

§6 期待値, 分散, 標準偏差 演習問題 2

🔑 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

【記号】以下, すべての問いにおいて確率空間 $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上で考える. $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上の確率変数を単に“確率変数”とよぶ. 確率変数 X に対して, その期待値を $\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$, 分散を $\text{var}[X] := \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]$ で表す.

また, 集合 A に対し $\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ で A の特性関数を表す. $\exp(x) := e^x$ と書く.

1 (☆☆☆)(Chebyshev の不等式)

X を確率変数, $1 \leq p < \infty$ とする. 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbb{P}[|X| \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{\lambda^p}$$

が成り立つことを示せ. これを Chebyshev の不等式という.

2 (★★★)($\mathcal{O}_s(\cdot)$ 記号の性質①)

X を確率変数, $s, \theta \in (0, \infty)$ とする. X が $\mathcal{O}_s(\theta)$ 以下であることを

$$X \leq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \mathbb{E}[\exp((\theta^{-1}X_+)^s)] \leq 2$$

によって定義する. ただし, $X_+ := \max\{X, 0\}$ は X の正値部分を表す. このとき, 以下の (1)–(3) を示せ:

$$(1) X \leq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \theta^{-1}X \leq \mathcal{O}_s(1).$$

$$(2) X \leq \mathcal{O}_s(\theta) \text{ ならば, 任意の } x \geq 0 \text{ に対して}$$

$$\mathbb{P}[X \geq \theta x] \leq 2 \exp(-x^s).$$

$$(3) \text{ 任意の } x \geq 0 \text{ に対して } \mathbb{P}[X \geq \theta x] \leq \exp(-x^s) \text{ ならば,}$$

$$X \leq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{1}{s}}\theta\right).$$

3 (★★★)($\mathcal{O}_s(\cdot)$ 記号の性質②)

$\theta, \varphi \in (0, \infty)$ とし, 確率変数 X, Y は $0 \leq X \leq \mathcal{O}_1(\theta)$, $0 \leq Y \leq \mathcal{O}_1(\varphi)$ を満たしているとする. このとき,

$$XY \leq \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}(\theta\varphi)$$

が成り立つことを, 相加相乗平均の不等式および, 積分型 Cauchy-Schwarz の不等式 $\int fg \leq \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2\right)^{\frac{1}{2}}$ を用いて示せ.