偏推定量であることを示せ．

(ii) 一般に期待値が μ で分散が σ^2 であるような確率変数 X について，任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$
が成立することが知られている（**チェビシェフの不等式**という）．この事実を用いて $\overline{X}$ が母平均 μ の一致推定量であることを示せ[*1]．

問 2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母平均が μ，母分散が σ^2 である母集団からの標本とする．このとき統計量
$$V = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
を考える（V は**不偏（標本）分散**とよばれる）．V は母分散 σ^2 の不偏推定量となることを示せ[*2]．

[*1] この事実を**弱大数の法則**ともいう．

[*2] 実は一致推定量であることも示される．