# §6 期待値，分散，標準偏差　演習問題３　解答

**問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★**

**【記号】**以下，すべての問いにおいて確率空間 $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上で考える．$(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上の確率変数を単に "確率変数" とよぶ．確率変数 $X$ に対して，その期待値を $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$，分散を $\mathrm{var}[X] := \mathbb{E}\left[|X - E[X]|^2\right]$ で表す．

また，集合 $A$ に対し $\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ で $A$ の特性関数を表す．$\exp(x) := e^x$ と書く．

## 1 (★☆☆)(Variant Chebyshev)

$X$ を確率変数とする．任意の $\lambda > 0$ と実数 $x$ に対して

$$\mathbb{P}\left[X \geqq x\right] \leqq \frac{\mathbb{E}[\exp(\lambda X)]}{\exp(\lambda x)}$$

が成り立つことを示せ．

**解** 以下のように，直接計算により証明が完了する：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] = \int_\Omega \exp(\lambda X)\, d\mathbb{P} &\geqq \int_{\Omega \cap \{X \geqq x\}} \exp(\lambda X)\, d\mathbb{P} \\ &\geqq \exp(\lambda x) \int_{\Omega \cap \{X \geqq x\}} d\mathbb{P} = \exp(\lambda x)\mathbb{P}\left[X \geqq x\right].\end{aligned}$$

∎

## 2 (★★★★★)(Laplace 変換)

$X$ を確率変数，$s, \theta \in (0, \infty)$ とする．$X$ が $\boldsymbol{\mathcal{O}_s(\theta)}$ **以下**であることを

$$X \leqq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \mathbb{E}\left[\exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\right] \leqq 2$$

によって定義する．ただし，$X_+ := \max\{X, 0\}$ は $X$ の正値部分を表す．このとき，以下の (1), (2) を示せ：

(1) 任意の $s \in (1, \infty)$ に対して，$s$ に依存する定数 $C = C(s)$ が存在して

$$X \leqq \mathcal{O}_s(1) \implies \forall \lambda \geqq 1, \quad \log \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqq C\lambda^{\frac{s}{s-1}}.$$

(2) 任意の $s \in (1, \infty)$ および 任意の $\lambda \geqq 1$ に対して，

$$\log \mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqq \lambda^{\frac{s}{s-1}} \implies X \leqq \mathcal{O}_s(2^{\frac{s+1}{s}}) \text{ or } X \leqq 2.$$

**解** (1)　任意の $\lambda \geqq 1$ に対して微積分の基本定理により，

$$\begin{aligned}\exp(\lambda X) &= 1 + \int_0^X \frac{d}{dx}\exp(\lambda x)\ dx \\ &= 1 + \lambda \int_0^X \exp(\lambda x)\ dx \\ &= 1 + \lambda \int_0^\infty \exp(\lambda x)\,\mathbb{1}_{\{X \geqq x\}}\,dx\end{aligned}$$

したがって，Fubini の定理 (重積分の累次積分) を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] &= \mathbb{E}[1] + \mathbb{E}\left[\lambda \int_0^\infty \exp(\lambda x)\,\mathbb{1}_{\{X \geqq x\}}\,dx\right] \\ &= 1 + \int_\Omega \lambda \int_0^\infty \exp(\lambda x)\,\mathbb{1}_{\{X \geqq x\}}\,dx d\mathbb{P} \\ &= 1 + \int_0^\infty \lambda \exp(\lambda x)\left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X \geqq x\}}\,d\mathbb{P}\right) dx \\ &= 1 + \int_0^\infty \lambda \exp(\lambda x)\,\mathbb{P}[X \geqq x]\ dx.\end{aligned}$$

仮定：$X \leqq \mathcal{O}_s(1)$ であるから，**§6 期待値，分散，標準偏差　演習問題 2–$\boxed{2}$–(2)** より

$$\mathbb{P}[X \geqq x] \leqq 2\exp(-x^s), \quad \forall x \geqq 0$$

が従う．ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(\lambda X)] &\leqq 1 + \int_0^\infty 2\lambda \exp(\lambda x - x^s)\ dx \\ &= 1 + \int_0^{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}} (\cdots)\,dx + \int_{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}}^\infty (\cdots)\,dx \\ &=: 1 + I_1 + I_2.\end{aligned}$$

以下，$I_1$, $I_2$ を評価する．$I_1$ に関して

$$\begin{aligned}I_1 = \int_0^{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}} 2\lambda \exp(\lambda x - x^s)\ dx &\leqq \int_0^{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}} 2\lambda \exp(\lambda x)\ dx \\ &= \Big[2\exp(\lambda x)\Big]_{x=0}^{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}} \leqq 2\exp\left(2^{\frac{1}{s-1}}\lambda^{\frac{s}{s-1}}\right).\end{aligned}$$

一方，$I_2$ に関して $(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}} \leqq x \iff \lambda x - x^s \leqq -\frac{x^s}{2}$ であるから，

$$I_2 = \int_{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}}^\infty 2\lambda \exp(\lambda x - x^s)\ dx \leqq \int_{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}}^\infty 2\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}x^s\right)\ dx$$

$$\leqq 2\lambda \int_{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}}^{\infty} \frac{2}{x^s+2}\,dx \quad (\because\ e^{-t} \leqq \tfrac{1}{t+1}\ )$$

$$\leqq 4\lambda \int_{(2\lambda)^{\frac{1}{s-1}}}^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx \leqq \lambda C(s) \quad (\because\ s>1\ ).$$

したがって，任意の $\lambda \geqq 1$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqq 1 + 2\exp\left(2^{\frac{1}{s-1}}\lambda^{\frac{s}{s-1}}\right)\lambda C(s)$$

$$\leqq \exp\left(C(s)\lambda^{\frac{s}{s-1}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \log\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqq C(s)\lambda^{\frac{s}{s-1}}.$$

(2) $\boxed{1}$ および，仮定の $\log\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X)\right] \leqq \lambda^{\frac{s}{s-1}}$ により，任意の $\lambda \geqq 1$ と任意の $x \geqq 2$ に対して

$$\mathbb{P}\left[X \geqq x\right] \leqq \exp\left(\lambda^{\frac{s}{s-1}} - \lambda x\right)$$

が成り立つ．特に $\lambda = (x/2)^{s-1} (\geqq 1)$ と選ぶことにより $\lambda^{\frac{s}{s-1}} - \lambda x = -(x/2)^s$ だから，

$$\mathbb{P}\left[X \geqq x\right] \leqq \exp\left(-2^{-s}x^s\right), \quad \forall x \geqq 2 \quad \cdots ①.$$

が成り立つ．次に，微積分の基本定理により

$$\exp\left(\left(2^{-\frac{s+1}{s}}X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+^s\right) = 1 + \int_0^{\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+} \left(\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\right)'\,dx$$

$$= 1 + \int_0^{\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\,dx.$$

ゆえに，Fubini の定理 (重積分の累次積分) により

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\left(2^{-\frac{s+1}{s}}X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+^s\right)\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^{\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x\right)\,dx\right]$$

$$= 1 + \int_\Omega\left(\int_0^{\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqq 2\}}\right)_+} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\,dx\right)d\mathbb{P}$$

$$= 1 + \int_\Omega\left(\int_0^{\infty} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\mathbb{1}_{\{X\geqq x,\ x\geqq 2\}}\,dx\right)d\mathbb{P}$$

$$= 1 + \int_\Omega\left(\int_2^{\infty} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\mathbb{1}_{\{X\geqq x\}}\,dx\right)d\mathbb{P}$$

$$= 1 + \int_2^{\infty} 2^{-(s+1)}sx^{s-1}\exp\left(2^{-(s+1)}x^s\right)\left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X\geqq x\}}d\mathbb{P}\right)dx$$

$$= 1 + \int_2^\infty 2^{-(s+1)} s x^{s-1} \exp\left(2^{-(s+1)} x^s\right) \mathbb{P}\left[\, X \geqq x \,\right] dx.$$

さらに，①を用いて

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[ \exp\left( \left( 2^{-\frac{s+1}{s}} X \mathbb{1}_{\{X \geqq 2\}} \right)_+^s \right) \right] &\leqq 1 + \int_2^\infty 2^{-(s+1)} s x^{s-1} \exp\left(-2^{-(s+1)} x^s\right) dx \\
&= 1 + \int_2^\infty \left( -\exp\left(-2^{-(s+1)} x^s\right)\right)' dx \\
&= 1 + \Big[ -\exp\left(-2^{-(s+1)} x^s\right) \Big]_{x=2}^\infty \\
&= 1 + \exp\left(-\tfrac{1}{2}\right) \leqq 2
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$X \mathbb{1}_{\{X \geqq 2\}} \leqq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{s+1}{s}}\right) \iff X \leqq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{s+1}{s}}\right) \text{ or } X \leqq 2$$

となり，証明が完了した． ∎

**Memo** ✎　$\lambda \mapsto \log \mathbb{E}\left[\, \exp(\lambda X) \,\right]$ を確率変数 $X$ に対する **Laplace 変換**という．Laplace 変換は，同じ分布に従う独立な確率変数列 (i.i.d.= independent and identically distributed) に対する中心極限定理を証明する際に活躍する．