

連続確率分布の例: 連続一様分布, 指数分布 問題 1 解答

- 1 $a < b$ とする. 連続一様分布 $U(a, b)$ に従う確率変数 X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ が

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

であることを示せ.

[解]: 確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ($a < x < b$) であるから,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

また,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

となるので, 分散の公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を利用すると

$$V(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

- 2 ある横断歩道において, 車が通過してから次の車が来る間隔の時間を X 分とする. X は指数分布に従い, 間隔時間の平均は 0.5 分だという. このとき, 車が横断歩道を通過してから次の車が 1 分以内に来る確率を求めよ.

[解]: $E(X) = \frac{1}{2}$ であるから, X は指数分布 $Ex(2)$ に従う. 確率密度関数は

$$f(x) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$$

で, その分布関数は $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-2x}$ である. したがって求める確率は,

$$P(X \leq 1) = 1 - e^{-2} \doteq 0.865.$$