

分割表, 適合度検定, 独立性検定 問題 2 解答

- 1 X ウイルスのワクチンの効果を調べるため, X ウイルスに感染した人としていない人に対してワクチン接種済かアンケート調査を行ったところ, 以下の表が得られた. このワクチンは X ウイルスの予防に効果があるといえるか, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

	感染した	感染していない	計
ワクチン摂取済み	41	52	93
ワクチン摂取なし	148	56	204
計	189	108	297

[解]: 独立性の χ^2 検定を行う. 仮説検定のため, 以下のように仮説を立てる.

- 帰無仮説 H_0 : 予防接種と感染に関連は無い (独立である).
- 対立仮説 H_1 : 予防接種と感染に関連はある (独立でない).

検定統計量の実現値を χ^2 とすると,

$$\chi^2 = \frac{297(41 \times 56 - 52 \times 148)^2}{93 \times 204 \times 189 \times 108} \approx 22.36.$$

カイ 2 乗分布の上側 1 パーセント点は $\chi_1^2(0.01) = 6.63$ で, $\chi^2 > \chi_1^2(0.01)$ となるので, 有意水準 1% において実現値 χ^2 は棄却域 R に含まれる. したがって, 帰無仮説 H_0 が棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される. 以上より, 予防注射の効果はあるといえる.

- 2 ある難病と食品 X の摂取の関連性を調査するため, 難病患者と健常者のデータを収集したところ, 以下の表が得られた. 食品 X は難病の発症に関連しているか, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

	難病患者	健常者	計
X の摂取あり	180	170	350
X の摂取なし	210	140	350
計	390	310	700

[解]: 独立性の χ^2 検定を行う. 仮説検定のため, 以下のように仮説を立てる.

- 帰無仮説 H_0 : 食品 X と難病に関連は無い (独立である).
- 対立仮説 H_1 : 食品 X と難病に関連はある (独立でない).

検定統計量の実現値を χ^2 とすると,

$$\chi^2 = \frac{700(180 \times 140 - 170 \times 210)^2}{350 \times 350 \times 390 \times 310} \approx 5.211.$$

カイ 2 乗分布の上側 1 パーセント点は $\chi_1^2(0.01) = 6.63$ で, $\chi^2 < \chi_1^2(0.01)$ となるので, 有意水準 1% において実現値 χ^2 は棄却域 R に含まれない. したがって, 帰無仮説 H_0 は棄却されない. 以上より, 食品 X と難病に関連はあるとはいえない.

- 3 次の表は微分積分と線形代数の科目における期末試験の成績を表でまとめたものである。この表をもとに、2つの科目と成績に関連があるかどうか、有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ。

微積 \ 線形	優	良	可	計
優	10	25	10	45
良	20	35	20	75
可	5	15	20	40
計	35	75	50	160

[解]: 独立性の χ^2 検定を行う。仮説検定のため、以下のように仮説を立てる。

- 帰無仮説 H_0 : 科目と成績に関連はない。
- 対立仮説 H_1 : 科目と成績に関連はある。

帰無仮説が成り立つとすると、科目と成績に関連はない、すなわち独立となる。そのときの期待度数について計算した表は以下になる:

期待度数	優	良	可	計
優	9.84375	21.09375	14.0625	45
良	16.40625	35.15625	23.4375	75
可	8.75	18.75	12.5	40
計	35	75	50	160

検定統計量の実現値を χ^2 とすると,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}} \approx 10.05.$$

ここで、自由度は $\phi = (3 - 1) \times (3 - 1) = 4$ である。カイ 2 乗分布の上側 5 パーセント点は $\chi_4^2(0.05) = 9.488$ で、 $\chi^2 > \chi_4^2(0.05)$ となるので、有意水準 5% において実現値 χ^2 は棄却域 R に含まれる。したがって、帰無仮説 H_0 が棄却され、対立仮説 H_1 が採択される。以上より、科目と成績に関連はある。