

母分散の検定 問題1 解答

- 1 母集団分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ である母集団に対し、以下の母分散の検定 (χ^2 検定) をせよ.

(1) 標本分散 $s^2 = 0.0125$, 標本サイズ $n = 10$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 0.01$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 0.01$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n - 1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_9^2(0.975) = 2.7, \quad \chi_9^2(0.025) = 19.02$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 2.7, 19.02 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{10 \times 0.0125}{0.01} = 12.5.$$

したがって $v \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(2) 標本分散 $s^2 = 20$, 標本サイズ $n = 15$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 10$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 10$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n - 1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_{14}^2(0.975) = 5.629, \quad \chi_{14}^2(0.025) = 26.12$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 5.629, 26.12 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{15 \times 20}{10} = 30.0.$$

したがって $v \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(3) 標本分散 $s^2 = 0.36$, 標本サイズ $n = 16$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 0.3$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 0.3$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_{15}^2(0.995) = 4.601, \quad \chi_{15}^2(0.005) = 32.8$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 4.601, 32.8 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{16 \times 0.36}{0.3} = 19.2.$$

したがって $v \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(4) 標本分散 $s^2 = 2$, 標本サイズ $n = 30$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 6$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 6$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_{29}^2(0.995) = 13.12, \quad \chi_{29}^2(0.005) = 52.34$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 13.12, 52.34 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{30 \times 2}{6} = 10.0.$$

したがって $v \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(5) 標本分散 $s^2 = 32$, 標本サイズ $n = 25$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 16$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 16$

として有意水準 $\alpha = 0.1$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_{24}^2(0.95) = 13.85, \quad \chi_{24}^2(0.05) = 36.42$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 13.85, 36.42 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{25 \times 32}{16} = 50.0.$$

したがって $v \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(6) 標本分散 $s^2 = 1.5$, 標本サイズ $n = 20$ のとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \sigma^2 = 1$,
- 対立仮説を $H_1 : \sigma^2 \neq 1$

として有意水準 $\alpha = 0.1$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を $V = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で V は自由度 $n - 1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, χ^2 分布の上側パーセント点

$$\chi_{19}^2(0.95) = 10.12, \quad \chi_{19}^2(0.05) = 30.14$$

を使い,

$$R = \{x \geq 0 \mid x < 10.12, 30.14 < x\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 v は

$$v = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \times 1.5}{1} = 30.0.$$

したがって $v \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.