

**条件付き確率, 独立事象, ベイズの定理 演習問題2 解答**

問 1. 同じ製品を 3 台の機械  $A, B, C$  で作っている. 全製品のうち

$A$  が 10%,  $B$  が 30%,  $C$  が 60%

を生産しており, それぞれの機械が不良品を作る確率は,

$A$  は 3%,  $B$  は 2%,  $C$  は 1%

であると分かっている. これらの機械で作られた製品から, 無作為に 1 個の製品を取り出したところ不良品であった. このときこの製品が  $A$  の機械で作られた確率,  $B$  の機械で作られた確率,  $C$  の機械で作られた確率をそれぞれ求めよ.

**解答.** 各事象を

- $A$  : 取り出した製品が機械  $A$  で作られた
- $B$  : 取り出した製品が機械  $B$  で作られた
- $C$  : 取り出した製品が機械  $C$  で作られた
- $E$  : 取り出した製品が不良品であった

とおく. 取り出した製品が不良品であったとき, この製品が  $A$  の機械で作られた確率は  $P_E(A)$  となる. ここで,  $P_E(A)$  は事象  $E$  が起こったときの事象  $A$  の条件付き確率である. 同様にこの製品が  $B$  の機械で作られた確率は  $P_E(B)$ ,  $C$  の機械で作られた確率は  $P_E(C)$  である. いま,  $A \cup B \cup C$  は全事象で,  $A, B, C$  は互いに排反であり

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.1, & P(B) &= 0.3, & P(C) &= 0.6, \\ P_A(E) &= 0.03, & P_B(E) &= 0.02, & P_C(E) &= 0.01, \end{aligned}$$

であるから, ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P_E(A) &= \frac{P(A)P_A(E)}{P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(C)P_C(E)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.03}{0.1 \times 0.03 + 0.3 \times 0.02 + 0.6 \times 0.01} \\ &= \frac{1}{5} = 0.2, \\ P_E(B) &= \frac{P(B)P_B(E)}{P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(C)P_C(E)} \\ &= \frac{0.3 \times 0.02}{0.1 \times 0.03 + 0.3 \times 0.02 + 0.6 \times 0.01} \\ &= \frac{2}{5} = 0.4, \\ P_E(C) &= \frac{P(C)P_C(E)}{P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E) + P(C)P_C(E)} \\ &= \frac{0.6 \times 0.01}{0.1 \times 0.03 + 0.3 \times 0.02 + 0.6 \times 0.01} \\ &= \frac{2}{5} = 0.4 \end{aligned}$$

とわかる.

何も情報がないとき，取り出した製品が  $A$  で作られた確率は  $P(A) = 0.1 = 10\%$  であったが，取り出した製品が不良品であるという情報が得られたことからその製品が  $A$  で作られた確率が  $P_E(A) = 0.2 = 20\%$  と更新されたと解釈できる． $A$  は生産数が少ないにも関わらず不良率が 1 番高いことから，取り出した不良品は  $A$  で作られた可能性が高いと想像できると思うが，その反映である．他の  $P_E(B)$ ,  $P_E(C)$  も同様に解釈できる．