母平均の差の検定　問題1　解答

$\boxed{1}$ 母集団 A, 母集団 B の母集団分布がそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする. 以下の母平均の差の仮説検定 (2 標本の Z 検定) をせよ.

(1) 母集団 A では,　標本平均 $\overline{x}_1 = 103$,　母分散 $\sigma_1^2 = 15^2$,　標本サイズ $n_1 = 10$,
母集団 B では,　標本平均 $\overline{x}_2 = 101$,　母分散 $\sigma_2^2 = 15^2$,　標本サイズ $n_2 = 10$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

とおく. このとき帰無仮説 H_0 が成り立つ上で Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{103 - 101}{\sqrt{\frac{15^2}{10} + \frac{15^2}{10}}} = 0.298.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(2) 母集団 A では,　標本平均 $\overline{x}_1 = 15$,　母分散 $\sigma_1^2 = 5^2$,　標本サイズ $n_1 = 10$,
母集団 B では,　標本平均 $\overline{x}_2 = 20$,　母分散 $\sigma_2^2 = 5^2$,　標本サイズ $n_2 = 10$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

とおく. このとき帰無仮説 H_0 が成り立つ上で Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{15 - 20}{\sqrt{\frac{5^2}{10} + \frac{5^2}{10}}} = -2.24.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(3) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 64$, 母分散 $\sigma_1^2 = 18^2$, 標本サイズ $n_1 = 70$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 68$, 母分散 $\sigma_2^2 = 18^2$, 標本サイズ $n_2 = 85$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

とおく. このとき帰無仮説 H_0 が成り立つ上で Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{64 - 68}{\sqrt{\frac{18^2}{70} + \frac{18^2}{85}}} = -1.38.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(4) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 237$, 母分散 $\sigma_1^2 = 30^2$, 標本サイズ $n_1 = 25$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 213$, 母分散 $\sigma_2^2 = 25^2$, 標本サイズ $n_2 = 30$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

とおく. このとき帰無仮説 H_0 が成り立つ上で Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{237 - 213}{\sqrt{\frac{30^2}{25} + \frac{25^2}{30}}} = 3.18.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(5) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 145$, 母分散 $\sigma_1^2 = 40^2$, 標本サイズ $n_1 = 245$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 155$, 母分散 $\sigma_2^2 = 45^2$, 標本サイズ $n_2 = 200$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,

- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

とおく. このとき帰無仮説 H_0 が成り立つ上で Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 与えられた数値から, この検定統計量における実現値 z は

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{145 - 155}{\sqrt{\frac{40^2}{245} + \frac{45^2}{200}}} = -2.45.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

$\boxed{2}$ 母集団 A, 母集団 B の母集団分布がそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする．このとき以下の母平均の差の仮説検定 (2 標本の t 検定) をせよ．ただし A と B の母分散は等しい $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ と仮定する．

(1) 母集団 A では， 標本平均 $\overline{x}_1 = 13.5$, 標本分散 $s_1^2 = 1^2$, 標本サイズ $n_1 = 10$,
母集団 B では， 標本平均 $\overline{x}_2 = 14.7$, 標本分散 $s_2^2 = 1.1^2$, 標本サイズ $n_2 = 10$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ．

[解]: 検定統計量を

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}}, \qquad \left(V = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で T は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布 $t_{n_1+n_2-2}$ に従う．対立仮説 H_1 から両側検定を行う．このとき棄却域 R は, t 分布の両側 5% 点 $t_{18}(0.05) = 2.1$ を使い，

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.10\}$$

と設定する．このとき, 統計量 V の実現値 v は

$$v = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{10 \times 1^2 + 10 \times 1.1^2}{10 + 10 - 2} = 1.23$$

となる．与えられた数値から, 検定統計量 T における実現値 t は

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) v}} = \frac{13.5 - 14.7}{\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) 1.23}} = -2.42.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される．

(2) 母集団 A では， 標本平均 $\overline{x}_1 = 145$, 標本分散 $s_1^2 = 6^2$, 標本サイズ $n_1 = 5$,
母集団 B では， 標本平均 $\overline{x}_2 = 138$, 標本分散 $s_2^2 = 5.5^2$, 標本サイズ $n_2 = 5$,
であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ．

[解]: 検定統計量を

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}}, \qquad \left(V = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で T は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布 $t_{n_1+n_2-2}$ に従う．対立仮説 H_1 から両側検定を行う．このとき棄却域 R は, t 分布の両側 5% 点 $t_8(0.05) = 2.31$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.31\}$$

と設定する. このとき, 統計量 V の実現値 v は

$$v = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{5 \times 6^2 + 5 \times 5.5^2}{5 + 5 - 2} = 41.4$$

となる. 与えられた数値から, 検定統計量 T における実現値 t は

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) v}} = \frac{145 - 138}{\sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) 41.4}} = 1.72.$$

したがって $t \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(3) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 74$, 標本分散 $s_1^2 = 11^2$, 標本サイズ $n_1 = 28$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 81$, 標本分散 $s_2^2 = 11^2$, 標本サイズ $n_2 = 24$,

であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}}, \qquad \left(V = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で T は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布 $t_{n_1+n_2-2}$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 1% 点 $t_{50}(0.01) = 2.68$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.68\}$$

と設定する. このとき, 統計量 V の実現値 v は

$$v = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{28 \times 11^2 + 24 \times 11^2}{28 + 24 - 2} = 126.0$$

となる. 与えられた数値から, 検定統計量 T における実現値 t は

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) v}} = \frac{74 - 81}{\sqrt{\left(\frac{1}{28} + \frac{1}{24}\right) 126.0}} = -2.24.$$

したがって $t \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(4) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 10$, 標本分散 $s_1^2 = 3^2$, 標本サイズ $n_1 = 12$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 20$, 標本分散 $s_2^2 = 4^2$, 標本サイズ $n_2 = 20$,

であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}}, \qquad \left(V = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で T は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布 $t_{n_1+n_2-2}$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 1% 点 $t_{30}(0.01) = 2.75$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.75\}$$

と設定する. このとき, 統計量 V の実現値 v は

$$v = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{12 \times 3^2 + 20 \times 4^2}{12 + 20 - 2} = 14.3$$

となる. 与えられた数値から, 検定統計量 T における実現値 t は

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) v}} = \frac{10 - 20}{\sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}\right) 14.3}} = -7.25.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(5) 母集団 A では, 標本平均 $\overline{x}_1 = 68$, 標本分散 $s_1^2 = 10^2$, 標本サイズ $n_1 = 15$,
母集団 B では, 標本平均 $\overline{x}_2 = 58$, 標本分散 $s_2^2 = 9^2$, 標本サイズ $n_2 = 8$,

であるとき,

- 帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,
- 対立仮説を $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) V}}, \qquad \left(V = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

とおくと, 帰無仮説 H_0 が成り立つ上で T は自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布 $t_{n_1+n_2-2}$ に従う. 対立仮説 H_1 から両側検定を行う. このとき棄却域 R は, t 分布の両側 5% 点 $t_{21}(0.05) = 2.08$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.08\}$$

と設定する. このとき, 統計量 V の実現値 v は

$$v = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{15 \times 10^2 + 8 \times 9^2}{15 + 8 - 2} = 102.0$$

となる. 与えられた数値から, 検定統計量 T における実現値 t は

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) v}} = \frac{68 - 58}{\sqrt{\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{8}\right) 102.0}} = 2.26.$$

したがって $t \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.