連続確率分布の例: 正規分布　問題 1　解答

$\boxed{1}$ 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき, 標準正規分布表を用いて次の確率を求めよ.

(1) $P(|Z| \leq 1)$

(2) $P(Z \leq 1.25)$

[解]:

(1) $P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$
$= 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826$

(2) 標準正規分布の対称性から

$$P(Z \leq 1.25) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944.$$

$\boxed{2}$ 確率変数 X が正規分布 $N(5, 2^2)$ に従うとき, 確率 $P(X \geq 7)$ を求めよ.

[解]: 確率変数を $Z = \dfrac{X-5}{2}$ とおくと, Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. このとき求める確率は, 標準正規分布表を使うと,

$$P(X \geq 7) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587.$$

$\boxed{3}$ 確率変数 X は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする.

(1) $P(X > a) = 0.05$ となる a を求めよ.

(2) $P(|X| > a) = 0.05$ となる a を求めよ.

[解]:

(1) $0.05 = P(X > a) = 0.5 - P(0 < X < a)$ より $P(X < a) = 0.45$ となる. 標準正規分布の数値表から, $a = 1.645$ が得られる.

(2) $0.05 = P(|X| > a) = 2P(X > a) = 1 - 2P(0 < X < a)$ より $P(0 < X < a) = 0.475$ となる. 標準正規分布の数値表から, $a = 1.96$ が得られる.

$\boxed{4}$ ある大学における統計学の定期試験の成績は平均 70, 標準偏差 10 の正規分布に従っている.

(1) 成績が 80 点以上の学生は全体の何 % 占めるか求めよ.

[解]: $X \sim N(70, 10^2)$ より, $Z = \dfrac{X-70}{10}$ とおくと, $Z \sim N(0,1)$ である. このとき, 求める確率は

$$P(X \geq 80) = P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587.$$

したがって, 成績が 80 点以上の学生は全体の 15.87% である.

(2) 成績が 60 点以上 70 点以下の学生は全体の何 % 占めるか求めよ.

[解]: 前の問題と同様に計算すると, $P(60 \leq X \leq 70) = P(-1 \leq Z \leq 0) = 0.3413$. したがって, 成績が 60 点以上 70 点以下の学生は全体の 34.13% である.

(3) 成績上位 5 % に含まれるためには, 何点以上必要か.

[解]: $P(Z \geq a) = 0.05$ となる a を求める. このとき $P(0 \leq Z \leq a) = 0.45$ より, 数値表から $a = 1.645$ と求められる. このとき $X = 10Z + 70$ より, $10a + 70 = 86.45$. したがって 86.45 点以上であれば上位 5% に入る.