推定量, 標本平均, 標本分散, 不偏分散　問題１　解答

$\boxed{1}$ (1) 母集団が平均 5, 分散 25 の正規分布 $N(5,25)$ に従うとき, $n = 16$ の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し, 標本平均 $\overline{X}$ の確率 $P(\overline{X} \leq 6)$ を求めよ.

[解]: 標本平均 $\overline{X}$ は, 確率変数の独立性と正規分布の再生性から

$$\overline{X} \sim N\left(5, \frac{25}{16}\right)$$

が成り立つ. 確率変数の標準化 $Z = \dfrac{4}{5}(\overline{X} - 5)$ を行うと, Z は標準正規分布に従う. したがって求める確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq 6) &= P\left(Z \leq \frac{4}{5}(6-5)\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{4}{5}\right) \\ &= 0.7881. \end{aligned}$$

(2) 母集団が平均 1, 分散 27 の正規分布 $N(1,27)$ に従うとき, $n = 12$ の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し, 標本平均 $\overline{X}$ の確率 $P(\overline{X} \leq -1)$ を求めよ.

[解]: 標本平均 $\overline{X}$ は, 確率変数の独立性と正規分布の再生性から

$$\overline{X} \sim N\left(1, \frac{9}{4}\right)$$

が成り立つ. 確率変数の標準化 $Z = \dfrac{2}{3}(\overline{X} - 1)$ を行うと, Z は標準正規分布に従う. したがって求める確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq -1) &= P\left(Z \leq \frac{2}{3}(-1-1)\right) \\ &= P\left(Z \leq -\frac{4}{3}\right) \\ &= 0.09121. \end{aligned}$$

(3) 母集団が平均 1, 分散 25 の正規分布 $N(1,25)$ に従うとき, $n = 16$ の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し, 標本平均 $\overline{X}$ の確率 $P(0.25 \leq \overline{X} \leq 1.25)$ を求めよ.

[解]: 標本平均 $\overline{X}$ は, 確率変数の独立性と正規分布の再生性から

$$\overline{X} \sim N\left(1, \frac{25}{16}\right)$$

が成り立つ. 確率変数の標準化 $Z = \dfrac{4}{5}(\overline{X} - 1)$ を行うと, Z は標準正規分布に従う. したがって求める確率は

$$\begin{aligned} P(0.25 \leq \overline{X} \leq 1.25) &= P\left(\frac{4}{5}(0.25-1) \leq Z \leq \frac{4}{5}(1.25-1)\right) \\ &= P(-0.6 \leq Z \leq 0.2) \\ &= 0.305. \end{aligned}$$

(4) 母集団が平均 3, 分散 24 の正規分布 $N(3,24)$ に従うとき, $n=18$ の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し, 標本平均 $\overline{X}$ の確率 $P(2 \leq \overline{X} \leq 5)$ を求めよ.

[解]: 標本平均 $\overline{X}$ は, 確率変数の独立性と正規分布の再生性から

$$\overline{X} \sim N\left(3, \frac{4}{3}\right)$$

が成り立つ. 確率変数の標準化 $Z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\overline{X}-3)$ を行うと, Z は標準正規分布に従う. したがって求める確率は

$$\begin{aligned} P(2 \leq \overline{X} \leq 5) &= P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2-3) \leq Z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(5-3)\right) \\ &= P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq Z \leq \sqrt{3}\right) \\ &= P(-0.866 \leq Z \leq 1.73) \\ &= 0.7651. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ ある品種のトマトの 1 個当たりの重量は平均 180 g, 標準偏差 15 の正規分布に従う.

(1) 無作為に選んだ 9 個のトマトの平均重量が 175 g 以上となる確率を求めよ.

[解]: 1 個のトマトの重量を X とすると, $X \sim N(180, 15^2)$ である. 無作為抽出した 9 個のトマトの重量の標本平均を $\overline{X}$ とすると,

$$\overline{X} \sim N(180, 5^2).$$

したがって, Z を標準正規分布に従う確率変数とすると, もとめる確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 175) &= P\left(Z > \frac{1}{5}(175-180)\right) \\ &= P(Z > -1) \\ &= 0.8413. \end{aligned}$$

(2) 無作為に選んだ n 個のトマトの平均重量が 175 g 以上となる確率が 99% 以上となるためには, トマトの個数 n は何個以上にすれば良いか.

[解]: n 個のトマトの平均重量を標本平均 $\overline{X}$ とすると,

$$\overline{X} \sim N\left(180, \frac{15^2}{n}\right).$$

したがって, 求める個数 n は

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 175) \geq 0.99, \\ P(\overline{X} < 175) \leq 0.01 \end{aligned}$$

が成り立つことが条件となるから,

$$P\left(Z < \frac{\sqrt{n}}{15}(175-180)\right) = P\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \leq 0.01,$$

すなわち,

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.99$$

となる n を求めればよい. 正規分布表より, $\dfrac{\sqrt{n}}{3} \geq 2.33$ から $n \geq 48.7$. したがって, n は 49 個以上とすればよい.