

不偏推定量, 一致推定量, 最尤推定量 問題 1 解答

ある母集団 A における無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とし, その実現値を $x_1, x_2, \dots, x_n$ とする. 母集団 A の母集団分布が母数 θ を含む確率密度関数 $f(x; \theta)$ であったとき,

$$L(\theta) = f(x_1; \theta)f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

を尤度関数という. 母集団分布が離散確率分布の場合は, 確率関数を使って尤度関数を

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

と定義する.

尤度関数 $L(\theta)$ の値が最大になる θ の値 $\theta = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を最尤推定値とよび, 実現値を確率変数に置き換えた $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を最尤推定量という. 確率密度関数が $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ と, 母数が複数ある場合, m 変数関数として尤度関数 $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ が最大となるような $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ の値が最尤推定値となる.

最尤推定値を求めるときには, 尤度関数 $L(\theta)$ の代わりに自然対数をかけた対数尤度関数 $l(\theta) = \log L(\theta)$ の最大値を求めることが多い. その場合は θ に関する偏導関数 $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$ を使って対数尤度関数の増減を調べる方法がよく用いられる.

ある母集団 A における無作為標本を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とし, その実現値を $x_1, x_2, \dots, x_n$ とする.

1 母集団 A の母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$, すなわち確率密度関数が

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であるとき, 母平均 μ と母分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ.

[解]: 混乱を避けるため, $\theta = \sigma^2$ とおく. 尤度関数 $L(\mu, \theta)$ は

$$L(\mu, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \theta) = 2\pi^{-\frac{n}{2}} \theta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

両辺の自然対数をとって対数尤度関数 $l(\mu, \theta)$ を求めると,

$$l(\mu, \theta) = \log L(\mu, \theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

最尤推定量を求めるため, 対数尤度関数 $l(\mu, \theta)$ が 2 変数関数として最大値となる (μ, θ) の値を求める. まず θ を固定し, $l(\mu, \theta)$ を μ に関する 1 変数関数とみなし, 極値となる点を求める. このとき極値となる点は, 方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \theta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \frac{1}{\theta} \left(-n\mu + \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

を満たす. これより μ が標本平均に等しいとき, すなわち $\mu = \bar{x}$ のとき $l(\mu, \theta)$ は極値を取る. また $\theta > 0$ であることに注意すれば, $\mu < \bar{x}$ ならば $\frac{\partial l(\mu, \theta)}{\partial \mu} > 0$ かつ $\mu > \bar{x}$ ならば

$\frac{\partial l(\mu, \theta)}{\partial \mu} < 0$ となるので, $\mu = \bar{x}$ のとき $l(\mu, \theta)$ は最大値を取る. 以上の話は θ の値に依存しないため, μ の最尤推定量は $\bar{X}$ である.

次に対数尤度関数に $\mu = \bar{x}$ を代入して, $l(\bar{x}, \theta)$ を θ の 1 変数関数とみて極値を求める. 極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\bar{x}, \theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

を満たす. これより θ が標本分散に等しいとき, すなわち $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2$ のとき, $l(\bar{x}, \theta)$ は極値を取る. また $\frac{\partial l(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta}$ の正負を調べれば, 尤度関数は $\theta = s^2$ で最大値を取る. したがって, σ^2 の最尤推定量は S^2 である.

以上より, 母平均と母分散 μ, σ^2 の最尤推定量は $\bar{X}, S^2$ である.

- 2 母集団 A の母集団分布が指数分布 $Ex(\lambda)$, すなわち確率密度関数が

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0; x \geq 0)$$

であるとき, 母数 λ の最尤推定量を求めよ.

[解]: 尤度関数 $L(\lambda)$ は

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}.$$

両辺の自然対数をとって対数尤度関数 $l(\lambda)$ を求めると,

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

対数尤度関数 $l(\lambda)$ を母数 λ の 1 変数関数とみて極値を求める. 極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

を満たす. これより $\lambda = \bar{x}^{-1}$ のとき尤度関数は極値を取る. また, $\lambda < \bar{x}^{-1}$ ならば $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} > 0$ かつ $\lambda > \bar{x}^{-1}$ ならば $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} < 0$ となるので, $\lambda = \bar{x}^{-1}$ のとき尤度関数は最大値を取る. したがって, λ の最尤推定量は $\bar{X}^{-1}$ である.

- 3 母集団 A の母集団分布がポアソン分布 $Po(\lambda)$, すなわち確率関数が

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda > 0; k = 0, 1, 2, \dots)$$

であるとき, 母数 λ の最尤推定量を求めよ.

[解]: 尤度関数 $L(\lambda)$ は

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!}.$$

両辺の自然対数をとって対数尤度関数 $l(\lambda)$ を求めると,

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \log \lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i!$$

対数尤度関数 $l(\lambda)$ を母数 λ の 1 変数関数とみて極値を求める. 極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n$$

を満たす. これより $\lambda = \bar{x}$ のとき $l(\lambda)$ は極値を取る. また, $\lambda < \bar{x}$ ならば $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} > 0$ かつ $\lambda > \bar{x}$ ならば $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} < 0$ となるので, $\lambda = \bar{x}$ のとき $l(\lambda)$ は最大値を取る. したがって, λ の最尤推定量は $\bar{X}$ である.

- 4 母集団 A の母集団分布が二項分布 $B(m, p)$, すなわち確率関数が

$$P(X = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \quad (0 < p < 1; k = 0, 1, 2, \dots, m)$$

であるとき, m は既知として母数 p の最尤推定量を求めよ.

[解]: 尤度関数 $L(p)$ は

$$L(p) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nm - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}.$$

値 m は既知であるので, $L(p)$ は p に関する 1 変数関数とみなす. 両辺の自然対数をとって対数尤度関数 $l(p)$ を求めると,

$$l(p) = \log L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \log p + \left(nm - \sum_{i=1}^n x_i \right) \log(1-p) + \sum_{i=1}^n \log \binom{m}{x_i}.$$

$l(p)$ の極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} l(p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{nm - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = \frac{-nmp + \sum_{i=1}^n x_i}{p(1-p)}$$

を満たす. これより $p = m^{-1}\bar{x}$ のとき $l(p)$ は極値を取る. また, $0 < p < m^{-1}\bar{x}$ ならば $\frac{\partial l(p)}{\partial p} > 0$ かつ $m^{-1}\bar{x} < p < 1$ ならば $\frac{\partial l(p)}{\partial p} < 0$ となるので, $p = m^{-1}\bar{x}$ のとき $l(p)$ は最大値を取る. したがって, p の最尤推定量は $m^{-1}\bar{X}$ である.

- 5 母集団 A の母集団分布が対数正規分布, すなわち確率密度関数が

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0)$$

であるとき, 母数 μ, σ^2 の最尤推定量を求めよ.

[解]: 混乱を避けるため, $\theta = \sigma^2$ とおく. 尤度関数 $L(\mu, \theta)$ は

$$L(\mu, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \theta) = 2\pi^{-\frac{n}{2}} \theta^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu)^2} \prod_{i=1}^n x_i^{-1}.$$

両辺の自然対数をとって対数尤度関数 $l(\mu, \theta)$ を求めると,

$$l(\mu, \theta) = \log L(\mu, \theta) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu)^2 - \sum_{i=1}^n x_i.$$

まず θ を固定し, $l(\mu, \theta)$ を μ に関する 1 変数関数とみなし, 極値となる点を求める. $l(\mu, \theta)$ の極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} l(\mu, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \mu) = \frac{1}{\theta} \left(-n\mu + \sum_{i=1}^n \log x_i \right)$$

を満たす. これより $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i$ のとき $l(\mu, \theta)$ は極値を取る. $\frac{\partial l(\mu, \theta)}{\partial \mu}$ の正負を調べれば, $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i$ のとき $l(\mu, \theta)$ は最大値を取る. 以上の話は θ の値に依存しないため, μ の最尤推定量は $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$ である.

次に対数尤度関数 $l(\mu, \theta)$ の μ に値 $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i$ を代入して, $l(\hat{\mu}, \theta)$ を θ の 1 変数関数とみて極値を求める. 極値となる点は方程式

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\hat{\mu}, \theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{-n\theta + \sum_{i=1}^n (\log x_i - \hat{\mu})^2}{2\theta^2}$$

を満たす. これより $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log x_i - \hat{\mu})^2$ のとき, $l(\hat{\mu}, \theta)$ は極値を取る. また $\frac{\partial l(\hat{\mu}, \theta)}{\partial \theta}$ の正負を調べれば, 最大値をとることもわかる.

以上より, 母数 μ, σ^2 の最尤推定量は

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log X_i - \hat{\mu})^2$$

である.