

§3 確率論の基礎, 確率空間の例 演習問題1 解答

🔑 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(算術的確率 1)

サイコロを無作為に2回振るとき, 事象 A : 1回目の出た目が5である確率を, 標本空間を設定して求めよ.

解 (x_1, x_2) で1回目の出た目 x_1 , 2回目の出た目 x_2 の対として表すと, 標本空間 Ω は

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 = 1, \dots, 6\}$$

と表され, 要素数は $\#\Omega = 36$. 一方, 事象 A は

$$A = \{(5, x_2) : x_2 = 1, \dots, 6\}$$

であるから, 要素数は $\#A = 6$. したがって求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

■

2 (☆☆☆)(算術的確率 2)

サイコロを無作為に4回振るとき, 5の目が2回出る確率を, 標本空間を設定して求めよ.

解 (x_1, x_2, x_3, x_4) で第 i -成分に i 回目の出た目が x_i であるペアとして表す. 標本空間 Ω は

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 = 1, \dots, 6\}$$

と表され, 要素数は $\#\Omega = 6^4$. 一方, 事象 A を5の目が2回出る事象とすると, 4回中どこで5の目が出るかで, ${}_4C_2$ 通りあり, 回を固定すると残りの2個のサイコロの目の出方が 6^2 通りあるから, $\#A = {}_4C_2 \times 6^2$. したがって求める確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{{}_4C_2 \times 6^2}{6^4} = \frac{1}{6}.$$

■

3 (★★☆)(幾何的確率)

区間 $[0, 1]$ から無作為に 2 点 x, y をとる. このとき, x と y の距離が $1/2$ 以上となる確率を, 標本空間を設定して求めよ.

解 標本空間 Ω は $[0, 1]$ の直積集合と考えて

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

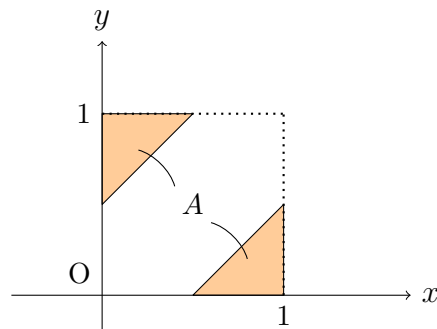
であり, その面積は $|\Omega| = 1$.

一方, $x, y \in \Omega$ の距離が $1/2$ 以上となる事象を A とすると,

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, |x - y| \geq 1/2\}$$

であり, 図示すると右図のようになる. したがって, A の面積は $|A| = 1/4$. ゆえに, 求める確率は

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}.$$



4 (★★☆)(誕生日の問題)

n 人のクラスに同じ誕生日の人が少なくとも 1 組存在する確率が 50% 以上となるためには, n はいくら以上であればよいか. 計算のためにエクセルや計算機を用いてよい. ただし, 簡単のため双子や閏年は考えないものとし, どの人も誕生日がどの日になるかは等確率であるとする.

解 n 人のうち同じ誕生日の人が少なくとも 1 組存在するという事象を A とすると, 求める確率は $P(A) = 1 - P(A^c)$ である. $n \geq 366$ あれば $P(A) = 1$ であるから, この場合は除外して, 以下では $n \leq 365$ として考える. $P(A^c)$ は n 人の誕生日が全て異なる事象の確率である. 1 人目の誕生日を固定して, 2 人目が 1 人目と誕生日が異なる確率は $\frac{364}{365}$. 次に 3 人目が 1 人目, 2 人目と誕生日が異なる確率は $\frac{363}{365}$ であるから, 以降繰り返して,

$$P(A^c) = \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - (n-1)}{365} = \frac{365!}{(365-n)! 365^n}$$

となる. したがって, 求める確率 $P(A)$ が 50% 以上すなわち,

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! 365^n} \geq \frac{1}{2}$$

となる n を求めると, $n \geq 23^*$. したがって **23 人以上** であれば, 同じ誕生日の人が少なくとも 1 組存在する.

*手計算でやるのは非現実的なので, エクセルなどの計算機を用いて処理.

5 (☆☆☆)(加法定理)

どの目も等確率で出るサイコロを6回振る。「6回のうちに少なくとも1回1の目が出る確率を求めよ」という問題に対して、ある人が「各回に1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるから、求める確率は $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ 。したがって、サイコロ6回振ると少なくとも1回は1の目が出る」と答えた。その人の誤りを指摘し、正しい確率を求めよ。^a

^a参考出典：京都大学('80)入試問題

解 6つのサイコロを順に振ると考えて、 A_i で i -個目のサイコロ ($1 \leq i \leq 6$) に1の目が出る事象を表す。このとき $P(A_i) = \frac{1}{6}$ である。この人は、求めたい確率 $P(A_1 \cup \cdots \cup A_6)$ を A_i が互いに排反でないのにも関わらず、

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_6) = \sum_{i=1}^6 P(A_i) = \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{6} = 1$$

としてしまっているところが誤りである。正しくは、次のようになる：

加法定理を使って計算しようとする、大変なので余事象を求めて計算しよう。6回のうちに少なくとも1回1の目が出るという事象を X とする。その余事象 X^c は「6回のうち1度も1の目が出ない」という事象なので、その確率は $P(X^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$ 。ゆえに、求める確率は

$$P(X) = 1 - P(X^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{31031}{46656}.$$

■