不偏推定量，一致推定量，最尤推定量　演習問題２　解答例

母数 θ の母集団からの標本を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．ここでは統計量，推定量，推定量の不偏性，一致性を次の意味で用いる．

定義．

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ から作られる確率変数 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を**統計量**という．とくに母数 θ を推定するために用いる統計量 T を θ の**推定量**という．
- 母数 θ の推定量 T が
$$E(T) = \theta$$
をみたすとき，T は**不偏性**をもつ，もしくは**不偏推定量**であるという．不偏推定量とは，粗っぽくいえばいろいろな値をランダムに取り得る量であるが，期待値が θ となるくらいには偏りのない値をとるということである．
- 母数 θ の推定量 T が任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} P(|T-\theta| < \varepsilon) = 1$$
をみたすとき，T は**一致性**をもつ，もしくは**一致推定量**であるという．一致推定量とは，粗っぽくいえば標本の大きさ n を大きくすれば高確率で T の値と θ の差が小さいということである．

以上を踏まえて次の問に答えよ．

問 1． $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母平均が μ，母分散が σ^2 である母集団からの標本とする．このとき統計量
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
を考える（$\overline{X}$ は，**標本平均**とよばれる）．以下の問に答えよ．

(i) $\overline{X}$ は母平均 μ の不偏推定量であることを示せ．

解答． 標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう確率変数列であったから，すべての $1 \le i \le n$ について $E(X_i) = \mu$ が成り立つ．また，期待値の線形性，すなわち期待値をもつ確率変数 X, Y と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ が成り立つことを思い出すと
$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu.$$
したがって，$\overline{X}$ は母平均 μ の不偏推定量である．■

(ii) 一般に期待値が μ で分散が σ^2 であるような確率変数 X について，任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$P(|X-\mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

が成立することが知られている（**チェビシェフの不等式**という）．この事実を用いて $\overline{X}$ が母平均 μ の一致推定量であることを示せ[*1]．

解答． 分散をもつ確率変数 X に対して，$V(X)$ をその分散とする．まず $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$ となることを示そう．標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は，母集団分布と同じ確率分布にしたがう独立な確率変数列であった．よってすべての $1 \leq i \leq n$ について $V(X_i) = \sigma^2$ が成り立つ．また，$a, b \in \mathbb{R}$ と分散をもつ独立な確率変数 X, Y について，$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$ が成り立つことを思い出すと

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

とわかる．
さて，$\overline{X}$ が母平均 μ の一致推定量であることを示す．ε を任意の正の数としよう．余事象の確率および $\overline{X}$ にチェビシェフの不等式を用いると

$$1 \geq P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1 - P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

とわかる．したがって $P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \to 1\,(n \to \infty)$ とわかり，$\overline{X}$ は母平均 μ の一致推定量であることがわかる． ■

問 2． $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を母平均が μ，母分散が σ^2 である母集団からの標本とする．このとき統計量

$$V = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

を考える（V は**不偏（標本）分散**とよばれる）．V は母分散 σ^2 の不偏推定量となることを示せ[*2]．

解答． 各 $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} E((X_i - \overline{X})^2) &= E(X_i - \mu - (\overline{X} - \mu)^2) \\ &= E((X_i - \mu)^2) - 2E((X_i - \mu)(\overline{X} - \mu)) + E((\overline{X} - \mu)^2) \end{aligned}$$

となるが，最右辺第 1 項，第 3 項については $E(X_i) = E(\overline{X}) = \mu$ であることから

$$E((X_i - \mu)^2) = V(X_i) = \sigma^2, \quad E((\overline{X} - \mu)^2) = V(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

[*1] この事実を**弱大数の法則**ともいう．
[*2] 実は一致推定量であることも示される．

となる．第 2 項については

$$
\begin{aligned}
E((X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)) &= E\left((X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\mu\right)\right)\\
&= E\left((X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu\right)\right)\\
&= E\left((X_i-\mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\left((X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(E(X_i-\mu)^2+\sum_{j:j\neq i}E\left((X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)\right)
\end{aligned}
$$

とわかる．ここで，2 番目の等号は

$$
\mu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu
$$

となることを用い，最後の等号は和を第 i 項とその他の項の和に分けた．$i \neq j$ ならば X_i と X_j は独立であるから，$X_i-\mu$ と $X_j-\mu$ も独立となり，

$$
\sum_{j:j\neq i}E\left((X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)=\sum_{j:j\neq i}E\left((X_i-\mu)\right)E\left((X_j-\mu)\right)=\sum_{j:j\neq i}0\cdot 0=0
$$

とわかるので，結果として

$$
E((X_i-\mu)(\overline{X}-\mu))=\frac{1}{n}\left(E(X_i-\mu)^2+\sum_{j:j\neq i}E\left((X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)\right)=\frac{1}{n}(\sigma^2-0)=\frac{\sigma^2}{n}
$$

を得る．以上より

$$
\begin{aligned}
E((X_i-\overline{X})^2) &= E((X_i-\mu)^2)-2E((X_i-\mu)(\overline{X}-\mu))+E((\overline{X}-\mu)^2)\\
&= \sigma^2-2\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

とわかるので，V は期待値をもち

$$
\begin{aligned}
E(V) &= E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E((X_i-\overline{X})^2)\\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

とわかる．つまり，V は母分散 σ^2 の不偏推定量である． ■