

期待値, 分散, 標準偏差 問題 1 解答

1 連続確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 1) \end{cases}$$

で表されるとする.

(1) 確率 $P(0 \leq X \leq 0.3)$, $P(0.3 \leq X \leq 1)$ の値を求めよ.

[解]: 連続確率分布 $f(x)$ に従う確率変数 X の確率は, 定積分 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ によって求まる. したがって,

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 0.3) &= \int_0^{0.3} 2x dx = 0.09, \\ P(0.3 \leq X \leq 1) &= 1 - P(0 \leq X \leq 0.3) = 0.91. \end{aligned}$$

(2) 期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.

[解]: 期待値の定義より,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x(2x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

また,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2(2x) dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

より, 分散の公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を使えば

$$V(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{18}.$$

(3) 確率分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ.

[解]: 確率分布関数の定義より, $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x 2t dt = x^2$$

となる. $x < 0$ または $x > 1$ の場合は確率密度関数 $f(x)$ は常に 0 であるから,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

となる.