§6 期待値，分散，標準偏差　演習問題 2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

【記号】以下，すべての問いにおいて確率空間 $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上で考える．$(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ 上の確率変数を単に "確率変数" とよぶ．確率変数 X に対して，その期待値を $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X\, d\mathbb{P}$，分散を $\mathrm{var}[X] := \mathbb{E}\big[\,|X - E[X]|^2\,\big]$ で表す．

また，集合 A に対し $\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ で A の特性関数を表す．$\exp(x) := e^x$ と書く．

1 (★☆☆)(Chebyshev の不等式)

X を確率変数，$1 \leqq p < \infty$ とする．任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbb{P}\,[\,|X| \geqq \lambda\,] \leqq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{\lambda^p}$$

が成り立つことを示せ．これを **Chebyshev（チェビシェフ）の不等式**という．

解 以下のように 1 行で証明が完了する：

$$\mathbb{E}\,[\,|X|^p\,] = \int_\Omega |X|^p\, d\mathbb{P} \geqq \int_{\Omega \cap \{|X| \geqq \lambda\}} |X|^p\, d\mathbb{P} \geqq \lambda^p \int_{\Omega \cap \{|X| \geqq \lambda\}} d\mathbb{P} = \lambda^p \mathbb{P}\,[\,|X| \geqq \lambda\,].$$

∎

2 (★★★)($\mathcal{O}_s(\cdot)$ 記号の性質①)

X を確率変数，$s, \theta \in (0, \infty)$ とする．X が $\boldsymbol{\mathcal{O}_s(\theta)}$ **以下**であることを

$$X \leqq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \mathbb{E}\left[\exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\right] \leqq 2$$

によって定義する．ただし，$X_+ := \max\{X, 0\}$ は X の正値部分を表す．このとき，以下の (1)–(3) を示せ：

(1) $X \leqq \mathcal{O}_s(\theta) \iff \theta^{-1}X \leqq \mathcal{O}_s(1)$.

(2) $X \leqq \mathcal{O}_s(\theta)$ ならば，任意の $x \geqq 0$ に対して

$$\mathbb{P}\,[\,X \geqq \theta x\,] \leqq 2\exp(-x^s).$$

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $\mathbb{P}\,[\,X \geqq \theta x\,] \leqq \exp(-x^s)$ ならば，

$$X \leqq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{1}{s}}\theta\right).$$

解 (1)　同値変形によって，

$$
\begin{aligned}
X \leqq \mathcal{O}_s(\theta) &\iff \mathbb{E}\left[\exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\right] \leqq 2 \\
&\iff \int_\Omega \exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\, d\mathbb{P} \leqq 2 \\
&\overset{Y:=\theta^{-1}X}{\iff} \int_\Omega \exp(Y_+^s)\, d\mathbb{P} \leqq 2 \\
&\iff \mathbb{E}\left[\exp(Y_+^s)\right] \leqq 2 \\
&\iff Y = \theta^{-1}X \leqq \mathcal{O}_s(1).
\end{aligned}
$$

(2)　$X \leqq \mathcal{O}_s(\theta)$ とすると，$\mathbb{E}[\exp((\theta^{-1}X_+)^s)] \leqq 2$．左辺について $\boxed{1}$ (Chebyshev の不等式) と同様の証明により，$\forall x \geqq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\right] &= \int_\Omega \exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\, d\mathbb{P} \\
&\geqq \int_{\Omega\cap\{X\geqq\theta x\}} \exp\left((\theta^{-1}X_+)^s\right)\, d\mathbb{P} \\
&\geqq \int_{\Omega\cap\{X\geqq\theta x\}} \exp\left(x^s\right)\, d\mathbb{P} = \exp(x^s)\mathbb{P}\left[X \geqq \theta x\right].
\end{aligned}
$$

これより，所望の不等式を得る．

(3)　まず，$\mathbb{E}\left[\exp\left(\left((2^{\frac{1}{s}}\theta)^{-1}X_+\right)^s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\theta^{-1}X_+)^s\right)\right]$ が成り立つ．右辺の期待値中の確率変数に関して，微積分の基本定理により

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{2}(\theta^{-1}X_+)^s\right) - 1 &= \int_0^{\theta^{-1}X_+} \frac{d}{dx}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\, dx \\
&= \int_0^{\theta^{-1}X_+} \frac{s}{2}x^{s-1}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\, dx
\end{aligned}
$$

と書き直せる．Fubini の定理 (重積分の累次積分) と仮定：$\mathbb{P}[X \geqq \theta x] \leqq \exp(-x^s)$ $(\forall x \geqq 0)$ を用いれば，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left((2^{\frac{1}{s}}\theta)^{-1}X_+\right)^s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta^{-1}X_+} \frac{s}{2}x^{s-1}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\, dx + 1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta^{-1}X_+} \frac{s}{2}x^{s-1}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\, dx\right] + \underbrace{\mathbb{E}[1]}_{=\int_\Omega d\mathbb{P}=\mathbb{P}[\Omega]=1} \\
&= \int_\Omega\left(\int_0^{\theta^{-1}X_+} \frac{s}{2}x^{s-1}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\, dx\right) d\mathbb{P} + 1 \\
&= \int_\Omega\left(\int_0^{\infty} \frac{s}{2}x^{s-1}\exp\left(\frac{1}{2}x^s\right)\mathbb{1}_{\{X\geqq\theta x\}}\, dx\right) d\mathbb{P} + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{s}{2} x^{s-1} \exp\left(\frac{1}{2}x^s\right) \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{\{X \geqq \theta x\}} \, d\mathbb{P} \right) dx + 1 \quad (\because \ \text{Fubini の定理} \ ) \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{2} x^{s-1} \exp\left(\frac{1}{2}x^s\right) \underbrace{\mathbb{P}\left[\, X \geqq \theta x \,\right]}_{\leqq \exp(-x^s)} dx + 1 \\
&= 1 + \int_0^\infty \frac{s}{2} x^{s-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x^s\right) dx \\
&= 1 + \int_0^\infty \left\{ -\exp\left(-\frac{x^s}{2}\right) \right\}' dx \\
&= 1 + \left[-\exp\left(-\frac{x^s}{2}\right) \right]_{x=0}^{\infty} = 2,
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\mathbb{E}\left[\exp\left(\left((2^{\frac{1}{s}}\theta)^{-1} X_+ \right)^s \right) \right] \leqq 2 \iff X \leqq \mathcal{O}_s\left(2^{\frac{1}{s}}\theta\right).
$$

∎

3 (★★★)($\mathcal{O}_s(\cdot)$ 記号の性質②)

$\theta, \varphi \in (0, \infty)$ とし，確率変数 X, Y は $0 \leqq X \leqq \mathcal{O}_1(\theta)$，$0 \leqq Y \leqq \mathcal{O}_1(\varphi)$ を満たしているとする．このとき，

$$
XY \leqq \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}(\theta\varphi)
$$

が成り立つことを，相加相乗平均の不等式および，積分型 Cauchy-Schwarz の不等式 $\displaystyle\int fg \leqq \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2\right)^{\frac{1}{2}}$ を用いて示せ．

解 まず，$X, Y \geqq 0$ と相加相乗平均の不等式により，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\left[(\theta\varphi)^{-1} (XY)_+ \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\left[(\theta\varphi)^{-1} XY \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right] \qquad (\because \ (XY)_+ = XY \ ) \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\left[(\theta^{-1}X)(\varphi^{-1}Y) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\
&= \int_\Omega \exp\left(\left[(\theta^{-1}X)(\varphi^{-1}Y) \right]^{\frac{1}{2}} \right) d\mathbb{P} \\
&\leqq \int_\Omega \exp\left(\frac{(\theta^{-1}X) + (\varphi^{-1}Y)}{2} \right) d\mathbb{P} \quad (\because \ \text{相加相乗} \ ) \\
&= \int_\Omega \exp\left(\frac{\theta^{-1}X}{2} \right) \exp\left(\frac{\varphi^{-1}Y}{2} \right) d\mathbb{P} \quad \cdots ①.
\end{aligned}
$$

積分型 Cauchy-Schwarz の不等式 $\displaystyle\int fg \leqq \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2\right)^{\frac{1}{2}}$ および，$X \leqq \mathcal{O}_1(\theta)$，$Y \leqq \mathcal{O}_1(\varphi)$

により，①の右辺は

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\frac{\theta^{-1}X}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{\theta^{-1}Y}{2}\right)\,d\mathbb{P} &\leqq \left(\int_\Omega \left[\exp\left(\frac{\theta^{-1}X}{2}\right)\right]^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \left[\exp\left(\frac{\varphi^{-1}Y}{2}\right)\right]^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \exp\left(\theta^{-1}X\right)\,d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \exp\left(\varphi^{-1}Y\right)\,d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta^{-1}X\right)\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\exp\left(\varphi^{-1}Y\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqq 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}
$$

と評価できる．したがって①と合わせると，所望の不等式

$$
\mathbb{E}\left[\exp\left(\left[(\theta\varphi)^{-1}(XY)_+\right]^{\frac{1}{2}}\right)\right] \leqq 2 \iff XY \leqq \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}(\theta\varphi)
$$

に逢着する． ∎

【メモ】より一般に，$i=1,2$ に対して $X_i \leqq \mathcal{O}_{s_i}(\theta_i)$ ならば

$$
X_1X_2 \leqq \mathcal{O}_{\frac{s_1s_2}{s_1+s_2}}(\theta_1\theta_2)
$$

が成り立つ．