

§6 期待値, 分散, 標準偏差 演習問題 3

🔑 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

【記号】 以下, すべての問いにおいて確率空間 $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上で考える. $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上の確率変数を単に“確率変数”とよぶ. 確率変数 X に対して, その期待値を $\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$, 分散を $\text{var}[X] := \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$ で表す.

また, 集合 A に対し $\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ で A の特性関数を表す. $\exp(x) := e^x$ と書く.

1 (☆☆☆)(Variant Chebyshev)

X を確率変数とする. 任意の $\lambda > 0$ と実数 x に対して

$$\mathbb{P}[X \geq x] \leq \frac{\mathbb{E}[\exp(\lambda X)]}{\exp(\lambda x)}$$

が成り立つことを示せ.

2 (★★★★★)(Laplace 変換)

X を確率変数, $s, \theta \in (0, \infty)$ とする. X が $\mathcal{O}_s(\theta)$ 以下であることを

$$X \leq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \mathbb{E}[\exp((\theta^{-1}X_+)^s)] \leq 2$$

によって定義する. ただし, $X_+ := \max\{X, 0\}$ は X の正值部分を表す. このとき, 以下の (1), (2) を示せ:

(1) 任意の $s \in (1, \infty)$ に対して, s に依存する定数 $C = C(s)$ が存在して

$$X \leq \mathcal{O}_s(1) \implies \forall \lambda \geq 1, \quad \log \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] \leq C\lambda^{\frac{s}{s-1}}.$$

(2) 任意の $s \in (1, \infty)$ および 任意の $\lambda \geq 1$ に対して,

$$\log \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] \leq \lambda^{\frac{s}{s-1}} \implies X \leq \mathcal{O}_s(2^{\frac{s+1}{s}}) \text{ or } X \leq 2.$$